# Mecánica Elemental I

Hugo Aurelio Morales Técotl
Departamento de Física, Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa

**Resumen.** Mecánica Elemental

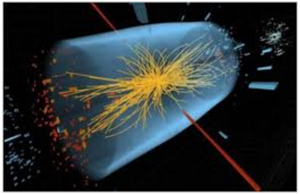


Figura: Colisón de partículas en el Gran Colisionador de Hadrones (LHC), Ginebra Suiza

# PLAN

# Ideas previas VS experimentos

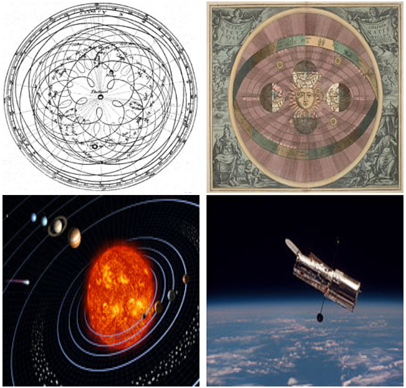


Figura: Evolución de las Ideas previas en el modelo del sistema planetario. Modelo geocéntrico, heliocéntrico y Newtoniano. Telescopio espacial Hubble usado para observaciones a nivel cósmico.

## Ideas previas VS experimentos

- IDEAS PREVIAS [1]. Ideas sugeridas por experiencia cotidiana o de manera intuitiva generalmente **erróneas**. Algunas ideas previas comunes sobre el concepto de fuerza son:
    1. los objetos permanecen en reposo a menos que una fuerza actúe sobre ellos,
    2. los objetos inanimados no ejercen fuerza,
    3. cuando un objeto cae no requiere de fuerza,
    4. una fuerza constante produce una velocidad constante,
    5. cuando varias fuerzas están en competencia el movimiento está determinado por la fuerza más grande,
    6. la magnitud de una fuerza determina el tiempo en el que se recorre una distancia,
    7. una fuerza no puede mantener a un objeto acelerado indefinidamente,
    8. una fuerza sólo puede mover un objeto si es mayor a la masa del objeto.
- EXPERIMENTOS que muestran que las ideas previas suelen ser erróneas. Estudio y **medición** de las posiciones como función del tiempo de objetos en movimiento: movimiento con velocidad constante, caída libre, tiro vertical, lanzamiento de proyectiles, colisiones.
- CONCLUSIÓN. En la Física se expresan con precisión los **conceptos** definidos, su **representación matemática**, se sugieren experimentos para **medir** las **cantidades relevantes** y poner a prueba su consistencia comparando las predicciones teóricas con los valores medidos. De esta manera se corrigen las ideas previas.

[1] C. Mora y D. Herrera. Una revisión sobre ideas previas del concepto de fuerza. Lat. Am. J. Phys. Educ. 2009

## Sistema Internacional de Unidades

Magnitudes Físicas: longitud, area, volumen, posición, velocidad, temperatura, fuerza,

Unidades: cantidades de referencia con respecto a las cuales expresamos una magnitud física

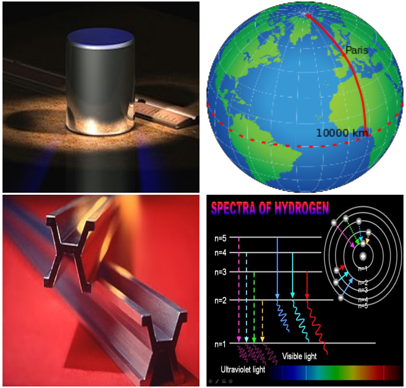



Figura: Definiciones y patrones de Kg y m. Actualmente se utilizan sistemas atómicos para definirlos junto con el segundo.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA Casa abierta al tiempo

| Unidad básica (símbolo) | Magnitud física básica [Símbolo de la magnitud] | Definición técnica | Definición derivada |
|---|---|---|---|
| **segundo** (s) | tiempo [T] | Se define al fijar el valor numérico de la frecuencia de la transición hiperfina del estado fundamental no perturbado del átomo de cesio 133, $\Delta\nu_{Cs}$, en 9 192 631 770, cuando se expresa en la unidad Hz, igual a $s^{-1}$.nota 1 [$\Delta\nu_{Cs}$=9 192 631 770 /s] | Es la duración de 9 192 631 770 periodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental no perturbado del átomo de cesio 133. |
| **metro** (m) | longitud [L] | Se define al fijar el valor numérico de la velocidad de la luz en el vacío, *c*, en 299 792 458, cuando se expresa en la unidad $m{\cdot}s^{-1}$, según la definición del segundo dada anteriormente. [$c$=299 792 458 m/s] | Es la longitud del trayecto recorrido por la luz en el vacío durante un intervalo de tiempo de 1/299 792 458 de segundo. |
| **kilogramo**nota 2 (kg) | masa [M] | Se define al fijar el valor numérico de la constante de Planck, *h*, en 6.626 070 15 × $10^{-34}$, cuando se expresa en la unidad J·s, igual a $kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-1}$, según las definiciones del metro y el segundo dadas anteriormente. [$h$=6.626 070 15·$10^{-34}$ $kg{\cdot}m^2/s$] | |

Figura: Definiciones modernas del Sistema Internacional de Unidades

## Análisis dimensional

Ejercicio. Use análisis dimensional para calcular el tiempo de Planck $t_P$ usando las constantes fundamentales siguientes:

- La constante de la gravitación universal de Newton $G = 6{,}67 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kgs^2}$
- La constante de Planck de la física atómica $\hbar = 1{,}05 \times 10^{-34} \frac{kgm^2}{s}$
- La velocidad de la luz $c = 3 \times 10^5 \frac{km}{s}$

*Sugerencia: Considere $t_p = G^\alpha \hbar^\beta c^\gamma$. Determine las potencias y evalúe.*

## Análisis dimensional

Dimensiones $[t_P] = T, \quad [G] = \frac{L^3}{MT^2}, \quad [\hbar] = \frac{ML^2}{T}, \quad [c] = \frac{L}{T}.$

Consistencia de la ecuación en dimensiones

$$t_p = G^\alpha \hbar^\beta c^\gamma \Rightarrow [t_p] = [G]^\alpha [\hbar]^\beta [c]^\gamma \tag{1}$$

$$\Rightarrow T^1 = \left(\frac{L^3}{MT^2}\right)^\alpha \left(\frac{ML^2}{T}\right)^\beta \left(\frac{L}{T}\right)^\gamma = L^{3\alpha+2\beta+\gamma} M^{-\alpha+\beta} T^{-2\alpha-\beta-\gamma} \tag{2}$$

$$\Rightarrow L^0 M^0 T^1 = L^{3\alpha+2\beta+\gamma} M^{-\alpha+\beta} T^{-2\alpha-\beta-\gamma} \tag{3}$$

$$\text{Potencias de L:} \qquad 0 = 3\alpha + 2\beta + \gamma \tag{4}$$

$$\text{Potencias de M:} \qquad 0 = -\alpha + \beta \tag{5}$$

$$\text{Potencias de T:} \qquad 1 = -2\alpha - \beta - \gamma \tag{6}$$

## Análisis dimensional

Solución del sistema de 3 ecuaciones en 3 incógnitas. El sistema (4)-(6) se reduce a

$$\alpha = \beta \tag{7}$$

$$0 = 5\alpha + \gamma \tag{8}$$

$$1 = -3\alpha - \gamma \tag{9}$$

Resolviendo (8) y (9) lleva a la solución $\alpha = \beta = \frac{1}{2},\ \gamma = -\frac{5}{2}$.

