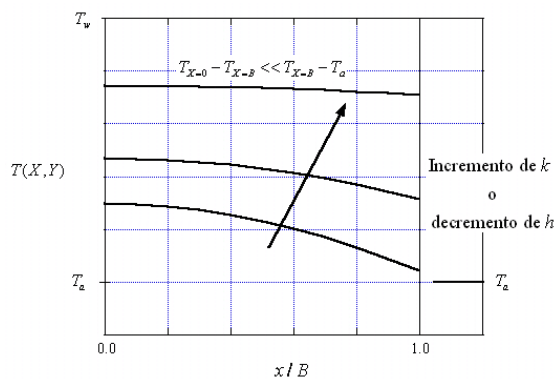
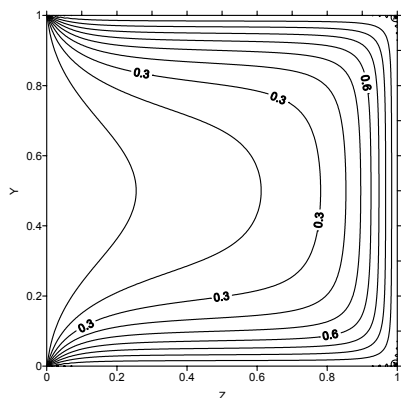
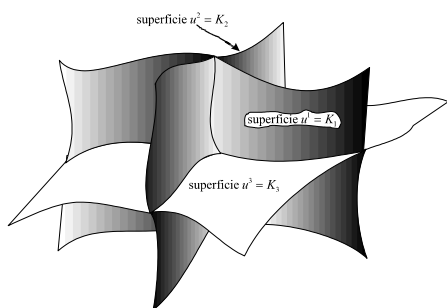
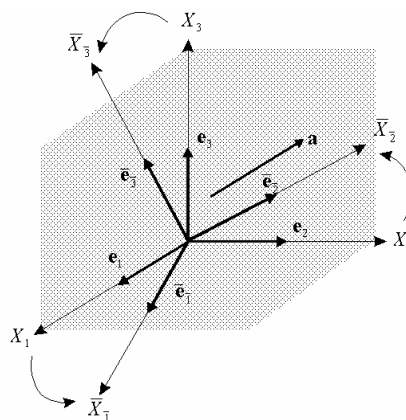
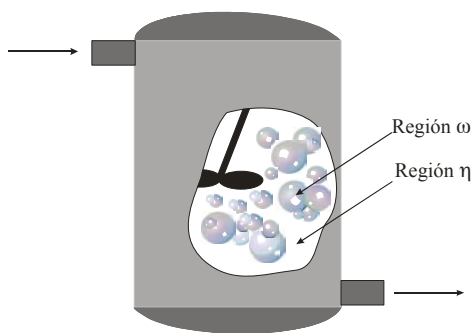




Métodos Matemáticos Aplicados a la Ingeniería Química



Jesús Alberto Ochoa Tapia

Departamento de Ingeniería de Procesos e
Hidráulica
UAM-Iztapalapa

Octubre de 2005



UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA - *Iztapalapa*

Prólogo

El objetivo principal del material presentado en estas notas es ayudar a que el lector aprenda las matemáticas necesarias para el estudio de cursos a nivel postgrado de fenómenos de transporte. Con esta idea el material cubierto puede ser usado de dos maneras: como texto del acostumbrado primer curso de matemáticas en un postgrado en Ingeniería Química, ó como apoyo en cualquiera de los cursos de fenómenos de transporte.

El material se presenta en seis capítulos y puede ser clasificado en tres grandes rubros:

- a) vectores, tensores y sistemas de coordenadas curvilíneas (Caps. I y II).
- b) Solución analítica de ecuaciones diferenciales parciales lineales (Caps. III, IV y V)
- c) Solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales por el método de diferencias finitas (Cap. VI).

El material en los Capítulos I y II es fundamental para el desarrollo de un curso formal en Mecánica de Fluidos. El material en los Capítulos III a V, relativo a la solución analítica de ecuaciones diferenciales parciales, ayudará significativamente al análisis y comprensión del planteamiento, solución y discusión de problemas de transferencia de momentum, energía y masa. Finalmente el material en el Capítulo VI, relativo a la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales, puede sentar las bases para el análisis de problemas cuya solución analítica exacta no sea fácil de obtener o sea imposible como lo es la mayoría de las soluciones de problemas no lineales. Por ello la revisión de este tema puede servir como punto de partida para la solución de problemas relacionados a los temas de investigación del estudiante de postgrado.

En el curso, de acuerdo al programa oficial, *Matemáticas Aplicadas a la Ingeniería Química del postgrado en Ingeniería Química* de la UAM-I se podría seguir el material presentado en este texto casi en su totalidad. Lo único que deberá ser considerado al iniciar es si es adecuado o no revisar el Capítulo I, o reemplazarlo por temas de Álgebra Lineal.

De acuerdo a la experiencia del autor sobre lo que es requerido en los cursos de *Mecánica de Fluidos* y *Transferencia de Calor y Masa* se recomienda la siguiente distribución de temas para el curso de *Matemáticas Aplicadas a la Ingeniería Química* con duración de un trimestre:

Tiempo	Material	
2 semanas	Capítulo I	Vectores y tensores
2 semanas	Capítulo II	Coordenadas curvilíneas
3 semanas	Capítulo III	Solución de ecuaciones diferenciales parciales en coordenadas cartesianas por el método de separación de variables.
2 semanas	Capítulo IV	Solución de ecuaciones diferenciales parciales en coordenadas cilíndricas y esféricas por el método de separación de variables.
2 semanas	Capítulo V	Transformada de Laplace

Esta propuesta implica el no revisar nada relativo a la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales. Una alternativa que permitiría revisar lo relativo a métodos numéricos es el cubrir en el curso de *Mecánica de Fluidos* lo relativo a los Capítulos I y II. Por ello el curso de *Matemáticas Aplicadas a la Ingeniería Química* tendría la siguiente distribución de temas:

Tiempo	Material	
3 semanas	Capítulo III	Solución de ecuaciones diferenciales parciales en coordenadas cartesianas por el método de separación de variables.
2 semanas	Capítulo IV	Solución de ecuaciones diferenciales parciales en coordenadas cilíndricas y esféricas por el método de separación de variables.
2 semanas	Capítulo V	Transformada de Laplace
4 semanas	Capítulo VI	Solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales por el método de diferencias finitas.

Las dos maneras sugeridas para conformar el curso introductorio, de matemáticas en el postgrado de Ingeniería Química, demuestran que el material puede ser utilizado de diversas formas, ya sea en el curso mencionado o como material de apoyo en cursos subsecuentes, y aún en el desarrollo de proyectos de investigación.

Para apoyar el aprendizaje al final del Capítulo VI se proporciona una lista de referencias bibliográficas. Al inicio de cada capítulo se menciona cuales de las referencias son importantes para cada uno de los temas. También en estas secciones se señalan particularidades de la nomenclatura y de los ejercicios propuestos. Estos ejercicios se encuentran al final de cada capítulo. La mayoría de las soluciones de los ejercicios propuestos están disponibles, aunque debo admitir que la presentación puede mejorarse mucho.

Además, de los ejercicios tradicionales relacionados a las soluciones numéricas se proponen cuatro proyectos en los que se solicita al estudiante comparar la solución analítica con la obtenida por el método de diferencias finitas. A mi parecer el realizar uno o más de estos proyectos, esto claro dependiendo del tiempo disponible en el curso, reafirmará por un lado los conceptos relacionados a las funciones propias, valores propios y convergencia de las series infinitas. Y por otro lado permitirá el que el alumno tenga una base para decidir cuando una solución numérica es la correcta, esto es sea independiente de los parámetros numéricos. Es claro que con la combinación de problemas propuestos se pueden formular proyectos adicionales.

Debo enfatizar que hay libros relativamente nuevos con los que se podría trabajar hacia el objetivo planteado anteriormente. Entre los directamente orientados a Ingeniería Química están los de Rice et al [1995] y Varma y Morbidelli [1997]. Por otro lado, están libros como los de Kreyszig [1999], Greenberg [1998] y Zill y Cullen [1999] que aunque no están orientados directamente a Ingeniería Química se pueden usar para revisar la mayoría de los temas propuestos. Y claro, existen los libros clásicos como el de Hildebrand [1976]. Sin embargo, ninguno de ellos contiene el material en el orden deseado, al menos desde mi punto de vista, y exceptuando a la segunda edición del libro de Kreyszig ninguno de ellos ha sido traducido al español.

Creo que lo que he expresado anteriormente valida el intento de lograr un libro encaminado hacia el uso en nuestro postgrado.

Sin demeritar la ayuda de ninguno de los colegas y alumnos que me han ayudado a corregir el material presentado, en particular quiero agradecer a José Javier Valencia López, Mauricio Alfonso Sales Cruz y Francisco José Valdés Parada su paciencia y sugerencias que se ven reflejados en muchas de las mejoras que ha tenido este documento a lo largo de su desarrollo. Además, la mayor parte de los resultados gráficos de las soluciones analíticas son fruto del trabajo y cuidado de Mauricio. Los errores aún existentes son enteramente mi responsabilidad.

Agradezco el apoyo de los compañeros del Instituto Tecnológico de Celaya por su hospitalidad y ayuda para conseguir un pequeño, pero muy apreciado, apoyo del CONCITEG del estado de Guanajuato. Tan buen ambiente me permitió, aprovechando mi estancia sabática ahí, mejorar en todos aspectos el trabajo y aumentar en casi 100 los ejercicios propuestos. Me queda claro que poco podría haber hecho sino tuviera el privilegio desde 1994 de ser profesor en la UAM-Iztapalapa.

Finalmente, agradezco a Tere, Karla y Carlos Alberto la motivación que me proporcionan cada día para hacer este tipo de trabajos.

J. Alberto Ochoa Tapia

Octubre de 2005

Por favor enviarme cualquier comentario o sugerencia a jaot@xanum.uam.mx. Se los agradezco de antemano.

Indice

I. Introducción al análisis tensorial

0. Algunos comentarios sobre el material incluido en este capítulo	1
1. Vectores y notación indicial	3
2. Producto punto o escalar	4
3. Producto cruz o vectorial	5
4. Rotación de coordenadas	7
5. Producto diádico y tensores de segundo orden	10
6. Propiedades de los productos diádicos	13
7. Transformación de tensores simétricos al sistema coordenado principal	15
8. Operadores diferenciales	19
Problemas propuestos	23

II. Sistemas de coordenadas curvilíneas

0. Algunos comentarios sobre el material incluido en este capítulo	31
1. Desarrollo de las bases vectoriales de sistemas de coordenadas curvilíneas	33
Ejemplo 1	36
2. Bases vectoriales recíprocas	38
3. Transformación de vectores de coordenadas cartesianas a coordenadas curvilíneas	44
Ejemplo 2	47
4. Diferencial de volumen	49
Ejemplo 3	50
5. Diferenciales de área	52
Ejemplo 4	47
6. Factores de escala de sistemas de coordenadas ortogonales curvilíneas	53
7. Gradiente de un escalar en sistemas coordenados ortogonales curvilíneos	53
8. Divergencia de un vector en sistemas coordenados ortogonales curvilíneos	54
9. El Laplaciano de un escalar en sistemas coordenados ortogonales curvilíneos	56
Ejemplo 5	57
10. El teorema de la divergencia	58
Ejemplo 6	63
Ejemplo 7	63
Ejemplo 8	65
Ejemplo 9	67
Ejemplo 10	69
Ejemplo 11	70
Problemas propuestos	71

III. Solución de ecuaciones diferenciales parciales en Ingeniería Química: método de separación de variables aplicado a problemas en coordenadas cartesianas

0. Algunos comentarios sobre el material incluido en este capítulo	79
1. Introducción	81
2. Ecuaciones diferenciales parciales (EDP) de segundo orden	86

3. Algunos métodos de solución de ecuaciones diferenciales parciales	89
4. Método de separación de variables	91
5. El problema de Sturm-Liouville	98
6. Teoría de Sturm-Liouville. Funciones ortogonales y problemas de valor en la frontera	102
7. El problema de la aleta de enfriamiento en dos dimensiones: solución por el método de separación de variables	107
8. El método de superposición	116
9. Un problema tridimensional	125
10. Solución de ecuaciones diferenciales parciales parabólicas	133
11. Solución de problemas no homogéneos	139
12. Solución de problemas con condiciones de frontera no homogéneas dependientes del tiempo	149
13. Método para la solución de problemas no homogéneos basado en la expansión en series de funciones ortogonales	158
14. Sobre la metodología de la solución de ecuaciones diferenciales parciales parabólicas con el método de separación de variables y sus variaciones	164
Problemas propuestos	168