Finalmente

$$t_P = \frac{G^{\frac{1}{2}}\hbar^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{5}{2}}} = \left(\frac{G\hbar}{c^5}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{(6{,}67\times 10^{-11}\,\frac{m^3}{kgs^2})(1{,}05\times 10^{-34}\,\frac{kgm^2}{s})}{(3\times 10^8\,\frac{m}{s})^5}\right)^{\frac{1}{2}} = 5{,}39\times 10^{-44}s$$

# Movimiento en una dimensión

CINEMÁTICA: Estudio del movimiento sin asociarlo con las causas que lo provocan

Movimiento en una dimensión (1D) = Movimiento rectilíneo (Sobre la recta real)

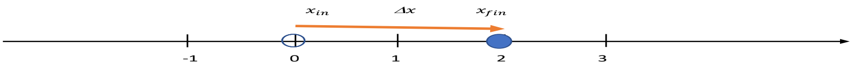
POSICIÓN: Magnitud física que nos da la ubicación del objeto sobre la recta real $x$, tiene unidades $m$ y es una función del tiempo $t$, unidades $s$:

$$x(t)$$

OBSERVACIÓN: Usamos una aproximación de partícula para cualquier objeto tridimensional: en lugar del objeto usamos un punto.

DESPLAZAMIENTO: Cambio de posición en dos tiempos determinados.

$$\Delta x = x_{final} - x_{inicial} = x_f - x_i, \quad x_f = x(t_f), \quad x_i = x(t_i)$$



## Movimiento en una dimensión

Ejemplo: $A: \; t_i = 0s, x_i = 30m$, $B: \; t_f = 10s, x_f = 52m$, desplazamiento $\Delta x = 52m - 30m = 22m$
tiempo transcurrido entre A y B: $t_f - t_i = 10s - 0s = 10s$
Ejercicio: Consideren los puntos E y F. Calculen el desplazamiento y el tiempo transcurrido.
$E: (40s, -37m), F: (50s, -53m)$. Respuesta: $\Delta x = -53m - (-37m) = -16m$
$t_f - t_i = 50s - 40s = 10s$.

# Movimiento en una dimensión

VELOCIDAD MEDIA: El cociente del desplazamiento realizado por la partícula entre el tiempo transcurrido $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$

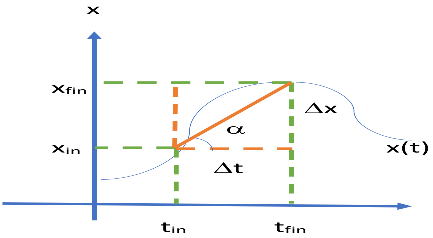
Velocidad media entre A y B: $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{22m}{10s} = 2{,}2\frac{m}{s}$ La partícula se alejó del origen y se movió a su izquierda.

Ejercicio. Calcule la velocidad media entre E y F: $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = -\frac{16m}{10s} = -1{,}6\frac{m}{s}$

La partícula se alejó hacia la izquierda del origen

La velocidad media tiene una interpretación geométrica: es la pendiente de la recta que une los puntos final e inicial (tangente del ángulo de inclinación)

$$\text{pendiente} = \tan(\alpha) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \bar{v}$$



## Movimiento en una dimensión

VELOCIDAD INSTANTÁNEA

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} := \frac{dx}{dt}$$

Geométricamente la velocidad instantánea es la pendiente de la recta tangente a la trayectoria en el tiempo $t$ que le corresponda

Ejercicio. Una partícula se mueve de acuerdo a $x(t) = -4\frac{m}{s}t + 2\frac{m}{s^2}t^2$. Cacular la velocidad instantánea en $t = 2{,}5s$.

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

$$x(t+\Delta t) = -4(t+\Delta t) + 2(t+\Delta t)^2 = -4t - 4\Delta t + 2t^2 + 4t\Delta t + 2(\Delta t)^2$$

$$\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t) = \left[-4t - 4\Delta t + 2t^2 + 4t\Delta t + 2(\Delta t)^2\right] - \left[-4t + 2t^2\right] = -4\Delta t + 4t\Delta t + 2(\Delta t)^2$$

$$\boxed{v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (-4 + 4t + 2\Delta t) = -4 + 4t}$$

$$v(t = 2{,}5s) = -4\frac{m}{s} + 4\frac{m}{s^2}(2{,}5s) = 6\frac{m}{s}$$

# Movimiento en una dimensión

Movimiento uniforme $v = \text{constante} = v_0$

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = v_0 \Leftrightarrow x(t+\Delta t) - x(t) = v_0 \Delta t \Leftrightarrow x(t+\Delta t) = x(t) + v_0 \Delta t$$

Es decir la ecuación de la trayectoria como función del tiempo

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0 t,\ x(t=0) = x_0}$$

**¡Una recta con pendiente $v_0$!**

Verificamos:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t))}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x_0 + v_0(t+\Delta t) - (x_0 + v_0 t)}{\Delta t}$$

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_0 \Delta t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} v_0 = v_0$$

## Movimiento en una dimensión

Ejemplo. Una persona se mueve con velocidad constante en linea recta. Un observador activa su cronómetro cuando la persona que corre pasa por un punto determinado y lo detiene cuando el corredor pasa por otro punto situado a 20 metros del anterior. La lectura del cronómetro es de 4,0$s$.

1. ¿Cuál es la velocidad del corredor?
2. Si el corredor continua en movimiento de la misma manera ¿cuál será su posición 10$s$ después?

Respuesta 1

(a) El movimiento es uniforme. $x(t) = x_0 + v_0 t$

(b) Condiciones: en $t = 0$ la posición es el origen de coordenadas: $x(t = 0) = 0$. Entonces $x(t = 0) = x_0 + v_0(0) \Leftrightarrow 0 = x_0$ Por tanto nuestra ecuación queda $x(t) = v_0 t$

(c) Más información: $x(t = 4s) = 20m$ Entonces $x(t = 4) = v_0(4) \Leftrightarrow 20m = 4sv_0 \Rightarrow v_0 = \frac{20m}{4s} = 5\frac{m}{s}$

Respuesta 2.

Del inciso anterior la ecuación adecuada a nuestro problema es $x(t) = 5t$.

La posición 10$s$ después implica que el tiempo transcurrido total $t = 4s + 10s = 14s$

$$x(t = 14s) = (5\frac{m}{s})(14s) = 70m$$

El corredor recorrió 20$m$ en los primeros 4$s$ y 50$m$ en los 10$s$ finales.

El recorrido total fue de 70$m$ desde el origen.

## Movimiento en una dimensión

ACELERACION MEDIA Es el cociente del cambio de velocidad de un objeto en el tiempo transcurrido en que ocurre ese cambio

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} = \frac{v(t_f) - v(t_i)}{t_f - t_i}$$

Ejemplo. Calcule la aceleración media de un automóvil cuya trayectoria sigue la ecuación $v(t) = 40 - 5t^2$ entre $t = 0s$ y $t = 2s$.

$$\bar{a} = \frac{v(t=2) - v(t=0)}{2-0} = \frac{40 - 5(2)^2 - (40 - 5(0)^2)}{2} = -10\frac{m}{s^2}$$

En la gráfica de la ecuación de la velocidad contra tiempo la aceleración media nos da la pendiente de la recta que une los puntos considerados.