IV. Solución de ecuaciones diferenciales en sistemas de coordenadas cilíndricas y esféricas

0. Algunos comentarios sobre el material incluido en este capítulo	181
1 El método de Frobenius para la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden con coeficientes variables	183
2. La ecuación de Bessel	187
3. Solución de la ecuación de Bessel para el caso en que $r_1 = r_2 = 0$ ó $r_2 = -\text{entero}$	193
4. Funciones modificadas de Bessel	196
5. Ecuación diferencial con soluciones que contienen funciones de Bessel	199
6. Ortogonalidad de las funciones Bessel	200
Ejemplo 1	201
Ejemplo 2	205
Ejemplo 3	208
Ejemplo 4	211
Ejemplo 5	215
7. Integrales de las funciones Bessel	220
8. Identidades para las funciones Bessel	223
Ejemplo 6	223
9. Polinomios de Legendre	226
10. Ortogonalidad de los polinomios de Legendre	231
11. La ecuación asociada de Legendre	232
Ejemplo 7	234
Problemas propuestos	237

V. Transformada de Laplace	
0. Algunos comentarios sobre el material incluido en este capítulo	249
1. Introducción: Solución del problema de un tanque agitado con reacción química	251
2. Transformada de Laplace de funciones sencillas	256
3. Propiedades de la función gama	257
4. Propiedades de la transformada de Laplace	259
Ejemplo 1: Una aplicación en un dominio semi infinito, la placa súbitamente acelerada	263
5. Una fórmula generalizada de Duhamel	268
Ejemplo 2: Movimiento de un fluido en un canal en donde una pared se mueve a velocidad constante	270
6. La fórmula de Heaviside para la inversa de concientes de polinomios	273
Ejemplo 3: Uso de la fórmula de Heaviside	274
Ejemplo 4: Movimiento de un fluido en un canal en donde una pared se mueve arbitrariamente	278
Ejemplo 5: Conducción de calor en una barra cilíndrica sujeta a una temperatura exterior arbitraria	282
6. Función delta y su transformada de Laplace	285
Ejemplo 6: Un cromatógrafo muy sencillo	289
Problemas propuestos	295
VI. Soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales parciales por el método de diferencias finitas	
0. Algunos comentarios sobre el material incluido en este capítulo	305
1. Introducción	307
2. El método de diferencias finitas aplicado a la solución de problemas lineales unidimensionales de difusión con reacción química en estado estacionario	311
3. Solución numérica de la ecuación de Laplace en dos dimensiones	328
4. Solución iterativa de sistemas de ecuaciones lineales: métodos de Jacobi, Gauss-Seidel, SOR e inversión línea por línea.	333
Ejemplos	337
5. El algoritmo de Thomas para la inversión de matrices tridiagonales	340
Ejemplo: Aplicación del algoritmo de Thomas	341
6. Incorporación de condiciones de frontera a problemas bidimensionales	343
7. El método explícito para la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales parabólicas	349
8. Métodos implícitos para solución de ecuaciones diferenciales parabólicas	355
9. El método de Crank-Nicholson	359
10. El método implícito de dirección alternada (ADI)	363
11. Métodos numéricos para ecuaciones diferenciales parciales no-lineales	368
Problemas propuestos	375

Bibliografía	383
Proyectos propuestos sobre métodos numéricos	387
Proyecto 1	
La aleta de enfriamiento rectangular	389
Proyecto 2	
La aleta de enfriamiento cilíndrica	390
Proyecto 3	
Transferencia de calor unidimensional transitoria en una placa	392
Proyecto 4	
Difusión y reacción en placas, cilindros y esferas con coeficientes de transporte y cinética no lineal	394
Apéndices	395
Apéndice A:	
Resumen de fórmulas para sistemas de coordenadas curvilíneas	396
Apéndice B	
Fórmulas para sistemas de coordenadas cilíndricas y esféricas	398
Apéndice C	
Solución de la ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden	402
Apéndice D	
Deducción de la regla de Leibnitz	405

I. Introducción al análisis tensorial

0. Algunos comentarios sobre el material incluido en este capítulo

El material que se presenta en este capítulo es esencial para el estudio de las ecuaciones de transporte de momentum, energía y masa desde un punto de vista formal. De otra manera se tendría, casi forzosamente, que restringir la deducción de las ecuaciones de conservación a sistemas de geometría específica y sería muy difícil generalizar los resultados. El material presentado en este capítulo está limitado a sistemas coordenados cartesianos, pero en conjunto con el que se revisará en el Capítulo II permitirá el desarrollo de las ecuaciones de transporte para cualquier geometría y desde un punto de vista general.

En este capítulo se introducirán principalmente el uso de la notación indicial para la representación de vectores y tensores de segundo orden. Con este objetivo se revisarán algunas de las operaciones básicas relacionadas a vectores y se definirán los tensores de segundo orden a partir del producto diádico de dos vectores. La transformación de sistemas coordenados debido a rotación de los ejes se representará usando operaciones con tensores. Finalmente, se revisará lo referente a los valores principales de un tensor de segundo orden y los ejes principales relacionados.

Un alumno que pretenda estudiar los temas presentados en este capítulo debe haber estudiado previamente cálculo de varias variables, cálculo vectorial y álgebra lineal. Todo ello puede ser a un nivel de licenciatura.

Después de revisar los temas presentados en el capítulo, el alumno debe ser capaz de resolver los problemas de los grupos 1 y 2.

Sobre la nomenclatura

La mayor parte de la nomenclatura introducida se explica durante el desarrollo de los temas pero vale la pena insistir en el uso de los siguientes símbolos:

A o b Indicarán un tensor de segundo orden.

A o b Indicarán un vector.

Nótese que se usan letras negritas tanto para tensores como para vectores pero el tipo es diferente Arial (tensores) y times (vectores).

$\underline{A}$ o $\underline{a}$ Indicarán tensores si no se cuenta con un tipo de letras negritas adecuado.

$\underline{\mathbf{a}}$ o $\underline{\mathbf{B}}$	Indicarán vectores si no se cuenta con tipo de letras negritas adecuado.
$\ \mathbf{a}\ $	Módulo del vector $\mathbf{a}$.
$\{A_{ij}\}$	Indicará la matriz formada por los elementos A_{ij} .
$\{\mathbf{A}\}$	Indicará la matriz formada por los elementos del tensor $\mathbf{A}$.
$\mathbf{e}_i$	Indicará el vector unitario en la dirección de la coordenada X_i de un sistema coordenado cartesiano.
$\hat{\mathbf{e}}_i$	Indicará el vector unitario en la dirección de la coordenada u^i de un sistema coordenado curvilíneo.

Subíndices

i, j, k	Indicarán componentes en el sistema de coordenadas X .
$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$	Indicarán componentes en el sistema de coordenadas $\bar{X}$.

Sobre las referencias

En caso de querer ampliar o refrescar conocimientos sobre álgebra vectorial y operadores diferenciales se recomienda leer el capítulo 8 del libro de Kreyszig [6] y/o el capítulo 7 del libro de Greenberg [4].

Si se desea profundizar sobre el manejo de la notación indicial y de tensores se recomienda estudiar los libros de Aris [2] y el de Simmonds [9]. El primero es un libro clásico pero a mi parecer no está al alcance de todos los lectores, por otro lado Simmonds en su libro trató de dar siempre un significado físico y geométrico al material presentado, aún sobre tensores, sin perder rigurosidad. Por ello me parece que antes de estudiar el libro de Aris es recomendable revisar el de Simmonds.

1. Vectores y notación indicial

Considere un sistema cartesiano de coordenadas rectangulares donde los tres ejes son ortogonales. En lugar de usar la nomenclatura X , Y y Z para los tres ejes, esto con el propósito de compactar la nomenclatura se designarán como X_1 , X_2 y X_3 . A su vez los vectores unitarios correspondientes se designarán como $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$, en lugar de la nomenclatura tradicional $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$. De esta forma el vector $\mathbf{a}$ (Figura 1) que se dirige de un punto a otro en el espacio tridimensional, se escribirá como

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 a_i\mathbf{e}_i \quad (1.1)$$

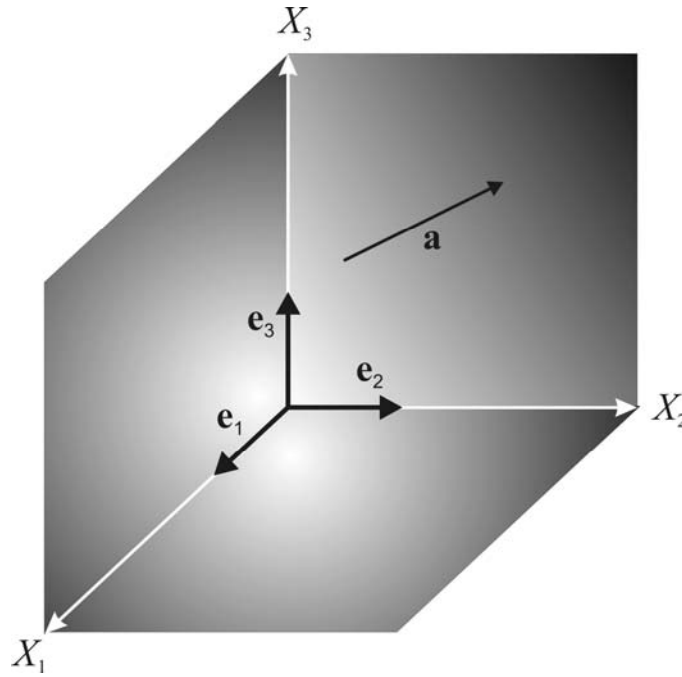


Figura 1. Sistema coordenado cartesiano de mano derecha.

En la ecuación (1.1) a_i indica cualquiera de los tres componentes del vector $\mathbf{a}$, y para abreviar la escritura de esta expresión se introduce a continuación la convención de la sumatoria. Dicha convención establece que la existencia de términos con índice repetido dos veces indica la suma de todos los términos posibles. Por ejemplo: en el caso del espacio vectorial al que nos referimos anteriormente la suma será sobre tres términos, o sea utilizando la convención de la sumatoria la ecuación (1.1) se escribe como

$$\mathbf{a} = a_i\mathbf{e}_i \quad (1.2)$$

Bajo esta convención si un índice no se encuentra repetido, en un término, tomará cualquier valor permitido por la dimensión del espacio vectorial. Así para un sistema tridimensional

$$a_{ij} = a_{12}, \text{ó } a_{31}, \text{ó } a_{22}, \text{etc.} \quad (1.3a)$$

Se hace notar que cuando en un término aparezca repetido más de dos veces un índice no implicará sumatoria. Por ejemplo

$$a_i S_{ii} = a_1 S_{11}, \text{ o } a_2 S_{22}, \text{ o } a_3 S_{33} \quad (1.3b)$$

$$\Omega_{kkk} = \Omega_{111}, \text{ o } \Omega_{222}, \text{ o } \Omega_{333} \quad (1.3c)$$

2. Producto punto o escalar.

El producto escalar de dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ está definido por la siguiente expresión

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta_{ab} \quad \text{para } 0 \leq \theta_{ab} \leq 180^\circ \quad (2.1)$$

en donde $\|\mathbf{a}\|$ y $\|\mathbf{b}\|$ indican la magnitud de los vectores y $\cos \theta_{ab}$ es el coseno del ángulo formado por los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Nótese que $\cos \alpha = \cos(2\pi - \alpha)$, y por lo tanto

$$\cos \theta_{ab} = \cos \theta_{ba}$$

Ahora introduciremos la notación indicial para el producto escalar, así la ecuación (2.1) se puede escribir como

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_i \mathbf{e}_i) \cdot (b_j \mathbf{e}_j) \quad (2.2)$$

Para encontrar el valor de $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ recurrimos a la definición (2.1), y encontramos

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \|\mathbf{e}_i\| \|\mathbf{e}_j\| \cos \theta_{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j} \quad (2.3)$$

En donde $\cos \theta_{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j}$ es el ángulo formado por $\mathbf{e}_i$ y $\mathbf{e}_j$. Como estos son vectores unitarios su magnitud es la unidad, y por lo tanto la ecuación (2.3) se reduce a

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \cos \theta_{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j} \quad (2.4)$$

el coseno de $\theta_{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j}$ es igual a 1 si $i = j$, e igual a cero si $i \neq j$. Esto es fácil de visualizar si se recuerda que el producto escalar de un vector $\mathbf{a}$ por un vector unitario $\mathbf{e}_i$, es la proyección de $\mathbf{a}$ en la dirección $\mathbf{e}_i$. Por lo tanto si $\mathbf{a}$ tiene la misma dirección que $\mathbf{e}_i$ su proyección es $\|\mathbf{a}\|$, y en contraste si $\mathbf{a}$ es perpendicular a $\mathbf{e}_i$ su proyección es nula. Podemos ahora resumir los valores de $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ en la siguiente forma

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (2.5)$$

Es conveniente introducir ahora el símbolo conocido como delta de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (2.6)$$

Esta definición puede usarse para escribir la ecuación (2.5) como

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad (2.7)$$

Ahora podemos usar (2.7) en (2.2) para obtener

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_j \delta_{ij} \quad (2.8)$$

Y utilizando la definición (2.6), la ecuación (2.8) se reduce a

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i \quad (2.9)$$

que en forma expandida es la presentación normalmente usada

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (2.10)$$

Nótese que

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2 \quad (2.11)$$

3. Producto cruz o vectorial

El producto vectorial o cruz está definido por

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta_{ab} \mathbf{e}_\perp \quad \text{para } 0 \leq \theta_{ab} \leq \pi \quad (3.1)$$

En donde $\mathbf{e}_\perp$ es el vector unitario perpendicular al plano que forman los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$; además $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{e}_\perp$, en este orden definen un sistema coordenado de mano derecha.