## Movimiento en una dimensión

ACELERACIÓN INSTANTÁNEA

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv(t)}{dt}$$

Geométricamente, en una gráfica de velocidad contra tiempo, la aceleración instantánea representa la pendiente de la recta tangente a la curva de velocidad en el punto asociado al tiempo $t$.

# Movimiento en una dimensión

MOVIMIENTO UNIFORMEMENTE ACELERADO: aceleración constante $a(t) = a_0 =$ constante

Ecuación de la velocidad:

OBSERVACIONES:

- En un movimiento con aceleración constante la curva de velocidad como función del tiempo debe tener pendiente constante.
- La única curva con pendiente constante es una recta.

En conclusión, la curva de velocidad de un movimiento con aceleración constante debe tener como ecuación

$$v(t) = v_0 + a_0 t$$

Verificación

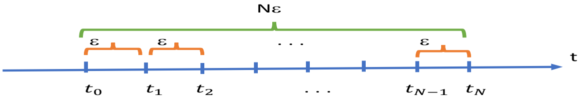
$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_0 + a_0(t+\Delta t) - (v_0 + a_0 t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{a_0 \Delta t}{\Delta t} = a_0$$

¿Cuál es la ecuación para la posición como función del tiempo $x(t)$ para este movimiento uniformemente acelerado?

# Movimiento en una dimensión

**Ecuación para la velocidad en el movimiento con aceleración constante $a(t) = a_0$.**

- $a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$ sugiere particionar $(t_i = 0, t_f)$.




1. $N$ subintervalos
2. Tamaño de cada subintervalo $\epsilon := \frac{t_f - t_i}{N} = \frac{t_f}{N}$
3. $\lim_{\epsilon \to 0, N \to \infty} \epsilon N = t_f - t_i = t_f$
4. Puntos de la partición $t_k = k\epsilon$, $t_0 = t_i = 0$, $t_N = t_f$.

- $v(t_1)$: $a_0 \approx \frac{v(t_1) - v(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{v(t_0 + \epsilon) - v(t_0)}{\epsilon} \Rightarrow v(t_1) \approx v(t_0) + a_0\epsilon$
- $v(t_2)$: $a_0 \approx \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{v(t_1 + \epsilon) - v(t_1)}{\epsilon} \Rightarrow v(t_2) \approx v(t_1) + a_0\epsilon = v(t_0) + a_0(2\epsilon)$
- $v(t_k) \approx v(t_{k-1}) + a_0\epsilon = v(t_0) + a_0(k\epsilon)$
- $v(t_N) \approx v(t_0) + a_0(N\epsilon) \Rightarrow v(t_f) = \lim_{\epsilon \to 0, N \to \infty} [v(t_0) + a_0(N\epsilon)] = v(t_0) + a_0 t_f$, con $N\epsilon = t_f$.
- Cambiando $t_f \to t$ tenemos $\boxed{v(t) = v_0 + a_0 t}$.

# Movimiento en una dimensión

**Ecuación para la posición en el movimiento con aceleración constante $a(t) = a_0$.**

- Usamos $v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$ y la partición de $(t_i = 0, t_f)$.
- $x(t_1)$: $v(t_0) \approx \frac{x(t_1)-x(t_0)}{t_1-t_0} = \frac{x(t_0+\epsilon)-x(t_0)}{\epsilon} \Rightarrow x(t_1) \approx x(t_0) + v(t_0)\epsilon$
- $x(t_2)$: $x(t_2) \approx x(t_1) + \epsilon v(t_1) = x(t_0) + v(t_0)\epsilon + \epsilon[v(t_0) + a_0\epsilon] = x(t_0) + 2v(t_0)\epsilon + a_0\epsilon^2$
- $x(t_3)$: $x(t_3) \approx x(t_2) + v(t_2)\epsilon = x(t_0) + 2v(t_0)\epsilon + a_0\epsilon^2 + \epsilon[v(t_0) + a_0(2\epsilon)] = x(t_0) + 3v(t_0)\epsilon + 3a_0\epsilon^2$
- $x(t_4)$: $x(t_4) \approx x(t_3) + v(t_3)\epsilon = x(t_0) + 3v(t_0)\epsilon + 3a_0\epsilon^2 + \epsilon[v(t_0) + a_0(3\epsilon)] = x(t_0) + 4v(t_0)\epsilon + 6a_0\epsilon^2$
- $x(t_k) \approx x(t_0) + v(t_0)(k\epsilon) + a_0(\frac{k(k-1)}{2}\epsilon^2)$
- $x(t_N) \approx x(t_0) + v(t_0)(N\epsilon) + a_0(\frac{N(N-1)}{2}\epsilon^2) \overset{N \gg 1}{\approx} x(t_0) + v(t_0)(N\epsilon) + \frac{1}{2}a_0(N\epsilon)^2$.
- $\lim_{\epsilon \to 0, N \to \infty} x(t_N) = x(t_f) = x_0 + v_0 t_f + \frac{1}{2}a_0 t_f^2$, con $N\epsilon = t_f$.
- Cambiando $t_f \to t$ tenemos $\boxed{x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a_0 t^2}$.

## Movimiento en una dimensión

Sea

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 \tag{10}$$

Verificación

$$\begin{aligned} v(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x_0 + v_0(t+\Delta t) + \frac{1}{2} a_0 (t+\Delta t)^2 - (x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_0 \Delta t + a_0 t \Delta t + \frac{1}{2} a_0 \Delta t^2}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} (v_0 + a_0 t + \frac{1}{2} a_0 \Delta t) \\ &= v_0 + a_0 t \end{aligned} \tag{11}$$

(Opcional ) La alternativa del cálculo integral:

$$x(t) - x_0 = \int_0^t dt' \frac{dx(t')}{dt'} = \int_0^t dt' v(t') = \int_0^t dt' (v_0 + a_0 t') = v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 \tag{12}$$

# Movimiento en una dimensión

**Movimiento uniformemente acelerado**

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 \quad (13)$$

$$v(t) = v_0 + a_0 t \quad (14)$$

$$a(t) = a_0 \quad (15)$$

Reexpresar (30) en forma canónica

$$x - (x_0 - \frac{v_0^2}{2a_0}) = \frac{a_0}{2}(t - \frac{v_0}{a_0})^2 \quad (16)$$

Comparando con la ecuación $(y - y_1)^2 = 4p(x - x_1)$ con vértice $(x_1, y_1)$

Caso particular: $x_0 = 0, v_0 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} a_0 t^2$ vértice en el origen, eje sobre el eje $x$, se abre hacia el eje $x$ positivo siempre que $a_0 > 0$.

## Movimiento en una dimensión

**Movimiento uniforme**

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x_0 + v_0 t && (17)\\
v(t) &= v_0 && (18)\\
a(t) &= 0 && (19)
\end{aligned}
$$

# Movimiento en una dimensión

**Caída libre**

- Soltar un objeto a partir del reposo $v_{y0} = 0$.
- Los cuerpos caen con una aceleración de $g = 9{,}8\,\frac{m}{s^2}$ cuando estamos en la superficie de la Tierra.
- Despreciamos los efectos de resistencia (opsición) con el aire.

¡La caída libre es un caso de movimiento uniformemente acelerado en la dirección vertical!

$$y(t) = y_0 - \frac{1}{2}gt^2 \tag{20}$$

$$v_y(t) = -gt \tag{21}$$

$$a(t) = -g \tag{22}$$

## Movimiento en una dimensión

Ejercicio: Un objeto se deja caer desde el reposo a una altura de $3m$ hacia el piso. Despreciando la resistencia del aire calcule el tiempo que tardará el objeto en tocar el suelo.