Este producto también se puede escribir en forma condensada utilizando la notación indicial, pero es necesario recordar que para un sistema coordenado de mano derecha (p.ej. el mostrado en la Figura 1) los productos vectoriales entre los vectores unitarios $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$ están definidos de la siguiente manera :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_3 = -(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1) \\ \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_1 = -(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2) \\ \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_2 = -(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3) \\ \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 &= 0, \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 = 0, \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

El producto vectorial de **a** y **b** se puede escribir como :

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_i \mathbf{e}_i) \times (b_j \mathbf{e}_j) \quad (3.3)$$

que se puede desarrollar en la forma siguiente si se utilizan las relaciones indicadas por la ecuación (3.2)

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_3 \quad (3.4)$$

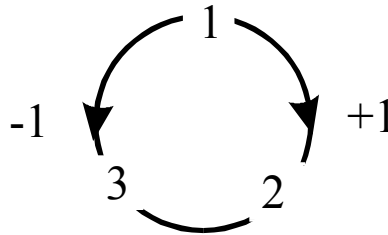
A su vez, esta expresión se puede escribir en términos de la definición de un determinante

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (3.5)$$

Para abreviar la escritura de la ecuación (3.5) debemos introducir el símbolo de permutación ϵ_{ijk} definido de la siguiente manera:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{si alguno de los subíndices está repetido} \\ 1, & \text{si } ijk \text{ es una permutación par de } 123 \\ -1, & \text{si } ijk \text{ es una permutación non de } 123 \end{cases} \quad (3.6)$$

Este símbolo es más fácil de entender y usar si se sigue el siguiente esquema : Se escribe la secuencia 1 2 3 en la forma mostrada enseguida



Aquí se puede observar claramente que ϵ_{ijk} es +1 cuando los índices son 123 en la secuencia siguiendo la dirección de las manecillas del reloj, y ϵ_{ijk} es -1 cuando 123 están colocados en una secuencia contraria a las manecillas del reloj. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \epsilon_{123} &= \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = +1 \\ \epsilon_{132} &= \epsilon_{321} = \epsilon_{213} = -1 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Usando el símbolo de permutación y sus propiedades, no es difícil demostrar de la ecuación (3.3) que el producto vectorial entre **a** y **b** se escribe en notación indicial como

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \epsilon_{ijk} a_i b_j \mathbf{e}_k \quad (3.8)$$

También se ha encontrado una forma compacta de escribir un determinante. Por ejemplo el determinante de la matriz cuadrada de elementos A_{ij} , es

$$\det\{A_{ij}\} = \epsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k} = \epsilon_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3} \quad (3.9)$$

4. Rotación de coordenadas

Supóngase que se desea girar los ejes coordenados X_1 , X_2 y X_3 para así crear un nuevo sistema coordenado $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$ y $\bar{X}_3$ (Figura 2) con vectores unitarios $\bar{\mathbf{e}}_1$, $\bar{\mathbf{e}}_2$ y $\bar{\mathbf{e}}_3$

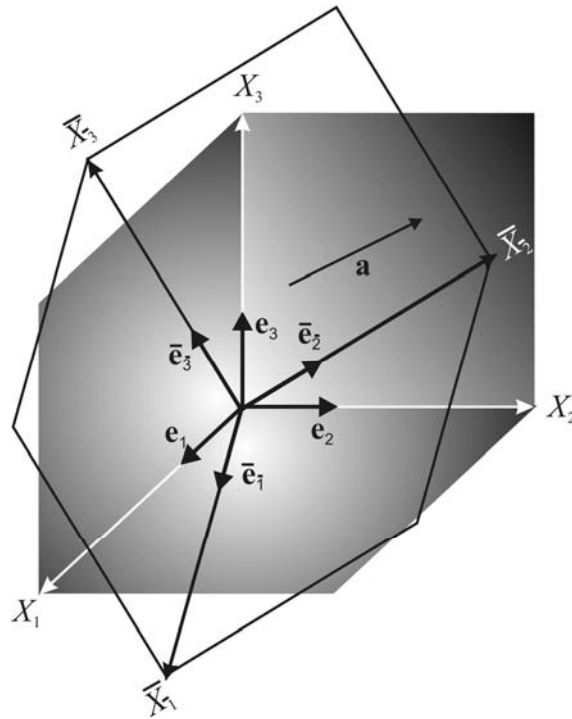


Figura 2. Sistemas coordenados cartesianos de mano derecha $\bar{\mathbf{X}}$ y $\mathbf{X}$. El sistema $\bar{\mathbf{X}}$ se obtuvo a partir de la rotación de los ejes del sistema original $\mathbf{X}$.

El vector $\mathbf{a}$ al cual nos referimos anteriormente, aunque ahora sea expresado en el nuevo sistema de coordenadas, aún es el mismo vector. Los vectores unitarios del nuevo sistema coordenado se pueden expresar en términos de los del sistema coordenado X_1 , X_2 y X_3 . Por ejemplo :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{e}}_1 &= \alpha_{11}\mathbf{e}_1 + \alpha_{12}\mathbf{e}_2 + \alpha_{13}\mathbf{e}_3 \\ \bar{\mathbf{e}}_2 &= \alpha_{21}\mathbf{e}_1 + \alpha_{22}\mathbf{e}_2 + \alpha_{23}\mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\bar{\mathbf{e}}_3 = \alpha_{31} \mathbf{e}_1 + \alpha_{32} \mathbf{e}_2 + \alpha_{33} \mathbf{e}_3$$

En forma compacta las ecs. (4.1) son

$$\bar{\mathbf{e}}_j = \alpha_{ji} \mathbf{e}_i \quad (4.2)$$

Los coeficientes α_{ji} son los cosenos directores de la transformación $\mathbf{X} \rightarrow \bar{\mathbf{X}}$. Esto puede ser demostrado tomando el producto escalar de la ecuación (4.2) con cualquier vector unitario $\mathbf{e}_k$:

$$\mathbf{e}_k \cdot \bar{\mathbf{e}}_j = \alpha_{ji} \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_i = \alpha_{ji} \delta_{ik} = \alpha_{jk} \quad (4.3)$$

Por ejemplo si $\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_3$ y $\bar{\mathbf{e}}_j = \bar{\mathbf{e}}_1$, entonces la ecuación (4.3) es

$$\mathbf{e}_3 \cdot \bar{\mathbf{e}}_1 = \alpha_{31} \quad (4.4)$$

Además la definición del producto punto permite escribir

$$\mathbf{e}_k \cdot \bar{\mathbf{e}}_j = \|\mathbf{e}_k\| \|\bar{\mathbf{e}}_j\| \cos \theta_{\mathbf{e}_k \bar{\mathbf{e}}_j} \quad (4.5)$$

en donde $\cos \theta_{\mathbf{e}_k \bar{\mathbf{e}}_j}$ es el ángulo entre los ejes X_k y $\bar{X}_j$. Como $\|\mathbf{e}_k\| = \|\bar{\mathbf{e}}_j\| = 1$, la ec. (4.5) da

$$\mathbf{e}_k \cdot \bar{\mathbf{e}}_j = \cos \theta_{\mathbf{e}_k \bar{\mathbf{e}}_j} = \alpha_{kj}, \quad \text{para } j=1,2,3 \text{ y } k=1,2,3 \quad (4.6)$$

El coseno director α_{kj} , es el valor del coseno de θ_{kj} , que es el ángulo entre las rectas definidas por $\mathbf{e}_k$ y $\bar{\mathbf{e}}_j$.

El vector $\mathbf{a}$ en el sistema $\bar{\mathbf{X}}$ toma la forma

$$\mathbf{a} = \bar{a}_j \bar{\mathbf{e}}_j \quad (4.7)$$

Utilizando la ec. (4.2) en la (4.7) para reemplazar $\bar{\mathbf{e}}_j$ por su representación en el sistema $\mathbf{X}$ se obtiene

$$\mathbf{a} = \bar{a}_j \alpha_{ji} \mathbf{e}_i \quad (4.8)$$

De la comparación de las ecuaciones (1.2) y (4.8) se concluye

$$a_i = \bar{a}_j \alpha_{ji} \quad (4.9)$$

que también puede escribirse en la forma

$$a_i = \alpha_{ij} \bar{a}_j \quad (4.10)$$

Esta última ecuación es la ley de transformación de vectores desde el sistema coordenado $\bar{\mathbf{X}}$ al $\mathbf{X}$, en donde $\bar{\mathbf{X}}$ se obtiene por rotación de los ejes coordenados originales. En forma matricial la ecuación (4.10) es

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}}_{3 \times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}}_{3 \times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \\ \bar{a}_3 \end{pmatrix}}_{3 \times 1} \quad (4.11)$$

Es crucial notar que el hecho de que $\alpha_{ji} = \alpha_{ij}$, fue usado para escribir la ecuación (4.10), no significa que la matriz de coeficientes α_{ji} sea simétrica, sino solamente que la ecuación (4.11) puede ser escrita como

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \\ \bar{a}_3 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

En forma similar se pueden encontrar las componentes del vector en el sistema $\mathbf{X}$ en función de las componentes del sistema $\bar{\mathbf{X}}$, para esto, sobre la base de la ecuación (4.2) se escribe

$$\mathbf{e}_i = \alpha_{i\bar{j}} \bar{\mathbf{e}}_{\bar{j}} \quad (4.13)$$

y esta permite escribir $\mathbf{a}$ en el sistema $\bar{\mathbf{X}}$ a partir de $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i$ cómo

$$\mathbf{a} = a_i \alpha_{i\bar{j}} \bar{\mathbf{e}}_{\bar{j}}$$

$$\bar{a}_{\bar{j}} = a_i \alpha_{i\bar{j}} \quad (4.14)$$

En esta ecuación a_i puede ser reemplazada usando la ec. (4.10) para obtener

$$\bar{a}_{\bar{j}} = \alpha_{i\bar{j}} \alpha_{i\bar{k}} \bar{a}_{\bar{k}} \quad (4.15)$$

Pero esta ecuación sólo es cierta si

$$\alpha_{i\bar{j}} \alpha_{i\bar{k}} = \delta_{\bar{k}\bar{j}} \quad (4.16)$$

$$\text{ó} \quad \alpha_{\bar{k}i} \alpha_{i\bar{j}} = \delta_{\bar{k}\bar{j}}$$

Este resultado puede escribirse en forma matricial de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

y en forma matricial condensada como

$$\{\alpha_{i\bar{k}}\}^T \{\alpha_{i\bar{j}}\} = \{\delta_{i\bar{j}}\} \quad (4.18)$$

Donde se introdujo la matriz $\{\alpha_{i\bar{k}}\}$, definida

$$\{\alpha_{i\bar{k}}\} = \begin{pmatrix} \alpha_{1\bar{1}} & \alpha_{1\bar{2}} & \alpha_{1\bar{3}} \\ \alpha_{2\bar{1}} & \alpha_{2\bar{2}} & \alpha_{2\bar{3}} \\ \alpha_{3\bar{1}} & \alpha_{3\bar{2}} & \alpha_{3\bar{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

y su transpuesta

$$\{\alpha_{i\bar{k}}\}^T = \begin{pmatrix} \alpha_{1\bar{1}} & \alpha_{2\bar{1}} & \alpha_{3\bar{1}} \\ \alpha_{1\bar{2}} & \alpha_{2\bar{2}} & \alpha_{3\bar{2}} \\ \alpha_{1\bar{3}} & \alpha_{2\bar{3}} & \alpha_{3\bar{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

En la ec. (4.18) también se ha introducido la matriz identidad, que expresada en forma de elemento por elemento es

$$\{\delta_{ij}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

Debe insistirse que la segunda representación de la matriz $\{\alpha_{i\bar{k}}\}$ y su transpuesta $\{\alpha_{i\bar{k}}\}^T$, son correctas porque el coseno director entre los ejes $i\bar{j}$ es el mismo si se mide el ángulo de $\bar{j}$ a i que si se mide de i a $\bar{j}$.

La representación, en forma matricial dada por la ec. (4.11), de la transformación de los componentes del vector $\mathbf{a}$ no es necesaria en el contexto del análisis tensorial. Sin embargo, muestra la gran utilidad de la notación indicial y la convención de la sumatoria. Este aspecto vuelve a ser evidente al comparar las ecs. (4.16) y (4.17)

5. Producto diádico y tensores de segundo orden.

Considérese el producto de los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, definido por

$$\mathbf{ab} = (a_i \mathbf{e}_i)(b_j \mathbf{e}_j) = a_i b_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (5.1)$$

Este resultado es completamente diferente a los productos escalar y vectorial puesto que cada uno de los términos tiene asociado dos vectores unitarios, este resultado es lo que se denomina producto diádico o tensor de 2do. orden. En forma expandida el producto $\mathbf{ab}$, que denominaremos $\mathbf{A}$, es

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} = \mathbf{a} \mathbf{b} &= a_1 b_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + a_1 b_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + a_1 b_3 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 \\
&+ a_2 b_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 + a_2 b_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + a_2 b_3 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \\
&+ a_3 b_1 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 + a_3 b_2 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 + a_3 b_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3
\end{aligned} \tag{5.2}$$

El producto $\mathbf{b} \mathbf{a}$, denominado $\mathbf{B}$, es

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} = \mathbf{b} \mathbf{a} &= b_1 a_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + b_1 a_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + b_1 a_3 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 \\
&+ b_2 a_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 + b_2 a_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + b_2 a_3 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \\
&+ b_3 a_1 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 + b_3 a_2 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 + b_3 a_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3
\end{aligned} \tag{5.3}$$

De la comparación de ecuaciones (5.2) y (5.3) podemos ver que $\mathbf{a} \mathbf{b} \neq \mathbf{b} \mathbf{a}$ porque en general $a_2 b_1 \neq b_2 a_1$, $a_3 b_1 \neq b_3 a_1$, etc. La escritura del tensor $\mathbf{A}$ se puede simplificar utilizando la nomenclatura

$$A_{ij} = a_i b_j \tag{5.4}$$

De tal forma que la ecuación (5.2) es

$$\mathbf{A} = A_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \tag{5.5}$$

Donde A_{ij} son los elementos del producto diádico o tensor de 2do. orden.

Ahora se buscarán fórmulas para la transformación de los componentes A_{ij} expresados en el sistema de coordenadas $\mathbf{X}$ a su forma en el sistema $\bar{\mathbf{X}}$ descrito en la Sección 4. Los elementos del tensor $\mathbf{A}$ definido en la ecuación (5.5) en el sistema coordenado $\bar{\mathbf{X}}$ son

$$\mathbf{A} = \bar{A}_{\bar{i}\bar{j}} \bar{\mathbf{e}}_{\bar{i}} \bar{\mathbf{e}}_{\bar{j}} \tag{5.6}$$

Anteriormente se usaron las siguientes expresiones que relacionan los vectores unitarios de ambos sistemas

$$\bar{\mathbf{e}}_{\bar{i}} = \alpha_{\bar{i}i} \mathbf{e}_i, \quad \bar{\mathbf{e}}_{\bar{j}} = \alpha_{\bar{j}j} \mathbf{e}_j \tag{5.7}$$

De tal forma que en el sistema de coordenadas $\mathbf{X}$ el tensor $\mathbf{A}$ toma la siguiente forma

$$\mathbf{A} = \bar{A}_{\bar{i}\bar{j}} \alpha_{\bar{i}i} \alpha_{\bar{j}j} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \tag{5.8}$$

De la comparación de esta última ecuación con (5.5) se concluye

$$A_{ij} = \bar{A}_{\bar{i}\bar{j}} \alpha_{\bar{i}i} \alpha_{\bar{j}j} \tag{5.9}$$

Esta es la ley de transformación de un tensor de segundo orden desde el sistema $\bar{\mathbf{X}}$ al $\mathbf{X}$. En forma análoga se puede demostrar que

$$\bar{A}_{\bar{i}\bar{j}} = A_{ij} \alpha_{\bar{i}i} \alpha_{\bar{j}j} \tag{5.10}$$

La conclusión no es inmediata, pero el resultado anterior puede escribirse en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} \bar{A}_{\bar{1}\bar{1}} & \bar{A}_{\bar{1}\bar{2}} & \bar{A}_{\bar{1}\bar{3}} \\ \bar{A}_{\bar{2}\bar{1}} & \bar{A}_{\bar{2}\bar{2}} & \bar{A}_{\bar{2}\bar{3}} \\ \bar{A}_{\bar{3}\bar{1}} & \bar{A}_{\bar{3}\bar{2}} & \bar{A}_{\bar{3}\bar{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1\bar{1}} & \alpha_{2\bar{1}} & \alpha_{3\bar{1}} \\ \alpha_{1\bar{2}} & \alpha_{2\bar{2}} & \alpha_{3\bar{2}} \\ \alpha_{1\bar{3}} & \alpha_{2\bar{3}} & \alpha_{3\bar{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{1\bar{1}} & \alpha_{1\bar{2}} & \alpha_{1\bar{3}} \\ \alpha_{2\bar{1}} & \alpha_{2\bar{2}} & \alpha_{2\bar{3}} \\ \alpha_{3\bar{1}} & \alpha_{3\bar{2}} & \alpha_{3\bar{3}} \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

y, usando las ecs. (4.19) y (4.20), en forma matricial condensada como

$$\{\bar{A}_{i\bar{j}}\} = \{\alpha_{i\bar{i}}\}^T \{A_{ij}\} \{\alpha_{j\bar{j}}\} \quad (5.12)$$

Con las definiciones

$$\{\bar{A}_{i\bar{j}}\} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{\bar{1}\bar{1}} & \bar{A}_{\bar{1}\bar{2}} & \bar{A}_{\bar{1}\bar{3}} \\ \bar{A}_{\bar{2}\bar{1}} & \bar{A}_{\bar{2}\bar{2}} & \bar{A}_{\bar{2}\bar{3}} \\ \bar{A}_{\bar{3}\bar{1}} & \bar{A}_{\bar{3}\bar{2}} & \bar{A}_{\bar{3}\bar{3}} \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

$$\{A_{ij}\} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

En este punto cabe recordar que los tensores de segundo orden están definidos por el producto diádico de dos vectores, pero que no es raro representarlos, en términos de sus componentes, en forma matricial. Así, por ejemplo, el tensor de segundo orden $\mathbf{A} = A_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ tiene asociada la matriz de componentes

$$\{\mathbf{A}\} = \{A_{ij}\} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

En forma similar el tensor identidad $\mathbf{I} = \delta_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ tiene asociada la matriz de componentes

$$\{\mathbf{I}\} = \{\delta_{ij}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

Así en adelante más de una vez representaremos un tensor en forma matricial en términos de sus componentes.

La comparación de las ecs. (5.10) y (5.12) vuelve a poner en evidencia lo valioso del análisis tensorial.

6. Propiedades de los productos diádicos

a. La adición de dos tensores es conmutativa

$$\begin{aligned}\mathbf{A} + \mathbf{B} &= (A_{ij} + B_{ij}) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \\ &= (B_{ij} + A_{ij}) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \mathbf{B} + \mathbf{A}\end{aligned}\quad (6.1)$$

b. El producto escalar de un tensor con un vector se define en la forma siguiente

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \mathbf{c} &= (A_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) \cdot (c_k \mathbf{e}_k) = A_{ij} c_k \mathbf{e}_i (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k) \\ &= A_{ij} c_k \mathbf{e}_i \delta_{jk} = A_{ij} c_j \mathbf{e}_i \quad (\text{vector})\end{aligned}\quad (6.2)$$

En este desarrollo se ha introducido la convención de anidamiento, que establece que el producto escalar se lleva a cabo entre los vectores unitarios más cercanos. El producto escalar también se podría llevar a cabo en la forma alterna que introduce una convención de anidamiento basada en el producto de los vectores unitarios más alejados

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \mathbf{c} &= (A_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) \cdot (c_k \mathbf{e}_k) = A_{ij} c_k \mathbf{e}_j (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k) \\ &= A_{ij} c_k \mathbf{e}_j \delta_{ik} = A_{ij} c_i \mathbf{e}_j \quad (\text{vector})\end{aligned}\quad (6.3)$$

Nosotros adoptaremos la convención basada en los vectores unitarios más próximos. Nótese que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{A}$ solamente si $A_{ij} = A_{ji}$. Si el tensor tiene esta propiedad se denomina como tensor simétrico.

c. La definición del transpuesto de $\mathbf{A}$ está dado por la fórmula

$$\mathbf{A}^T = A_{ij}^T \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (6.4)$$

en donde

$$A_{ij}^T = A_{ji} \quad (6.5)$$

El uso de esta definición en la ecuación (6.3) permite encontrar

$$\begin{aligned}\mathbf{c} \cdot \mathbf{A} &= (A_{ij} c_i) \mathbf{e}_j = (A_{ji}^T c_i) \mathbf{e}_j \\ &= (A_{ij}^T c_j) \mathbf{e}_i = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{c}\end{aligned}\quad (6.6)$$

De este resultado no es difícil observar que si un tensor es simétrico $\mathbf{A} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{A}$. Los tensores simétricos aparecen frecuentemente en el estudio de Mecánica de Fluidos.

d. Un tensor antisimétrico está definido por

$$\mathbf{A}^T = -\mathbf{A} \quad (6.7)$$

e. El producto escalar de dos tensores de segundo orden está sujeto a la convención de anidamiento anteriormente adoptada.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (A_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) \cdot (B_{kl} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l) = \\ &= A_{ij} B_{kl} \mathbf{e}_i (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_l = A_{ij} B_{kl} \mathbf{e}_i \delta_{jk} \mathbf{e}_l = \\ &= A_{ij} B_{jl} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_l \quad (\text{Tensor de segundo orden}) \end{aligned} \quad (6.8)$$

f. El doble producto escalar de dos tensores de segundo orden también está sujeto a la misma convención de anidamiento

$$\begin{aligned} \mathbf{A} : \mathbf{B} &= (A_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) : (B_{kl} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l) = \\ &= A_{ij} B_{kl} \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_l = A_{ij} B_{kl} (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_l) (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k) = \\ &= A_{ij} B_{kl} \delta_{il} \delta_{jk} = A_{ij} B_{ji} \quad (\text{escalar}) \end{aligned} \quad (6.9)$$

g. La elevación a una potencia entera (n) de un tensor está definida por el producto escalar del tensor por si mismo. Así

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{I} = \delta_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (6.10)$$

$$\mathbf{A}^1 = \mathbf{A} = A_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (6.11)$$

$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^2 \quad (6.12)$$

$$\mathbf{A}^4 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^3 \quad (6.13)$$

Es claro que si $\mathbf{A}$ es un tensor de segundo orden el resultado $\mathbf{A}^n$ será un tensor del mismo orden.

h. Un tensor cualquiera se puede descomponer en la suma de un tensor simétrico y uno antisimétrico.

$$\mathbf{A} = A_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \mathbf{B} + \mathbf{C} \quad (6.14)$$

en donde

$$A_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji}) + \frac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji}) = B_{ij} + C_{ij} \quad (6.15)$$

o sea

$$\underbrace{\mathbf{A}}_{\text{cualquier tensor}} = \frac{1}{2} \underbrace{(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)}_{\text{tensor simétrico}} + \frac{1}{2} \underbrace{(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)}_{\text{tensor antisimétrico}} \quad (6.16)$$

La primer contribución es un tensor simétrico porque al intercambiar índices

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji})\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \frac{1}{2}(A_{ji} + A_{ij})\mathbf{e}_j \mathbf{e}_i = \mathbf{B}^T \quad (6.17)$$

y la segunda parte es antisimétrica porque

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji})\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = -\frac{1}{2}(A_{ji} - A_{ij})\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i = -\mathbf{C}^T \quad (6.18)$$

i. El doble producto escalar de un tensor simétrico con uno antisimétrico es cero.

Para demostrar esto buscamos el resultado $w = \mathbf{A}:\mathbf{B}$ en donde $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, $\mathbf{B} = -\mathbf{B}^T$. Usando las representaciones de estos tensores en notación indicial se encuentra

$$w = A_{ik}B_{ki} = -A_{ki}B_{ik} = -A_{ik}B_{ki}$$

Esta última expresión implica $w = -w = 0$, que es la única posibilidad de satisfacer la igualdad. Por lo tanto $\mathbf{A}:\mathbf{B} = 0$, si $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ y $\mathbf{B} = -\mathbf{B}^T$

7. Transformación de tensores simétricos al sistema coordenado principal.

En Mecánica de Fluidos frecuentemente se encuentran tensores simétricos, por ejemplo los tensores de deformación y de esfuerzo. Estos tienen propiedades especiales que permiten se les asocien direcciones y magnitudes específicas a los esfuerzos y deformaciones. Las propiedades mencionadas están asociadas a los valores principales del tensor directamente relacionados a los ejes principales, y son análogas a los valores propios y vectores propios de una matriz.