Altura inicial: $y_0 = 3m$. Sea $t_c$ el tiempo transcurrido durante la caída: desde que soltamos el objeto hasta que toca el piso. Las ecuaciones de caída libre evuladas en $t = t_c$ son:

$$\begin{aligned} y(t_c) &= y_0 - \frac{1}{2}gt_c^2 && (23) \\ v_y(t_c) &= -gt_c && (24) \\ a(t_c) &= -g && (25) \end{aligned}$$

Cuando ha transcurrido el tiempo de caída la posición vertical $y(t_c) = 0$.

$$0 = y_0 - \frac{1}{2}gt_c^2 \Rightarrow \frac{1}{2}gt_c^2 = y_0 \Rightarrow t_c^2 = \frac{2y_0}{g} \Rightarrow t_c = \sqrt{\frac{2y_0}{g}} \Rightarrow t_c = \sqrt{\frac{2(3m)}{9{,}8\,\frac{m}{s^2}}} = 0{,}78s \qquad (26)$$

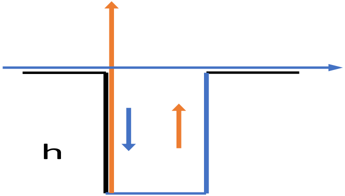
Otros resultados: La velocidad de llegada al piso

$v_y(t_c) = -g(\sqrt{\frac{2y_0}{g}}) = -\sqrt{\frac{g^2 2y_0}{g}} = -\sqrt{2gy_0} = -\sqrt{2(3m)(9{,}8\,\frac{m}{s^2})} = -7{,}67\,\frac{m}{s}$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo

## Movimiento en una dimensión

Ejercicio. Una moneda se deja caer en el interior de un pozo seco. Después de 3 segundos la persona escucha el sonido del impacto de la moneda con el fondo del pozo. ¿Cuál es la profundidad del pozo? La velocidad del sonido es de $343 \frac{m}{s}$.




IDEA FISICA: (1) La moneda realiza un movimiento en caída libre. (2) El sonido realiza mov. uniforme. (1):

$$
\begin{aligned}
y(t) &= y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 && (27)\\
v(t) &= v_0 - gt && (28)\\
a(t) &= -g && (29)
\end{aligned}
$$

## Movimiento en una dimensión

La moneda se deja caer: $v_0 = 0$. Posición inicial $y_0 = 0$. Con estos datos iniciales nuestras ecuaciones:

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \quad (30)$$

$$v(t) = -gt \quad (31)$$

$$a(t) = -g \quad (32)$$

No sabemos el tiempo de caída de la moneda $t_c$ ni el tiempo de subida del sonido $t_s$. Sólo sabemos $t_c + t_s = 3s$.

Para el tiempo de caída $y(t_c) = -h$

$$-h = -\frac{1}{2}gt_c^2 \quad (33)$$

$$v(t_c) = -gt_c \quad (34)$$

$$a(t_c) = -g \quad (35)$$

(2) Para el sonido: Un observador en el fondo del pozo inicia su cronómetro en $t = 0$. $y_s(0) = -h$

$$y_s(t) = -h + v_{0s}t \quad (36)$$

$$v_s(t) = v_{0s} \quad (37)$$

$$a_s(t) = 0 \quad (38)$$

## Movimiento en una dimensión

El sonido llega al borde exterior del pozo después de un tiempo $t_s$ medido desde el punto de contacto de la moneda con el piso: $y_s(t_s) = 0$

$$0 = -h + v_{0s} t_s \tag{39}$$
$$v_s(t) = v_{0s} \tag{40}$$
$$a_s(t) = 0 \tag{41}$$

Tenemos que resolver

$$-h = -\frac{1}{2} g t_c^2 \qquad \text{Moneda} \tag{42}$$
$$t_c + t_s = 3 \tag{43}$$
$$0 = -h + v_{0s} t_s \qquad \text{Sonido} \tag{44}$$

# Movimiento en una dimensión

Solución:

$$t_s = 3 - t_c \quad (45)$$

$$0 = -h + v_{0s}(3 - t_c) \quad (46)$$

ax

$\Rightarrow t_c = 3 - \frac{h}{v_{0s}},\ t_c^2 - \frac{2h}{g} = 0, \Rightarrow (3 - \frac{h}{v_{0s}})^2 - \frac{2h}{g} = 0, \Rightarrow \frac{h^2}{v_{0s}^2} - 6\frac{h}{v_{0s}} + 9 - \frac{2h}{g} = 0$

$\Rightarrow h^2 - (6v_{0s} + 2\frac{v_{0s}^2}{g})h + 9v_{0s}^2 = 0$

Solución de ecuaciones cuadráticas: $Ax^2 + Bx + C = 0$ las soluciones son $x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$

$A = 1,\ B = -(6 + \frac{2v_{0s}}{g})v_{0s},\ C = 9v_{0s}^2$

# Movimiento en una dimensión

$$
\begin{aligned}
h &= \frac{(6+\frac{2v_{0s}}{g})v_{0s} \pm \sqrt{(6+\frac{2v_{0s}}{g})^2 v_{0s}^2 - 4(9v_{0s}^2)}}{2} \\
&= \frac{(6+\frac{2v_{0s}}{g})v_{0s} \pm \sqrt{\left[(6+\frac{2v_{0s}}{g})^2 - 4(9)\right] v_{0s}^2}}{2} \\
&= \frac{(6+\frac{2v_{0s}}{g})v_{0s} \pm v_{0s}\sqrt{\left[(6+\frac{2v_{0s}}{g})^2 - 4(9)\right]}}{2} \\
&= \frac{(6+\frac{2v_{0s}}{g})v_{0s} \pm v_{0s}\sqrt{\left[\frac{24v_{0s}}{g} + \frac{4v_{0s}^2}{g^2}\right]}}{2} \\
&= \frac{(6+70)343 \pm (343)\sqrt{12(70)+(70)^2}}{2} = 26027m, 40{,}68m \qquad (47)
\end{aligned}
$$

Hemos usado $\frac{2v_{0s}}{g} = \frac{2(343\,\frac{m}{s})}{9{,}8\,\frac{m}{s^2}} = 70s$. Sólo la solución $h = 40{,}68m$ es consistente con el tiempo total de $3s$. Con los valores de altura se puede calcular el tiempo de caída de la moneda y el tiempo de subida del sonido. Con estos valores se verifica que $h = 26027m$ no corresponde a los $3s$.

# Escalares y vectores

**Magnitudes físicas:** Son cantidades de interés para describir sistemas físicos y su comportamiento. Tienen valores numéricos y unidades.

**Magnitudes escalares:** Sólo requieren un valor numérico y unidades para especificarse. Ejemplos: Temperatura ($25C$), Masa ($5kg$)m, Tiempo ($3h$), Carga eléctrica (10 $C$), Coulomb

**Magnitudes vectoriales:** Requieren para su especificación un valor numérico, unidades, y una dirección. Se los denomina **vectores**. Ejemplos:

- Desplazamiento $\Delta\vec{r}$, Magnitud 5, unidades $m$ (metros) dirección $45^o$ respecto de la horizontal
- Velocidad $\vec{v}$, magnitud 100, unidades $\frac{m}{s}$, dirección *Oeste*
- Aceleración $\vec{a}$, magnitud 9.8, unidades $\frac{m}{s^2}$, dirección *hacia el centro de la Tierra*
- Fuerza $\vec{F}$ , magnitud 15 , unidades $N$ (Newtons), dirección *vertical hacia arriba*
- Campo eléctrico $\vec{E}$, magnitud 10, $\frac{N}{C}$, $C$ Coulomb , dirección *horizontal*

# Escalares y vectores

**Vectores en un plano $\mathbb{R}^2$**

**Coordenadas polares y coordenadas cartesianas**

La ubicación de un punto en coordenadas cartesianas en un plano $(x, y)$

La ubicación de un punto en el plano en coordenadas polares $(r, \theta)$, $x = rcos\theta$, $y = rsen\theta$ y cumplen $\theta = arctan(\frac{y}{x})$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ejemplo: Determinar las coordenadas polares de un punto cuyas coordenadas cartesianas son (4,4).