Para encontrar los ejes principales se busca la transformación del vector $\mathbf{a}$ por un tensor simétrico $\mathbf{A}$. El resultado es

$$\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a} \quad (7.1)$$

Se desea que el vector $\mathbf{a}$ tenga la misma dirección de $\bar{\mathbf{a}}$, o sea

$$\bar{\mathbf{a}} = \lambda \mathbf{a} \quad (7.2)$$

en donde λ es un escalar. La substitución de (7.2) en (7.1) resulta en

$$\lambda \mathbf{a} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a} \quad (7.3)$$

En notación indicial esta ecuación toma la forma

$$A_{ij}a_j = \lambda a_i \quad (7.4)$$

ó

$$(A_{ij} - \lambda \delta_{ij})a_j = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (7.5)$$

Que también puede escribirse en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (7.6)$$

La ecuación (7.6) representa un sistema de ecuaciones lineales que tiene solución no trivial si y sólo si el determinante de la matriz es cero. Esto es

$$\det \{A_{ij} - \lambda \delta_{ij}\} = 0 \quad (7.7)$$

que puede expandirse, utilizando la fórmula dada por la ec. (3.9), como

$$\epsilon_{ijk} (A_{i1} - \lambda \delta_{i1})(A_{j2} - \lambda \delta_{j2})(A_{k3} - \lambda \delta_{k3}) = 0 \quad (7.8)$$

Si la matriz $\{A_{ij}\}$ es conocida, la ecuación (7.8) es la ecuación característica para las raíces de λ . Los tres valores de λ que satisfacen la ecuación característica se conocen como valores característicos o valores principales. La expansión de la ecuación (7.8), y el agrupamiento de los términos en potencias de λ , da la nueva forma de la ecuación

$$\lambda^3 - \lambda^2 I_A + \lambda II_A - III_A = 0 \quad (7.9)$$

Los coeficientes I_A , II_A y III_A son los invariantes del tensor $\mathbf{A}$ y están dados por

$$I_A = \text{traza}(\mathbf{A}) = A_{ii} \quad (7.10)$$

$$II_A = \frac{1}{2} [I_A^2 - \text{traza}(\mathbf{A}^2)] \quad (7.11)$$

$$III_A = \det \{\mathbf{A}\} \quad (7.12)$$

Nótese que la ecuación (7.10) define la traza de un tensor, o de una matriz, como la suma de los elementos de la diagonal principal.

Para una matriz real y simétrica, todos los valores propios son reales. Si los valores propios λ_1 , λ_2 , y λ_3 son diferentes, habrá tres vectores principales independientes entre si que satisfacen

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_1 = \lambda_1 \mathbf{a}_1 \quad (7.13)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_2 = \lambda_2 \mathbf{a}_2 \quad (7.14)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_3 = \lambda_3 \mathbf{a}_3 \quad (7.15)$$

Si $\mathbf{A}$ es simétrico, como en este caso, los tres vectores $\mathbf{a}$ son ortonormales. Esto puede demostrarse tomando el producto escalar de la ecuación (7.13) por $\mathbf{a}_2$

$$\mathbf{a}_2 \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_1) = \lambda_1 \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \quad (7.16)$$

Que se puede reducir si se introduce la ecuación (7.14) y la propiedad de simetría de $\mathbf{A}$ a lo siguiente

$$\lambda_1 (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1) = \lambda_2 (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1) \quad (7.17)$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces

$$\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1 = 0 \quad (7.18)$$

Puesto que $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, y $\mathbf{a}_3$ forman un conjunto de vectores ortogonales, estos pueden ser usados para definir vectores unitarios que sean la base de un sistema coordinado que tendrá ejes coincidentes con los vectores principales. Los vectores unitarios se encuentran de la normalización de $\mathbf{a}$

$$\alpha_i = \frac{\mathbf{a}_i}{\|\mathbf{a}_i\|}, \text{ para } i=1,2,3 \text{ (sin sumatoria)} \quad (7.19)$$

Debido a la ortogonalidad de los vectores

$$\alpha_{\bar{i}} \cdot \alpha_{\bar{j}} = \delta_{\bar{i}\bar{j}} \quad (7.20)$$

Esta ecuación en forma indicial es

$$\alpha_{\bar{i}k} \alpha_{\bar{j}k} = \delta_{\bar{i}\bar{j}} \quad (7.21)$$

en donde $\alpha_{\bar{i}k}$ es la k -ésima componente del vector $\alpha_{\bar{i}}$, porque estos pueden ser escritos como

$$\alpha_{\bar{i}} = \alpha_{\bar{i}k} \mathbf{e}_k \quad (7.22)$$

Nótese también que los coeficientes son los cosenos directores para la rotación del sistema con vectores unitarios $\mathbf{e}_i$ al definido por los $\alpha_{\bar{i}}$. Esto es más claro si se observa que

$$\alpha_{\bar{k}} \cdot \mathbf{e}_i = \alpha_{\bar{k}i} \quad (7.23)$$

Ahora se buscarán las reglas de transformación de las componentes del tensor

$$\mathbf{A} = A_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (7.24)$$

a las correspondientes en el sistema coordinado principal

$$\mathbf{A} = \bar{A}_{\bar{i}\bar{j}} \alpha_{\bar{i}} \alpha_{\bar{j}} \quad (7.25)$$

Con este objetivo se substituye la ecuación (7.22) en la (7.25), para encontrar

$$\mathbf{A} = \bar{A}_{\bar{i}\bar{j}} \alpha_{\bar{i}i} \alpha_{\bar{j}j} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (7.26)$$

La comparación de las ecuaciones (7.24) con (7.26) resulta en

$$A_{ij} = \bar{A}_{\bar{i}\bar{j}} \alpha_{\bar{i}i} \alpha_{\bar{j}j} \quad (7.27)$$

De la misma forma puede encontrarse

$$\bar{A}_{\bar{i}\bar{j}} = A_{ij} \alpha_{\bar{i}i} \alpha_{\bar{j}j} \quad (7.28)$$

Por otro lado las ecs. (7.13) a (7.15) se pueden resumir como

$$\mathbf{A} \cdot \alpha_{\bar{i}} = \lambda_{\bar{i}} \alpha_{\bar{i}} \quad (\text{sin sumatoria en } \bar{i}) \quad (7.29)$$

y ésta puede escribirse como

$$A_{ij} \alpha_{\bar{i}} = \lambda_{\bar{i}} \alpha_{j\bar{i}} \quad (\text{sin sumatoria en } \bar{i}) \quad (7.30)$$

La substitución de la ecuación (7.30) en la (7.28) da como resultado

$$\bar{A}_{\bar{i}\bar{j}} = \lambda_{\bar{i}} \alpha_{j\bar{i}} \alpha_{j\bar{j}}, \quad (\text{sin sumatoria en } \bar{i}) \quad (7.31)$$

Ahora se utiliza la ecuación (7.21) para reducir (7.31) a

$$\bar{A}_{\bar{i}\bar{j}} = \lambda_{\bar{i}} \delta_{\bar{i}\bar{j}}, \quad (\text{sin sumatoria en } \bar{i}) \quad (7.32)$$

Este último resultado permite concluir que en el sistema coordenado con vectores unitarios, el tensor simétrico $\mathbf{A}$ se transforma a un tensor diagonal y que los elementos de la diagonal principal son los valores característicos ó principales.

$$\mathbf{A} = \lambda_i \delta_{ij} \alpha_i \alpha_j \quad (7.33)$$

Esta definitivamente es una propiedad muy conveniente para la manipulación de tensores simétricos (Figura 3).

Esta propiedad también puede usarse para desacoplar sistemas de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias.

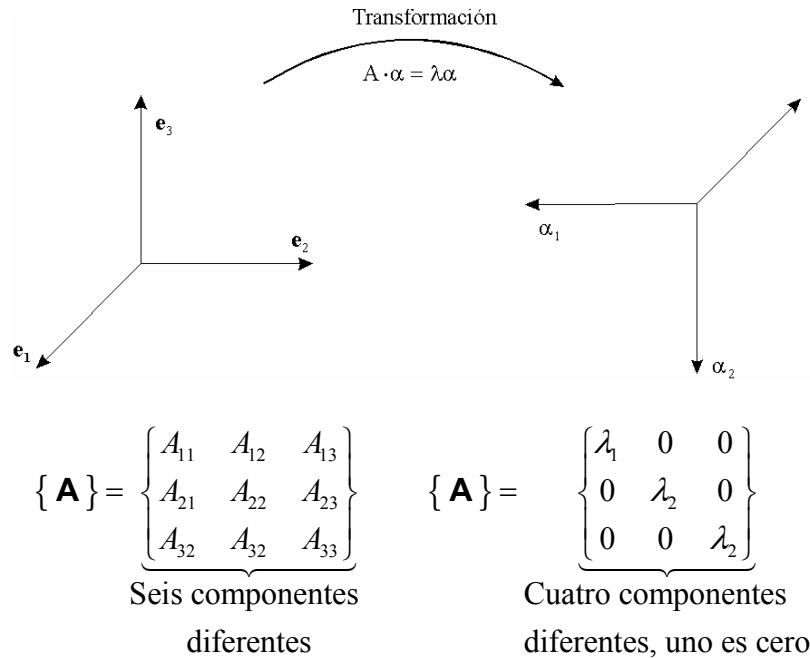


Figura 3. Transformación del tensor $\mathbf{A}$ de un sistema coordenado cartesiano cualquiera al sistema coordenado principal.

8. Operadores diferenciales

Ahora mostraremos la representación de operadores diferenciales en sistemas coordenados cartesianos usando notación indicial y la convención de la sumatoria. El operador nabla es un operador vectorial diferencial que se define como

$$\nabla = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (8.1)$$

Por lo que el gradiente de un escalar no requiere mayor manipulación puesto que al aplicar (8.1) a un escalar φ se obtiene

$$\nabla \varphi = \mathbf{e}_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad (8.2)$$

Sin embargo el gradiente del vector

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i$$

da un tensor como se muestra a continuación

$$\nabla \mathbf{v} = \left(\mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) (v_j \mathbf{e}_j) = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (8.3)$$

Es claro que cada uno de los nueve componentes del tensor $\nabla \mathbf{v}$ es $\frac{\partial v_j}{\partial x_i}$.

El gradiente de un tensor de segundo orden es un tensor de tercer orden como se demuestra enseguida

$$\nabla \mathbf{A} = \left(\mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) (A_{jk} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k) = \frac{\partial A_{jk}}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \quad (8.4)$$

La divergencia es el producto escalar del operador nabla aplicado a un vector

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= \left(\mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \cdot (v_j \mathbf{e}_j) = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \delta_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \\ &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \quad (\text{escalar}) \end{aligned} \quad (8.5)$$

Para un tensor, la divergencia es

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A} &= \left(\mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \cdot (A_{jk} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k) = \frac{\partial A_{jk}}{\partial x_i} (\delta_{ij}) \mathbf{e}_k \\ &= \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_i} \mathbf{e}_k \quad (\text{vector})\end{aligned}\tag{8.6}$$

En forma expandida este resultado es

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A} &= \left(\frac{\partial A_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{31}}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial A_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{32}}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_2 \\ &\quad + \left(\frac{\partial A_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{33}}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_3\end{aligned}\tag{8.7}$$

Por lo tanto el término $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ representa el producto escalar de un vector con un tensor, y el resultado es

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} &= v_i \mathbf{e}_i \cdot \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_j} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \right) = \left(v_i \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \mathbf{e}_k \right) \\ &= \left(v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_1 \\ &\quad + \left(v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_2 \\ &\quad + \left(v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_3\end{aligned}\tag{8.8}$$

La ecuación de movimiento de un fluido en estado estacionario tiene la forma

$$\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g}\tag{8.9}$$

El componente en la dirección x_1 es

$$\rho \left(v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} + \rho g_1$$

En Mecánica de Fluidos, transporte de energía y masa es crucial el entender este tipo de productos.

El operador laplaciano esta definido como la divergencia del operador nabra

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla \quad (8.11)$$

por lo tanto para un escalar

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= \nabla \cdot (\nabla \varphi) = \left(\mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \cdot \left(\mathbf{e}_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) \\ &= \delta_{ij} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_i} \end{aligned} \quad (8.12)$$

ó

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} \quad (8.13)$$

De la forma análoga el laplaciano de un vector es

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \right) v_k \mathbf{e}_k \quad (8.14a)$$

ó indirectamente $\nabla \cdot (\nabla \mathbf{v}) = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_j} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \right) = \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_i} \mathbf{e}_k = \nabla^2 \mathbf{v} \quad (8.14b)$

El rotacional de un vector también se puede escribir en notación indicial y es

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{x} \mathbf{v} &= \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{x} v_j \mathbf{e}_j = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \mathbf{x} \mathbf{e}_j \\ \nabla \mathbf{x} \mathbf{v} &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_k \end{aligned} \quad (8.15)$$

Como conclusión del capítulo:

Debe apreciarse el ahorro que se logra en la escritura, tanto en tiempo como en espacio, al usar la notación indicial para vectores y escalares. Este ahorro se vuelve más importante cuando se trabaja con operadores diferenciales. Esto podrá apreciarse mejor cuando se demuestre en los ejemplos de final del siguiente capítulo la derivada temporal del Jacobiano, los teoremas del transporte y algunas de las ecuaciones de conservación.

Problemas propuestos

Grupo 1

Problema 1

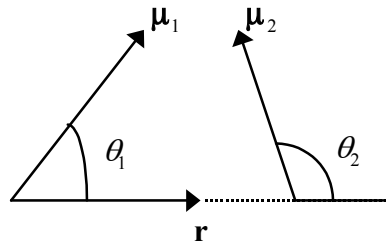
- (a) Demuestre que la magnitud del vector $\mathbf{a}$ dada por $a = \|\mathbf{a}\| = (a_x^2 + a_y^2)^{1/2}$ es la misma en un sistema coordenado xy y en el $x'y'$, que es el generado al rotar el sistema original un ángulo φ alrededor del eje z , o sea

$$(a_x^2 + a_y^2)^{1/2} = (a_{x'}^2 + a_{y'}^2)^{1/2}$$

Esto es, el vector es invariante a la rotación de los ejes coordenados.

- (b) Un punto (x, y) del vector $\mathbf{a}$ define un ángulo α relativo al eje x y α' relativo al eje x' . El ángulo entre los ejes x y x' es φ . Demuestre que $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$ definen la misma dirección en el espacio cuando se expresan en términos de los componentes en el sistema xy y en el xy' . Esto es $\alpha' = \alpha - \varphi$.

Problema 2



la energía de interacción entre dos dipolos de momento μ_1 y μ_2 puede expresarse como

$$V = -\frac{\mu_1 \cdot \mu_2}{\|\mathbf{r}\|^3} + \frac{3(\mu_1 \cdot \mathbf{r})(\mu_2 \cdot \mathbf{r})}{\|\mathbf{r}\|^5} \quad (1)$$

y en forma escalar como

$$V = \frac{\|\mu_1\| \|\mu_2\|}{\|\mathbf{r}\|^3} (2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \varphi) \quad (2)$$

Aquí θ_1 y θ_2 son los ángulos de μ_1 y μ_2 relativos a $\mathbf{r}$. El ángulo azimutal de μ_2 relativo al plano $\mu_1 - \mathbf{r}$ es φ . Demuestre que las dos formas son equivalentes.

Sugerencia: utilice la siguiente identidad trigonométrica en coordenadas esféricas que relaciona las direcciones (θ_1, φ_1) y (θ_2, φ_2) separadas por el ángulo γ

$$\cos \gamma = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Problema 3

(a) Encuentre un vector $\mathbf{a}$ que sea perpendicular a

$$\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

(b) si además deseamos que $\mathbf{a}$ sea un vector unitario ¿Cual es el vector?

Problema 4

Demuestre que $\nabla(\phi\psi) = \psi\nabla\phi + \phi\nabla\psi$, en donde ϕ y ψ son funciones escalares diferenciables las cuales dependen de x_1 , x_2 y x_3 .

Problema 5

Pruebe que $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{b}$, en donde $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son campos vectoriales dependientes de x_1 , x_2 y x_3 .

Problema 6

Dado que el vector $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ corresponde al sistema de mano derecha con coordenadas X_1 , X_2 y X_3 . ¿Cuales son las componentes de $\mathbf{a}$ en el sistema de coordenadas $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$ y $\bar{X}_3$? si estos ejes se obtienen de la rotación de X_1 y $\bar{X}_2$ alrededor de X_3 permaneciendo este fijo. El ángulo entre X_1 y $\bar{X}_1$ es 60° .

Problema 7

El tensor $\mathbf{A}$ tiene los siguientes componentes en el sistema X_1 , X_2 , X_3 .

$$\{\mathbf{A}\} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Considerando la rotación de los ejes del problema 6, ¿cuáles son sus componentes en el sistema $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$, $\bar{X}_3$?

Problema 8

Prueba las tres siguientes relaciones

$$a) \in_{mnp} \det\{A\} = \in_{ijk} a_{im} a_{jn} a_{kp}$$

$$b) 6 \det\{A\} = \in_{ijk} \in_{mnp} a_{im} a_{jn} a_{kp}$$

$$c) \in_{ijk} \in_{ijk} = 6.$$

Problema 9

Usando las propiedades del símbolo de permutación y la delta de Kronecker demuestra

$$\in_{ijk} \in_{kpm} = \delta_{ip} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jp}$$

Problema 10

Demuestre que los vectores **a**, **b** y **c** son coplanares si

$$\in_{ijk} a_i b_j c_k = 0$$

Problema 11

Pruebe que el área de un paralelogramo formado por los vectores **a** y **b** es

$$\text{área} = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$$

Problema 12

Pruebe que el volumen del paralelepípedo formado por los vectores **a**, **b** y **c** es

$$\text{Volumen} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

Problema 13

Demuestre que si $\{C_{ij}\} = \{A_{ik}\} \{B_{kj}\}$ entonces $\det\{C_{ij}\} = \det\{A_{ik}\} \det\{B_{kj}\}$.

Problema 14

Encuentre el producto del vector $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$ con el tensor

$$\{\mathbf{A}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Si el producto no es conmutativo, encuentre ambas posibilidades.

Problema 15

Encuentre $\mathbf{a} \times \mathbf{A}$ y $\mathbf{A} \times \mathbf{a}$ para el vector y tensor del problema 14 ¿Están relacionados los resultados? ¿Cómo?

Problema 16

Sí

$$\{\mathbf{A}\} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \{\mathbf{B}\} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcule $\mathbf{A}:\mathbf{B}$, ¿Es el mismo valor?**Grupo 2****Problema 11**Pruebe la identidad $\mathbf{a} \times \nabla \times \mathbf{a} = \frac{1}{2} \nabla \left(\|\mathbf{a}\|^2 \right) - \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{a}$.**Problema 12**Pruebe que para un escalar φ dependiente de x_1 , x_2 y x_3 , $\nabla \times (\varphi \nabla \varphi) = 0$.**Problema 13**Pruebe que para un escalar α dependiente de x_1 , x_2 y x_3 , $\nabla \times (\nabla \alpha) = 0$.**Problema 14**

Pruebe que la divergencia del rotacional de un vector es cero, o sea

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0$$

Problema 15

Dado el tensor con los siguientes componentes

$$\{\mathbf{A}\} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Encuentre los valores principales.
- Encuentre los ejes principales.
- Demuestre que $\mathbf{A}$ se diagonaliza en el sistema coordenado principal.
- Calcule $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^3$ y $\mathbf{A}^4$.
- Demuestre que el teorema de Cayley-Hamilton es satisfecho por el tensor $\mathbf{A}$ (Ver anexo al final de este grupo de problemas).

- f. calcule I_A , II_A , III_A con los componentes de $\mathbf{A}$ en el sistema coordenado principal y demuestre que los valores son idénticos a los encontrados con las componentes originales.

Problema 16

Pruebe que I_A , II_A , III_A para un tensor arbitrario $\mathbf{A}$ son invariantes a cualquier transformación de coordenadas.

Problema 17

Pruebe que $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}^T$.

Problema 18

Pruebe que $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B})^T$.

Problema 19

Use notación indicial para probar las siguientes identidades para los campos vectoriales y escalar $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ y α

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{a} - \mathbf{b} (\nabla \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{a} (\nabla \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{b}$$

$$\nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \nabla \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \nabla \mathbf{a}$$

$$\nabla \cdot (\alpha \mathbf{b}) = \alpha \nabla \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \nabla \alpha$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) = 0$$

$$\nabla \times (\alpha \mathbf{b}) = \alpha \nabla \times \mathbf{b} + \nabla \alpha \times \mathbf{b}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{b}) = \nabla \nabla \cdot \mathbf{b} - \nabla^2 \mathbf{b}$$

Problema 20

Use notación indicial para probar que

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

Problema 21

Si $\{\mathbf{A}\}$ es una matriz de $n \times n$ elementos, demuestre que

$$\det(-\{\mathbf{A}\}) = (-1)^n \det \{\mathbf{A}\}.$$

Problema 22

Decida si el siguiente sistema de ecuaciones tiene solución no trivial

$$x + 3y + 3z = 0$$

$$\begin{aligned}x - y + z &= 0 \\ 2x + y + 3z &= 0.\end{aligned}$$

Problema 23

Encuentre la inversa de

$$\{\mathbf{A}\} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Problema 24

Demuestre que si una matriz $\{\mathbf{A}\}$ es ortogonal su determinante es uno.

Anexo Grupo 2

El teorema de Cayley-Hamilton.

El sistema coordenado principal puede ser usado para probar este teorema que permite expandir potencias superiores de $\mathbf{A}$ en una forma simple. En el sistema coordenado de ejes principales

$$A_{ij} = \lambda_{(i)} \delta_{ij}$$

de tal forma que los elementos de $\mathbf{A}^2$

$$A_{ij}^2 = \lambda_{(i)}^2 \delta_{ij}$$

y los elementos de $\mathbf{A}^3$ son

$$A_{ij}^3 = \lambda_{(i)}^3 \delta_{ij}$$

Puesto que los valores principales son independientes del sistema coordenado, entonces los valores de $\mathbf{A}^2$ y $\mathbf{A}^3$ son un conjunto de valores fijo. Dado que

$$\lambda^3 = I_A \lambda^2 - II_A \lambda + III_A$$

entonces

$$A_{ij}^3 = \lambda_{(i)}^3 \delta_{ij} = I_A \lambda_{(i)}^2 \delta_{ij} - II_A \lambda_{(i)} \delta_{ij} + III_A \delta_{ij}$$

Sin embargo, en notación tensorial

$$\mathbf{A}^3 = I_A \mathbf{A}^2 - II_A \mathbf{A} + III_A \mathbf{I}$$

este es el teorema de Cayley-Hamilton. Nótese que todas las potencias superiores de $\mathbf{A}$ pueden ser reducidas a potencias de $\mathbf{A}^2$.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^4 &= \mathbf{A}^3 \cdot \mathbf{A} = I_A \mathbf{A}^3 - II_A \mathbf{A}^2 + III_A \mathbf{A} = \\ &= I_A (I_A \mathbf{A}^2 - II_A \mathbf{A} + III_A \mathbf{I}) - II_A \mathbf{A}^2 + III_A \mathbf{A} \end{aligned}$$

Otros problemas

Problema 25

Usando las propiedades del sistema coordenado principal resuelva el problema dado por las siguientes dos ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\frac{dy_1}{dt} = y_1 - y_2 \qquad \frac{dy_2}{dt} = -y_1 + y_2$$

que estan sujetas a la condicion inicial

$$\text{En } t = 0 \quad y_1 = 1 \quad \text{y} \quad y_2 = 0$$

Lo que se solicita es que defina una transformación para desacoplar las ecuaciones diferenciales. Se podrá entonces resolver fácilmente para las variables transformadas y finalmente usar la transformacion inversa para obtener las variables dependientes deseadas originalmente. Esto se muestra esquemáticamente enseguida

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} \xrightarrow{\text{Transformación al sistema principal}} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \bar{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{u} \rightarrow \text{Solución para } \mathbf{u}(t) \xrightarrow{\text{Transformación al sistema original}} \mathbf{y}(t)$$

En este caso

$$\{\mathbf{y}\} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \{\mathbf{A}\} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \{\bar{\mathbf{A}}\} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

En donde λ_1 y λ_2 son los valores propios del tensor $\mathbf{A}$.

Problema 26

Extienda el metodo propuesto en el enunciado anterior para la solución de las dos ecuaciones diferenciales de segundo orden siguiente

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = y_1 - y_2 \qquad \frac{d^2 y_2}{dx^2} = -y_1 + y_2$$

que estan sujetas a las condiciones de frontera

$$\text{En } x = 0 \quad y_1 = 1 \quad \text{y} \quad y_2 = 0$$

$$\text{En } x = 1 \quad y_1 = 0 \quad \text{y} \quad y_2 = 1$$

II. Sistemas de coordenadas curvilíneas

0. Algunos comentarios sobre el material incluido en este capítulo

Los temas que se presentan en este capítulo son fundamentales para estudios de ingeniería química por las dos siguientes razones: a) el desarrollo de las ecuaciones de transporte para cualquier geometría, y b) el planteamiento y solución de problemas de transporte en situaciones físicas que puedan ser representados en sistemas de coordenadas ortogonales. Por otro lado, aunque no se revisa el manejo de operadores diferenciales en sistemas no ortogonales de coordenadas se presentan la base para su desarrollo.

Creemos que el material anterior, junto con el presentado en el Capítulo I, permitirá el desarrollo y comprensión del alcance de los teoremas del transporte y de la divergencia que son las herramientas fundamentales para la deducción de las ecuaciones de transporte de momentum, energía y masa.