$x = 4, y = 4.$

$tan\theta = \frac{4}{4} = 1 \Rightarrow \theta = 45^o$

$r = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32}$

## Escalares y vectores

### PROPIEDADES DE VECTORES

1. Dos vectores son iguales si tienen la misma magnitud y apuntan en la misma dirección. Se suele denotar la magnitude del vector $\vec{A}$ usando un símbolo de valor absoluto $|\vec{A}|$. Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tienen magnitudes iguales $|\vec{A}| = |\vec{B}|$ y si apuntan en la misma dirección entonces los vectores iguales $\vec{A} = \vec{B}$.
2. La representación gráfica de los vectores es usando flechas con longitud proporcional a su magnitud y apuntando en la dirección específica del vector.
3. Adición de vectores (método gráfico). Para sumar $\vec{A}$ y $\vec{B}$ dibujamos uno partiendo del origen en el plano y apuntando en la dirección que le corresponde, después dibujamos el segundo vector a partir de la punta de flecha del primero y apuntando en la dirección que le corresponda. El vector suma $\vec{A} + \vec{B}$ se obtiene dibujando una flecha que inicia en el origen del primer vector y termina en la punta de flecha del segundo vector. La magnitud del vector **resultante** está dado por la longitud de la flecha y la dirección por el ángulo que forma con el eje $x$.
4. $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$
5. $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$
6. (Inverso aditivo) Negativo de un vector $-\vec{A}$ es una flecha cuyo dirección es la opuesta del vecto original $\vec{A}$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA Casa abierta al tiempo

## Escalares y vectores

**PROPIEDADES DE VECTORES**

- Resta de vectores: $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$
- Multiplicación de un vector por un escalar. Multiplicamos al vector $\vec{A}$ por un número real $r > 0$ y obtenemos un vector de magnitud distinta pero en la misma dirección $r\vec{A}$. Si multiplicamos por 5 al vector $\vec{A}$ el vector obtenido tendrá un tamaño 5 veces más grande que $\vec{A}$ pero apuntará en la misma dirección.

# Escalares y vectores

**Componentes de vectores y vectores unitarios**

**Componentes cartesianas**.

$cos\theta = \frac{A_x}{A}$

$A_x = Acos\theta,\ A = |\vec{A}|,$

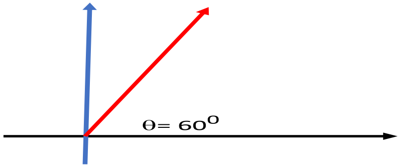
$sen\theta = \frac{A_y}{A}$

$A_y = Asen\theta$

$\boxed{A_x = Acos\theta,\ A_y = Asen\theta}$

$\boxed{A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}, tan\theta = \frac{A_y}{A_x}}$

Ejercicio. Un vector de magnitud $20m$ apunta en la dirección $\theta = 60^0$ con respecto al eje $x$. Calcule las componentes cartesianas del vector. $A_x = 20mcos(60) = 10m$, $A_y = 20msen(60) = 17{,}3m$



## Escalares y vectores

A$= \sqrt{(10)^2 + (17{,}3)^2} = 19{,}98 \approx 20$

$tan\theta = \frac{17{,}3}{10} = 0{,}173 \Rightarrow arctan(0{,}173) = 59{,}99 \approx 60$

## Escalares y vectores

### Vectores unitarios

Sea un vector $\vec{V}$ con magnitud $V = |\vec{V}|$, definimos el $\boxed{\text{VECTOR UNITARIO } \hat{V} = \frac{1}{V}\vec{V}}$.

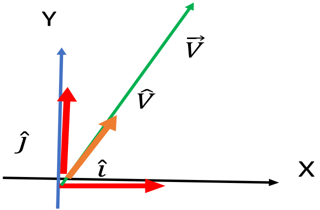
Sea $\vec{V}$ que tiene magnitud 10: $|\vec{V}| = 10$ y dirección $\theta = 45^0$.

El vector unitario $\hat{V}$ tiene magnitud 1: $|\hat{V}| = 1$ y la misma dirección que $\vec{V}$ $\theta = 45^0$.

Vector unitarios especiales:

$\boxed{\hat{\imath} \text{ tiene magnitud 1 y dirección hacia la parte positiva del eje } x}$

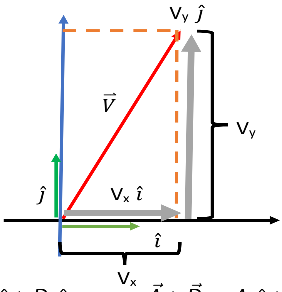
$\boxed{\hat{\jmath} \text{ tiene magnitud 1 y dirección hacia la parte positiva del eje } y}$



## Escalares y vectores

Un vector $\vec{V}$ de componentes cartesianas $V_x, V_y$ puede expresarse en términos de los vectores unitarios $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$.

Se obtiene como el resultado de sumar dos vectores: $V_x\hat{\imath}$ y $V_y\hat{\jmath}$ es decir, $\boxed{\vec{V} = V_x\hat{\imath} + V_y\hat{\jmath}.}$




Consecuencias importantes:

- $\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath}, \quad \vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} \quad \Rightarrow \quad \vec{A} + \vec{B} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} = (A_x + B_x)\hat{\imath} + (A_y + B_y)\hat{\jmath}$

  $\boxed{\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\hat{\imath} + (A_y + B_y)\hat{\jmath}}$ ¡Suma de vectores = suma de componentes!

## Escalares y vectores

Ejemplo. Sean dos vectores $\vec{A} = 3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}$, $\vec{B} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$. Calcule el vector suma $\vec{A} + \vec{B}$.
Opción 1: $\vec{A} + \vec{B} = 3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} + \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} = 4\hat{\imath} + 7\hat{\jmath}$
Opción 2: $\vec{A} + \vec{B} =$ (suma de componentes x)$\hat{\imath} +$ (suma de componentes y)$\hat{\jmath} = 4\hat{\imath} + 7\hat{\jmath}$

Ejemplo. El vector $\vec{A}$ tiene magnitud 5 y dirección $\theta_A = 70^0$. El vector $\vec{B}$ tiene magnitud 8 y dirección $\theta_B = 30^\circ$. (i) Calcule las componentes cartesianas del vector suma $\vec{A} + \vec{B}$. (ii) Calcule la magnitud y dirección de $\vec{A} + \vec{B}$.
(i) Dado que no tenemos las componentes cartesianas de los vectores ese será nuestro primer paso para poder sumar los vectores.
Componentes: $A_x = 5cos(70), A_y = 5sen(70)$, $B_x = 8cos(30), B_y = 8sen(30)$.
$\vec{A} + \vec{B} = [5cos(70) + 8cos(30)]\hat{\imath} + [5sen(70) + 8sen(30)]\hat{\jmath}$
Si denominamos $\vec{C}$ al vector suma $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$:

$$\boxed{C_x = 5cos(70) + 8cos(30)\ ,\ C_y = 5sen(70) + 8sen(30)}$$

# Escalares y vectores

(ii) $C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2}$, $tan\theta_C = \frac{C_y}{C_x}$:

$C = \sqrt{[5cos(70) + 8cos(30)]^2 + [5sen(70) + 8sen(30)]^2} = 12{,}25$

$tan\theta_C = \frac{5sen(70)+8sen(30)}{5cos(70)+8cos(30)} = 1, \theta_C = 45^0$

Ejercicio.

Dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tienen la misma magnitud. Para que la magnitud de $\vec{A} + \vec{B}$ sea 100 veces mayor que la magnitud de $\vec{A} - \vec{B}$ ¿Cuál debe ser al ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$?

Respuesta: Sea $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$, $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$. $\vec{A} : A, \theta_A$, $\vec{B} : B = A, \theta_B$.

Condición $C = 10^2 D$.

Incógnita $\Delta = \theta_B - \theta_A$.

Sugerencia: Teo. del coseno $C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\, cos\alpha$ (Suma). $D^2 = A^2 + B^2 - 2AB\, cos\Delta$ (Resta)

Desarrollo: $A = B$, $C^2 = 2A^2(1 + cos\Delta)$, $D^2 = 2A^2(1 - cos\Delta)$

$\Rightarrow \frac{C^2}{2A^2} = 1 + cos\Delta$, $\frac{D^2}{2A^2} = 1 - cos\Delta$, ELIMINANDO $A^2$: $cos\Delta = \frac{C^2 - D^2}{C^2 + D^2} \Rightarrow cos\Delta = \frac{10^4 - 1}{10^4 + 1} = 0{,}9998$

$\Rightarrow \boxed{\Delta = arccos(0{,}9998) = 1{,}14^\circ.}$

Elementos previos: Teorema del coseno. Angulos formados entre paralelas cortadas por una secante. Funciones trigonométricas de ángulos notables $(45^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ)$. Suma y diferencia de ángulos.

# Escalares y vectores

**Proyección de un vector sobre otro. Producto escalar entre vectores.**

Para proyectar un vector $\vec{A}$ sobre el vector $\vec{B}$ usamos el ángulo entre los vectores: $P_{AB} = Acos\alpha$.

Para el caso de los vectores base: $P_{A\hat{\imath}} = Acos\alpha = A_x$, $P_{A\hat{\jmath}} = Asen\alpha = A_y$

Producto escalar entre vectores (Producto punto): $\vec{A} \bullet \vec{B} = ABcos\alpha$, con $\alpha$ el ángulo entre los vectores.

Observación: El producto escalar de dos vectores contiene la proyección de un vector sobre el otro.

Producto escalar con los vectores base:

$\vec{A} \bullet \hat{\imath} = A(1)cos\theta_A = A_x$,

$\vec{A} \bullet \hat{\jmath} = A(1)cos(90^\circ - \theta_A) = Asen\theta_A = A_y$

También

$\hat{\imath} \bullet \hat{\imath} = (1)(1)cos(0) = 1$

$\hat{\imath} \bullet \hat{\jmath} = (1)(1)cos(90^\circ) = 0$

$\hat{\jmath} \bullet \hat{\jmath} = 1$

$\hat{\jmath} \bullet \hat{\imath} = 0$

$\vec{A} \bullet \vec{B} = (A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath}) \bullet (B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath}) = A_xB_x\hat{\imath} \bullet \hat{\imath} + A_xB_y\hat{\imath} \bullet \hat{\jmath} + A_yB_x\hat{\jmath} \bullet \hat{\imath} + A_yB_y\hat{\jmath} \bullet \hat{\jmath} = A_xB_x + A_yB_y$

También: $ABcos\alpha = A_xB_x + A_yB_y \Rightarrow cos\alpha = \frac{A_xB_x + A_yB_y}{AB}$, $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$, $B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}$.

Ejercicio. Calcule el ángulo entre los vectores $\vec{A} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$ y $\vec{B} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath}$.

# Escalares y vectores

En la figura se muestran tres vectores de desplazamiento que efectúa una pelota de croquet. $|\vec{A}| = 20$, $|\vec{B}| = 40$ y $|\vec{C}| = 30$. (a) Determine el desplazamiento resultante en términos de vectores unitarios y (b) la magnitud y dirección del desplazamiento resultante.

$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$

$R_x = A_x + B_x + C_x$ , $R_y = A_y + B_y + C_y$

Con vectores unitarios $\vec{R} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + C_x\hat{\imath} + C_y\hat{\jmath}$

# Equilibrio y primera ley de Newton

**Fuerza , Primera ley de Newton, Masa inercial.**

- **Fuerza:**

  Cantidad vectorial que determina la interacción de un sistema con su entorno ($\vec{F}$, Newtons: N).

- **Marco de Referencia Inercial (MRI):**

  Objeto con respecto al cual otro libre de fuerzas se mueve con velocidad constante (Reposo $\vec{v} = \vec{0}$).

- **Primera ley de Newton**

  En un MRI un objeto libre de fuerzas permanece en reposo o se mueve con velocidad constante.

- **Masa inercial**

  Propiedad de todo cuerpo que cuantifica su oposición a modificar su movimiento ($m$, $kg$).

Observación: La primera ley de Newton esencialmente define los MRI.

# Equilibrio y primera ley de Newton

Equilibrio estático: Fuerza externa neta cero

$$\vec{F}^{ext}_{Neta} = \vec{F}^{ext}_{1} + \vec{F}^{ext}_{2} + \cdots + \vec{F}^{ext}_{N} = \vec{0}$$

Ejemplo. Lámpara que cuelga del techo en una casa.

$\vec{F}^{ext}_{1} = T\hat{\jmath}$ Tensión

$\vec{F}^{ext}_{2} = -W\hat{\jmath}$ Peso

Equilibrio:

$$\vec{F}^{ext}_{Neta} = \vec{F}^{ext}_{1} + \vec{F}^{ext}_{2} = T\hat{\jmath} - W\hat{\jmath} = (T - W)\hat{\jmath} = \vec{0}$$

$$T - F_g = 0 \Rightarrow \boxed{T = W}$$

## Equilibrio y primera ley de Newton

Ejemplo. Semáforo con tres cables. Los cables superiores soportan un máximo de $100N$ de tensión.

$$\begin{aligned} -T_1 cos37 + T_2 cos53 &= 0 && (48)\\ T_1 sen37 + T_2 sen53 - W &= 0 && (49) \end{aligned}$$

$$T_1 = T_2 \frac{cos53}{cos37} \qquad (50)$$

$$T_2 \frac{cos53}{cos37} sen37 + T_2 sen53 - W = 0 \qquad (51)$$

$$\begin{aligned} T_1 &= T_2 \frac{cos53}{cos37} && (52)\\ T_2 \left(cos53tan37 + sen53\right) - W &= 0 && (53) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_1 &= T_2 \frac{cos53}{cos37} = \left(\frac{W}{cos53tan37 + sen53}\right) \frac{cos53}{cos37} = 73{,}4N && (54)\\ T_2 &= \frac{W}{cos53tan37 + sen53} = \frac{122N}{cos53tan37 + sen53} = 97{,}4N && (55) \end{aligned}$$

# Equilibrio y primera ley de Newton

Ejemplo. Se ejerce una fuerza de 150N presionando un libro con peso $W = 20N$ y que yace sobre una mesa. Discuta el estado de equilibrio estático indicando las fuerzas presentes incluyendo sus magnitudes y direcciones.