En el desarrollo de las ecuaciones para la transformación de las componentes de un vector de un sistema a otro se ha introducido el uso de matrices. En la mayoría de los casos, para insistir en la consistencia de la multiplicación de matrices y de su igualdad, se han indicado el número de renglones y columnas. Muchas de las operaciones indicadas en términos de matrices podrían hacerse usando, lo revisado en el Capítulo I relacionado a tensores y notación indicial. Esto se deja como ejercicio al lector, y es de particular importancia realizar estos ejercicios si se va a profundizar en el estudio de problemas de transporte en sistemas de coordenadas generalizadas. A los lectores con este objetivo se recomienda el estudio de los libros de Aris [2] y Simmonds [9].

El material presentado en este capítulo se complementa con las fórmulas de los apéndices A y B que se encuentran en la parte final del texto.

Sobre las demás referencias

Los temas aquí presentados se desarrollan de diferente manera a la de algunos textos. En este capítulo se presenta la definición de los sistemas de coordenados curvilíneos, las expresiones para la transformación de vectores de un sistema a otro y el desarrollo en forma general de los operadores diferenciales. Esta forma de presentación es la que sigue Arfken en su libro [1]. Otros autores prefieren hacer el desarrollo en forma particular para cada sistema de coordenadas y en general se restringen a los sistemas de coordenadas polares, cilíndricas y esféricas [Greenberg]. Otros autores, prefieren desarrollar los operadores diferenciales cuando ellos sean requeridos, y así por ejemplo obtienen el Laplaciano cuando revisan la solución de la ecuación de conducción de calor para

geometrías esféricas y cilíndricas [Kreyszig]. La forma utilizada en nuestro texto permite generalizar a otros sistemas coordenados, y se puede sin mayor problema que el algebraico obtener todas la expresiones para los doce sistemas de coordenadas ortogonales reportadas por Spiegel [12, 13].

1. Desarrollo de las bases vectoriales de sistemas de coordenadas curvilíneas

Se introducirán ahora sistemas de coordenadas curvilíneas con vectores unitarios ortogonales (cilíndricas y esféricas) y sistemas de coordenadas no-ortogonales.

Comenzaremos por considerar tres funciones de valor simple en términos de las coordenadas rectangulares x_1, x_2, x_3 , en una región tridimensional:

$$u^1 = f_1(x_1, x_2, x_3), \quad u^2 = f_2(x_1, x_2, x_3), \quad u^3 = f_3(x_1, x_2, x_3) \quad (1.1)$$

Supondremos que estas funciones pueden invertirse para un punto con coordenadas u^1, u^2, u^3 y entonces encontrar los valores correspondientes x_1, x_2, x_3 . Esta idea la podemos expresar como

$$x_1 = \phi_1(u^1, u^2, u^3), \quad x_2 = \phi_2(u^1, u^2, u^3), \quad x_3 = \phi_3(u^1, u^2, u^3) \quad (1.2)$$

O sea que a cada punto en el espacio le corresponden los conjuntos de valores u^1, u^2, u^3 y x_1, x_2, x_3 . Para cada conjunto de valores hay un punto en el dominio. Las funciones u^1, u^2, u^3 se denominan coordenadas generales o curvilíneas. A través de cada punto pasan tres superficies de coordenada constante

$$u^1 = K_1, \quad u^2 = K_2, \quad u^3 = K_3 \quad (1.3)$$

Estas superficies (Figura 1) se intersecan en un punto y dan lugar a tres curvas: la curva C_{12} por la intersección de u^1 y u^2 ; la curva C_{13} por la intersección de u^1 y u^3 ; y la curva C_{23} por intersección de u^2 y u^3 . Esto se muestra esquemáticamente en la Figura 2.

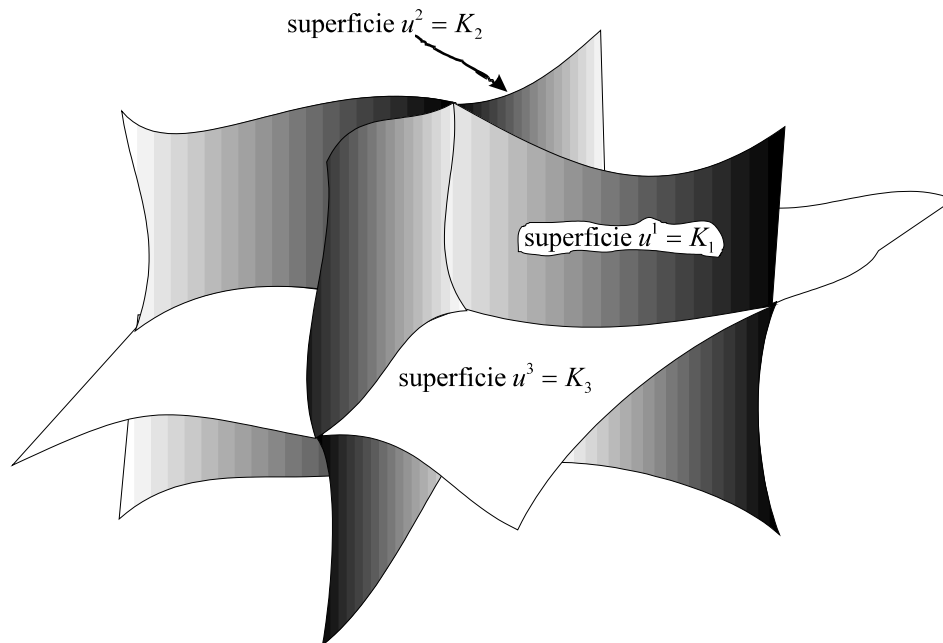


Figura 1. Superficies que generan un sistema coordenado curvilíneo.

Es claro que en el punto P se intersecan estas tres curvas. Las tangentes a estas curvas en un punto dado se pueden usar para generar un sistema coordenado no-ortogonal, como se muestra en la Figura 2. Para ello necesitamos encontrar expresiones para los vectores $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ y $\mathbf{a}_3$ que tienen la dirección de las tangentes. Estos serán la base del sistema coordenado. Para el desarrollo de esta base expresamos

$$\begin{aligned} P &= P(x_1, x_2, x_3) & \mathbf{r} &= \mathbf{r}(x_1, x_2, x_3) \\ P &= P(u^1, u^2, u^3) & \mathbf{r} &= \mathbf{r}(u^1, u^2, u^3) \end{aligned} \quad (1.4)$$

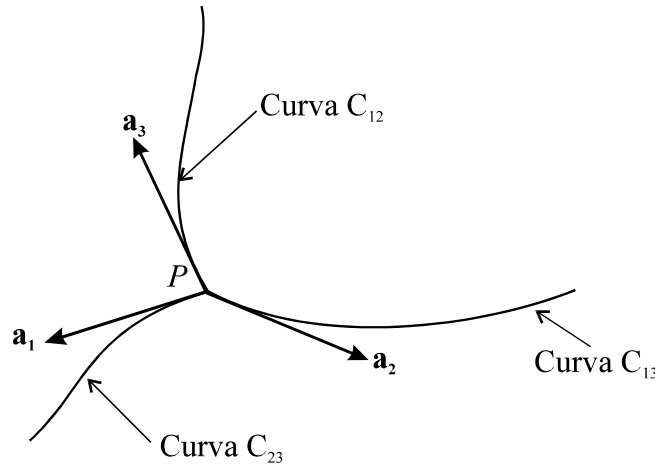


Figura 2. Base vectorial del sistema coordenado curvilíneo definido por las coordenadas u^1, u^2, u^3 que generan las curvas C_{12} , C_{13} y C_{23} .

Como se muestra en la Figura 3 y en la ecuación (1.4) P representa un punto cualquiera en el espacio, y $\mathbf{r}$ es el vector de posición que indica el punto en cualquiera de los sistemas coordenados.

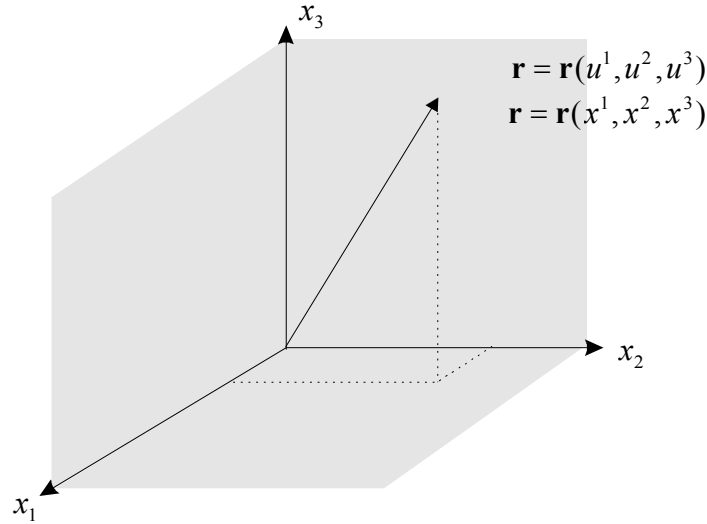


Figura 3. El vector de posición que determina el punto P puede expresarse en el sistema coordenado cartesiano o en el sistema coordenado curvilíneo.

Por ello un cambio diferencial en $\mathbf{r}$ se puede representar en términos de cualquiera de los dos sistemas coordenados como:

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i} dx_i \quad (1.5)$$

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} du^i \quad (1.6)$$

Los vectores unitarios $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ de un sistema cartesiano están definidos como

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i} \quad (1.7)$$

entonces la ecuación (1.5) puede escribirse en coordenadas rectangulares como

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_i dx_i \quad (1.8)$$

La definición de los vectores base para el sistema de coordenadas generalizadas se puede hacer de forma similar

$$\mathbf{a}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} \quad (1.9)$$

En un sistema cartesiano de coordenadas $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ son ortogonales entre sí y de magnitud unitaria, pero en un sistema generalizado esto no es necesariamente cierto. Sin embargo, de acuerdo a las ecs. (1.9), también se puede escribir

$$d\mathbf{r} = \mathbf{a}_i du^i \quad (1.10)$$

Y se pueden obtener los vectores unitarios de acuerdo a la siguiente fórmula

$$\hat{\mathbf{e}}_i = \frac{\mathbf{a}_i}{\sqrt{\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i}} = \frac{\mathbf{a}_i}{\|\mathbf{a}_i\|} \quad (1.11)$$

En general en el sistema curvilíneo tanto $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ como $\hat{\mathbf{e}}_1$, $\hat{\mathbf{e}}_2$, $\hat{\mathbf{e}}_3$ son funciones de posición, mientras que en un sistema cartesiano las bases vectoriales son constantes. Los conceptos introducidos hasta aquí los ejemplificamos a continuación con uno de los sistemas curvilíneos más sencillos: el sistema coordenado cilíndrico.

Ejemplo 1

En este ejemplo encontraremos los vectores que forman la base del sistema coordenado cilíndrico. Para ello utilizaremos las relaciones, disponibles en el apéndice B, que definen a las coordenadas curvilíneas en términos de las coordenadas cartesianas

$$u^1 = r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad (E1.1)$$

$$u^2 = \theta = \tan^{-1} \left(\frac{x_2}{x_1} \right) \quad (E1.2)$$

$$u^3 = z = x_3 \quad (E1.3)$$

Las superficies correspondientes a cada coordenada se muestran en el apéndice B. Para obtener los vectores $\mathbf{a}_i$ usamos las ecs. (19)

$$\mathbf{a}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} = \frac{\partial x_j}{\partial u^i} \mathbf{e}_j \quad (E1.4)$$

Aquí es claro que necesitamos invertir las funciones $u^i = u^i(x_1, x_2, x_3)$ dadas por las ecuaciones (E1.1)-(E1.3) para obtener explícitamente x_1 , x_2 , x_3 . En este caso la inversión no es complicada y se obtiene:

$$x_1 = r \cos \theta = u^1 \cos u^2 \quad (E1.5)$$

$$x_2 = r \sin \theta = u^1 \sin u^2 \quad (E1.6)$$

$$x_3 = z = u^3 \quad (E1.7)$$

La ecuación (E1.4) puede expandirse para cada uno de las componentes

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\partial x_1}{\partial u^1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial u^1} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial u^1} \mathbf{e}_3 \quad (E1.8)$$

$$\mathbf{a}_2 = \frac{\partial x_1}{\partial u^2} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial u^2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial u^2} \mathbf{e}_3 \quad (E1.9)$$

$$\mathbf{a}_3 = \frac{\partial x_1}{\partial u^3} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial u^3} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial u^3} \mathbf{e}_3 \quad (\text{E1.10})$$

Este sistema de ecuaciones en forma matricial es

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{pmatrix}}_{3 \times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u^1} & \frac{\partial x_2}{\partial u^1} & \frac{\partial x_3}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u^2} & \frac{\partial x_2}{\partial u^2} & \frac{\partial x_3}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u^3} & \frac{\partial x_2}{\partial u^3} & \frac{\partial x_3}{\partial u^3} \end{pmatrix}}_{3 \times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}}_{3 \times 1} \quad (\text{E1.11})$$