Ejemplo. Se tiene un bloque sostenido por una cuerda sobre un plano inclinado. El bloque tiene un peso de $50N$ y el plano inclinado forma un ángulo de $30^\circ$ con la horizontal. Determine la tensión en la cuerda.

## Movimiento relativo

Transformaciones de Galileo

$$\begin{aligned} t &= t' \\ x(t) &= x'(t) + R(t) \\ v(t) &= v'(t) + V \\ a(t) &= a'(t) \end{aligned} \tag{56}$$

Ejemplo. Una banda de transporte horizontal se mueve con velocidad $10\frac{m}{s}$. Una persona puede desplazarse con velocidad de $5\frac{m}{s}$. Si quiere recorrer una distancia de $100m$ ¿Cuánto tiempo le toma ir por el piso? ¿Cuánto tiempo le toma ir por la banda?

PISO: $x(t) = x_0 + vt$, $x_0 = 0, v = 5\frac{m}{s}$. $x(t) = 100m \Rightarrow \boxed{t = \frac{d}{v} = \frac{100m}{5\frac{m}{s}} = 20s}$

BANDA: $v = v' + V = 5\frac{m}{s} + 10\frac{m}{s} = 15\frac{m}{s} \Rightarrow \boxed{t = \frac{100m}{15\frac{m}{s}} = 6{,}66s}$

# Segunda ley de Newton

**Segunda ley de Newton**

En un marco de referencia inercial, la aceleración que experimenta un objeto de masa constante es directamente proporcional a la fuerza neta que actúa sobre él e inversamente proporcional a su masa

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{a} = \frac{\vec{F}_{Neta}}{m} \Leftrightarrow \vec{F}_{Neta} = m\vec{a} \qquad (57) \\ \vec{F}_{Neta} = \sum_i \vec{F}_i \qquad (58) \end{aligned}}$$

- 1D:

$$\boxed{\sum_i F_{i,x} = ma_x} \qquad (59)$$

- 2D:

$$\boxed{\begin{aligned} \sum_i F_{i,x} = ma_x \qquad (60) \\ \sum_i F_{i,y} = ma_y \qquad (61) \end{aligned}}$$

- 3D ...

## Segunda ley de Newton

Ejemplo. Una persona jala una plataforma con una fuerza de $200N$. La masa de la plataforma es $500kg$. Calcule la aceleración de la plataforma provocada por la persona.

Peso y masa. El peso es la fuerza que la Tierra ejerce sobre los cuerpos a su alrededor. En buena aproximación los cuerpos que caen cerca de la superficie de la Tierra aceleran con $g = 9{,}8\frac{m}{s^2}$ aproximadamente constante. Entonces el peso y la masa se relacionan de la siguiente manera:

$$\vec{W} = -W\hat{\jmath} \tag{62}$$

$$\vec{W} = -mg\hat{\jmath} \qquad \text{2da Ley de Newton} \tag{63}$$

$$W = mg \tag{64}$$

## Segunda ley de Newton

- Ejemplo. Un automóvil resbala sobre una pista congelada inclinada por un ángulo de $\theta$ respecto a la horizontal. Calcule la aceleración del vehículo.
- Ejemplo. Una polea sin fricción permite deslizar una cuerda ligera e inextensible. Dos bloques de masas $m_1 = 3kg$ y $m_2 = 5kg$ unidos por la cuerda se sueltan a partir del reposo como se indica en la figura. Calcule la aceleración de los bloques.
- Ejemplo. Dos bloques de masas $m_1$ y $m_2$ están unidos por una cuerda ligera e inextensible. El primero yace sobre un plano horizontal sin fricción y el segundo cuelga de la cuerda a través de una polea. El sistema parte del reposo y empieza a moverse. Calcule la tensión en la cuerda y aceleración del movimiento.

# Segunda ley de Newton

**Fuerza neta cero** $\vec{F}_{neta} = 0$

2da ley de Newton: $\vec{a} = \frac{\vec{F}_{neta}}{m} = \vec{0} \Rightarrow$ ¡Movimiento unforme! $\vec{v}$ constante en magnitud y dirección.
Dos casos:

- $\vec{v} = \vec{0}$ sistema en reposo. Ejemplo: un bloque en reposo que yace sobre una mesa.
- $\vec{v}$ magnitud $v$ constante y dirección constante: movimiento uniforme.

Ejemplo del segundo caso. Un bloque puede deslizarse sobre el piso y que presenta fricción con éste. Un apersona tira del bloque con una fuerza de la misma magnitud que la fricción pero en dirección opuesta.

## Segunda ley de Newton

**Movimiento de proyectiles = tiro parabólico**

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_{0x}t \\ y(t) &= y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}} \qquad \begin{aligned}(65)\\(66)\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} v_x(t) &= v_{0x} \\ v_y(t) &= v_{0y} - gt \end{aligned}} \qquad \begin{aligned}(67)\\(68)\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_x(t) &= 0 \\ a_y(t) &= -g \end{aligned}} \qquad \begin{aligned}(69)\\(70)\end{aligned}$$

$v_{0x} = v_0 cos\theta_0$, $v_{0y} = v_0 sen\theta_0$, mientras que $g = 9{,}8\,\frac{m}{s^2}$

# Segunda ley de Newton

Ejemplo. Un proyectil se lanza desde una altura de $5m$ desde el piso con un ángulo de $60^\circ$ respecto de la horizontal. La velocidad inicial del proyectil es de $60\frac{m}{s}$. Calcule:

1. La altura máxima que alcanza el proyectil.
2. La distancia horizontal máxima recorrida por el proyectil (alcance).
3. El tiempo de vuelo que el proyectil pasa en el aire.
4. Graficar las componentes del vector de posición como función del tiempo.
5. Grafique la trayectoria del proyectil usando los datos del inciso anterior.
6. Graficar las componentes del vector de velocidad como función del tiempo.
7. Graficar las componentes del vector de aceleración como función del tiempo.

## Segunda ley de Newton

**Altura máxima**: En el punto más alto de la trayectoria del proyectil la componente vertical de la velocidad se anula pues no sube más

$v_y(t_s) = 0 \Rightarrow v_{0y} - gt_s = 0 \Leftrightarrow t_s = \frac{v_{0y}}{g}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y(t_s) &= y_0 + v_{0y} t_s - \frac{1}{2} g t_s^2 \\ &= y_0 + v_{0y}\left(\frac{v_{0y}}{g}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_{0y}}{g}\right)^2 \\ &= y_0 + \frac{1}{2}\frac{v_{0y}^2}{g} \end{aligned} \tag{71}$$

## Segunda ley de Newton

**Tiempo de vuelo:** $y(t_v) = 0 \Rightarrow y_0 + v_{0y} t_v - \frac{1}{2} g t_v^2 = 0 [Ax^2 + Bx + C = 0, x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}]$

$$t_v = -\frac{-v_{0y} \pm \sqrt{v_{0y}^2 + 2gy_0}}{g} \quad (72)$$

$$= \frac{v_{0y}}{g} \mp \sqrt{\frac{2y_0}{g} + \frac{v_{0y}^2}{g^2}} \quad (73)$$

$$= \frac{v_{0y}}{g} + \sqrt{\frac{2y_0}{g} + \frac{2v_{0y}^2}{g^2}} \quad (74)$$

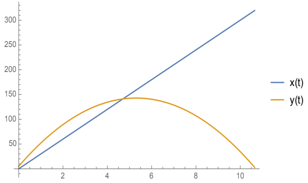
Se elige signo $+$ porque ese caso se reduce correctamente al tiempo de vuelo con $y_0 = 0$. El signo $-$ da un valor 0 que indica tiempo de despegue.

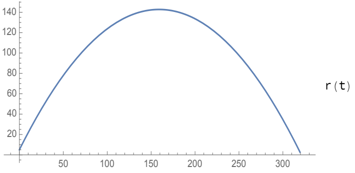
**Alcance:** $R = x(t_v) - x_0$

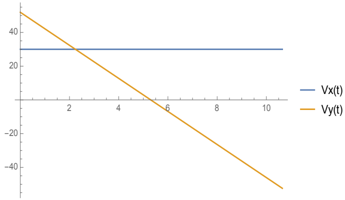
$$x(t_v) = x_0 + v_{0x} \left( \frac{v_{0y}}{g} + \sqrt{\frac{2y_0}{g} + \frac{v_{0y}^2}{g^2}} \right) \quad (75)$$

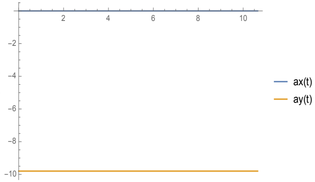
# Segunda ley de Newton

**Tiro parabólico: coordenadas, trayectoria, componentes de velocidad, componentes de aceleración**



## Segunda ley de Newton

Ecuación de la trayectoria

$$
\begin{aligned}
y(t) &= y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \\
&= y_0 + v_{0y}\frac{(x-x_0)}{v_{0x}} - \frac{1}{2}g\frac{(x-x_0)}{v_{0x}^2}^2 \\
&= y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x_0 - \frac{1}{2}\frac{g}{v_{0x}^2}\left[x^2 - 2xx_0 + x_0^2\right] \\
&= -\frac{1}{2}\frac{g}{v_{0x}^2}x^2 + \left[\frac{v_{0y}}{v_{0x}} + \frac{gx_0}{v_{0x}^2}\right]x + y_0 - \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x_0 - \frac{1}{2}\frac{gx_0^2}{v_{0x}^2} \quad \text{¡Parábola!} \qquad (76)
\end{aligned}
$$

Ejercicio: Reescriba la ecuación anterior en la forma $(y-A) = B(x-C)^2$ y grafiquela con los datos del problema.

# Tercera ley de Newton

Si dos objetos interactúan, la fuerza $\vec{F}_{12}$ que ejerce el cuerpo 1 sobre el cuerpo 2 es igual en magnitud que la fuerza $\vec{F}_{21}$ que ejerce el cuerpo 2 sobre el 1 pero en dirección opuesta:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \tag{77}$$

Una cualquiera de las fuerza se denomina la “acciónz la otra la “reacción”.

# Trabajo y energía cinética

- Trabajo realizado por una fuerza constante: $W_F = \vec{F} \bullet \Delta\vec{r} = F\Delta r\cos\theta$, con $\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i$ el desplazamiento y $\theta$ el ángulo entre los vectores $\vec{F}$ y $\Delta\vec{r}$. Unidades de trabajo $N \cdot m = Joule$.
- Potencia asociada con la fuerza $\vec{F}$: El trabajo realizado por unidad de tiempo: $P_F = \frac{W_F}{\Delta t}$. Unidades de potencia $\frac{Joule}{s} = Watt$.
- Teorema de trabajo energía cinética. (i) Trabajo realizado por la fuerza neta sobre un cuerpo: $W_{neto} = \vec{F}_{neta} \bullet \Delta\vec{r}$. (ii) 2da ley de Newton $\vec{F}_{neta} = m\vec{a}$. (iii) $\vec{F}_{neta}$ constante implica aceleración $\vec{a}$ constante dando lugar a movimiento rectilíneo. En este caso para la dirección de movimiento, digamos $x$, podemos eliminar tiempo en las ecuaciones $x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}at^2$ y $v_x = v_{x0} + at$, dando lugar a $a = \frac{v_{xf}^2 - v_{x0}^2}{2\Delta x}$. De este modo $\boxed{W_{neto} = \frac{mv_{xf}^2}{2} - \frac{mv_{x0}^2}{2} = K_f - K_0, \text{ con } K = \frac{mv_x^2}{2}}$ la energía cinética.

# Energía potencial y fuerzas conservativas

- Trabajo realizado por la fuerza gravitacional: Cuerpo en caída libre. Fuerza gravitacional constante.

$$\begin{aligned} W_g &= \vec{W} \bullet \Delta \vec{r} \\ &= (-mg\hat{\jmath}) \bullet ((y_f - y_0)\hat{\jmath}) \\ &= -(mgy_f - mgy_0) \\ &= -(U_{gf} - U_{g0}). \end{aligned} \tag{78}$$

El trabajo realizado por la fuerza gravitacional sólo depende de los puntos final e inicial.

| Energía potencial gravitacional: $U_g = mgy$. Trabajo $W_g = -\Delta U_g$. Fuerza de gravedad conservativa. |
|---|

## Energía potencial y fuerzas conservativas

- Trabajo realizado por fuerza restitutiva de resorte: Ley de Hooke $\vec{F}_s = -kx\,\hat{\imath}$. Fuerza variable.

$$
\begin{aligned}
W_s &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{sn}\bullet\Delta\vec{r}_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(-kx_i\,\hat{\imath})\bullet((x_{i+1}-x_i)\hat{\imath}) \\
&= -\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}kx_i(x_{i+1}-x_i) = -k\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(x_0 + i\frac{x_f-x_0}{n}\right)\left(\frac{x_f-x_0}{n}\right) \\
&= -k\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_0(x_f-x_0)}{n} + i\frac{(x_f-x_0)^2}{n^2}\right) = -k\lim_{n\to\infty}\left(n\frac{x_0(x_f-x_0)}{n} + \frac{n(n+1)}{2}\frac{(x_f-x_0)^2}{n^2}\right) \\
&= -k\left(x_0(x_f-x_0) + \frac{1}{2}(x_f-x_0)^2\right) = -\left(\frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_0^2\right) = -(U_{sf}-U_{s0}) \qquad (79)
\end{aligned}
$$

El trabajo realizado por la fuerza del resorte sólo depende de los puntos final e inicial.

$\boxed{\text{Energía potencial del resorte: } U_s = \tfrac{1}{2}kx^2\text{. Trabajo } W_s = -\Delta U_s\text{. Fuerza del resorte conservativa.}}$

## Conservación de energía

**Teorema de trabajo y energía cinética, fuerzas conservativas y no conservativas**

- El trabajo neto $W_{neto} = \Delta K$, con $W_{neto} = W_g + W_s + W_1 + \cdots + W_n$ y $\vec{F}_{neta} = \vec{W} + \vec{F}_s + \vec{F}_1 + \cdots + \vec{F}_n$, con $\vec{F}_1, \ldots, \vec{F}_n$ no conservativas.
- Usando $W_g = -\Delta U_g$, $W_s = -\Delta U_s$ tenemos $W_1 + \cdots + W_n = \Delta U_g + \Delta U_s + \Delta K = \Delta E$, $E = U_g + U_s + K$ energía mecánica.
- En ausencia de fuerzas no conservativas $W_1 = \cdots = W_n = 0$ tenemos $\Delta E = 0 \Rightarrow E_f = E_0$ la energía mecánica se conserva en ausencia de fuerzas no conservativas, como la fricción.