Nótese que los renglones de la matriz del lado izquierdo son las bases vectoriales y los renglones de la matriz cuadrada del lado derecho son los componentes de cada uno de los vectores base. Utilizando las ecuaciones (E1.5)-(E1.7) se obtiene

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u^1} & \frac{\partial x_2}{\partial u^1} & \frac{\partial x_3}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u^2} & \frac{\partial x_2}{\partial u^2} & \frac{\partial x_3}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u^3} & \frac{\partial x_2}{\partial u^3} & \frac{\partial x_3}{\partial u^3} \end{pmatrix}}_{3 \times 3} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos u^2 & \sin u^2 & 0 \\ -u^1 \sin u^2 & u^1 \cos u^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{3 \times 3} \quad (\text{E1.12})$$

Ahora utilizando esta información en (E1.8)-(E1.10) se obtiene

$$\mathbf{a}_1 = \cos u^2 \mathbf{e}_1 + \sin u^2 \mathbf{e}_2 = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2 \quad (\text{E1.13})$$

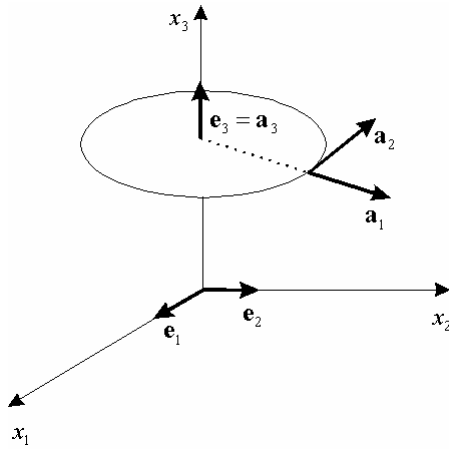
$$\mathbf{a}_2 = -u^1 \sin u^2 \mathbf{e}_1 + u^1 \cos u^2 \mathbf{e}_2 = -r \sin \theta \mathbf{e}_1 + r \cos \theta \mathbf{e}_2 \quad (\text{E1.14})$$

$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{e}_3 \quad (\text{E1.15})$$

Estos son la base vectorial del sistema coordenado cilíndrico y se muestran en la figura siguiente. Realizando los productos para $i \neq j$ se encuentra que

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3 = 0$$

Por lo que las bases vectoriales del sistema coordenado cilíndrico son ortogonales.



Sin embargo los vectores base no son necesariamente los vectores unitarios $\hat{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_r$, $\hat{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{e}_\theta$, $\hat{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{e}_z$. Esto porque

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 = 1$$

$$\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2 = r^2 \neq 1$$

$$\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3 = 1$$

Debemos entonces normalizar $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ de acuerdo a la ec. (1.11) para obtener los vectores unitarios de este sistema de coordenadas curvilíneas

$$\hat{\mathbf{e}}_i = \frac{\mathbf{a}_i}{\sqrt{\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i}} \quad (\text{E1.16})$$

Con este resultado y con las ecs. (E1.13)-(E1.15) obtenemos

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{e}}_r = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2 \quad (\text{E1.17})$$

$$\hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{e}}_\theta = -\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2 \quad (\text{E1.18})$$

$$\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_z = \mathbf{e}_3 \quad (\text{E1.19})$$

Que son los vectores unitarios base apropiados. Enfatizamos que en este caso los vectores $\mathbf{a}_i$ y $\hat{\mathbf{e}}_i$ son funciones de posición, sin embargo en cada punto son ortogonales entre si. Debemos notar que si se restringe el sistema coordenado a un plano en donde z es constante se recupera el sistema de coordenadas polares.

2. Bases vectoriales recíprocas

Los tres vectores $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ forman un paralelepípedo de volumen

$$V = \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) \quad (2.1)$$

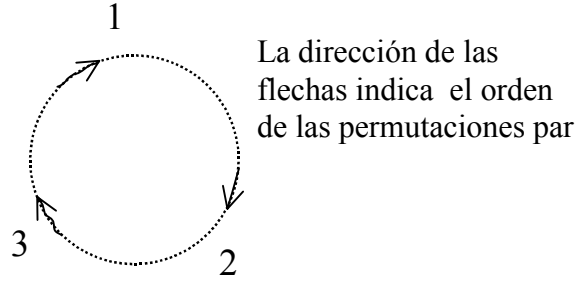
En términos de $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ se pueden encontrar otros tres vectores

$$\mathbf{a}^1 = \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}{V}, \quad \mathbf{a}^2 = \frac{\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1}{V}, \quad \mathbf{a}^3 = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{V} \quad (2.2)$$

Estos vectores son normales a las superficies u^1 , u^2 , u^3 respectivamente. La ecuación (2.1) se puede escribir en forma abreviada como

$$\mathbf{a}^i = \frac{\mathbf{a}_j \times \mathbf{a}_k}{V} \quad (2.3)$$

en donde i, j, k son una permutación par de 123. Esto se explica en forma gráfica enseguida:



De la ecuación (2.13) se puede ver que

$$\mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}_1 = \frac{\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)}{V} = 1$$

$$\mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}_2 = \frac{\mathbf{a}_2 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)}{V} = 0$$

de tal manera que en general

$$\mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (2.4)$$

en donde se ha usado la delta de Kronecker δ_{ij} para compactar la nomenclatura. Los vectores $\mathbf{a}^i$ se denominan las bases vectoriales recíprocas. La ecuación (2.4) muestra la ventaja lograda al introducir las bases recíprocas puesto que el producto escalar de dos vectores expresados en coordenadas curvilíneas se simplifica significativamente si se representa un vector en la base vectorial original y el otro en la base recíproca. Nótese que si los vectores $\mathbf{a}_i$ son ortogonales, entonces los vectores $\mathbf{a}^i$ son ortogonales también. Si se usan los vectores $\mathbf{a}_i$ y $\mathbf{a}^i$ para representar un cambio diferencial en la dirección $\mathbf{r}$

$$d\mathbf{r} = du_j \mathbf{a}^j = du^i \mathbf{a}_i \quad (2.5)$$

Tomando ahora el producto escalar con $\mathbf{a}_k$ (en donde $k = 1, 2$ o 3) se obtiene

$$\mathbf{a}_k \cdot d\mathbf{r} = du_j \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}^j = du^i \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_i \quad (2.6)$$

ó

$$du_k = du^i g_{ki} \quad (2.7)$$

En donde se ha introducido el símbolo g_{ki} que está dado por

$$g_{ki} = \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_i \quad (2.8)$$

Estas cantidades se denominan coeficientes métricos. Análogamente se obtiene también

$$\mathbf{a}^k \cdot d\mathbf{r} = du_j \mathbf{a}^k \cdot \mathbf{a}^j = du^i \mathbf{a}^k \cdot \mathbf{a}_i \quad (2.9)$$

$$du^k = du_j g^{kj} \quad (2.10)$$

En donde se ha introducido la definición

$$g^{kj} = \mathbf{a}^k \cdot \mathbf{a}^j \quad (2.11)$$

que se denominan también coeficientes métricos. Cualquier vector $\mathbf{F}$ puede escribirse en términos de las bases originales o de las bases del sistema recíproco

$$\mathbf{F} = f^i \mathbf{a}_i = f_i \mathbf{a}^i \quad (2.12)$$

Nótese que

$$\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{F} = f^i g_{ki} = f_k \quad (2.13)$$

En esta ecuación f_k se denominan las componentes covariantes del vector $\mathbf{F}$. También de la ecuación (2.11) se puede obtener

$$\mathbf{a}^k \cdot \mathbf{F} = f_i g^{ki} \quad (2.14)$$

En donde f^k se denominan las componentes contravariantes del vector $\mathbf{F}$. Los vectores unitarios de ambos sistemas se pueden obtener a partir de las bases vectoriales $\mathbf{a}_i$

$$\hat{\mathbf{e}}_i = \frac{\mathbf{a}_i}{\sqrt{\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i}} = \frac{\mathbf{a}_i}{\sqrt{g_{ii}}} \quad (2.15)$$

De tal manera que en el sistema de las bases originales el vector $\mathbf{F}$ toma la forma

$$\mathbf{F} = \sqrt{g_{ii}} f^i \hat{\mathbf{e}}_i = \underbrace{F_i}_{\text{componentes físicas}} \hat{\mathbf{e}}_i \quad (2.16)$$

En forma análoga en el sistema de las bases recíprocas

$$\mathbf{F} = \sqrt{g^{ii}} f_i \hat{\mathbf{e}}^i = \underbrace{F^i}_{\text{componentes físicas}} \hat{\mathbf{e}}^i \quad (2.17)$$

En este sistema los vectores unitarios son

$$\hat{\mathbf{e}}^i = \frac{\mathbf{a}^i}{\sqrt{g^{ii}}} \quad (2.18)$$

Para transformar un vector expresado en términos de las componentes contravariantes a uno en términos de las componentes covariantes o viceversa se pueden utilizar las ecuaciones (2.13) y (2.14) escritas en forma matricial

$$\underbrace{\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}}_{3 \times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}}_{3 \times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{pmatrix}}_{3 \times 1} \quad (2.19)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{pmatrix}}_{3 \times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{pmatrix}}_{3 \times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}}_{3 \times 1} \quad (2.20)$$

Es claro que las ecuaciones (2.19) y (2.20) pueden utilizarse para obtener las componentes covariantes a partir de las contravariantes y viceversa. Estas ecuaciones implican

$$\underbrace{\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}}_{3 \times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{pmatrix}}_{3 \times 3} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{3 \times 3} \quad (2.21)$$

$$\text{ó} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{pmatrix}}_{3 \times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}}_{3 \times 3} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{3 \times 3} \quad (2.22)$$

Cada uno de los elementos de la matriz identidad resultado de la multiplicación de matrices indicado en las ecuaciones (2.21) y (2.22) puede escribirse en términos de una sumatoria y de la delta de Kronecker en la forma siguiente:

$$g^{ik} g_{kj} = \delta_{ij} \quad (2.23)$$

Las ecuaciones (2.21) y (2.22) implican también que

$$\underbrace{\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}}_{3 \times 3} = \underbrace{\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{pmatrix}}_{3 \times 3}^{-1} \quad (2.24)$$

$$\text{ó} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{pmatrix}}_{3 \times 3} = \underbrace{\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}}_{3 \times 3}^{-1} \quad (2.25)$$

Ahora debemos recordar que

$$\mathbf{a}_i = \frac{\partial x_j}{\partial u^i} \mathbf{e}_j \quad (2.26)$$

Por lo que el coeficiente métrico puede encontrarse en términos de la derivada de las coordenadas cartesianas como

$$\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_i = g_{ki} = \frac{\partial x_m}{\partial u^k} \frac{\partial x_j}{\partial u^i} \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_j$$

Este resultado se puede simplificar para cada uno de los nueve coeficientes métricos para obtener

$$g_{ki} = \frac{\partial x_m}{\partial u^k} \frac{\partial x_m}{\partial u^i} \quad (2.27)$$

La obtención los coeficientes métricos requiere de las relaciones $x_i = x_i(u^1, u^2, u^3)$. Enfatizamos que la ecuación (2.27) es válida para $k = 1, 2, 3$ y $i = 1, 2, 3$ por lo que de ella se pueden obtener los nueve coeficientes métricos a partir de $x_i = x_i(u^1, u^2, u^3)$. La matriz formada con los nueve g_{ki} , en términos de las derivadas de las coordenadas cartesianas con respecto a las coordenadas curvilíneas, es

$$\underbrace{\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}}_{3 \times 3} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u^1} & \frac{\partial x_2}{\partial u^1} & \frac{\partial x_3}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u^2} & \frac{\partial x_2}{\partial u^2} & \frac{\partial x_3}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u^3} & \frac{\partial x_2}{\partial u^3} & \frac{\partial x_3}{\partial u^3} \end{pmatrix}}_{3 \times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u^1} & \frac{\partial x_1}{\partial u^2} & \frac{\partial x_1}{\partial u^3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u^1} & \frac{\partial x_2}{\partial u^2} & \frac{\partial x_2}{\partial u^3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u^1} & \frac{\partial x_3}{\partial u^2} & \frac{\partial x_3}{\partial u^3} \end{pmatrix}}_{3 \times 3} \quad (2.28a)$$

En esta representación es claro que la segunda matriz del miembro derecho es la transpuesta de la primera. Las matrices involucradas en la ecuación (2.28a) se representan en forma condensada como:

$$\{g_{ij}\} = \underbrace{\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}}_{3 \times 3} \quad (2.29)$$

$$y \quad \underbrace{\{P_{ij}\}^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u^1} & \frac{\partial x_2}{\partial u^1} & \frac{\partial x_3}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u^2} & \frac{\partial x_2}{\partial u^2} & \frac{\partial x_3}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u^3} & \frac{\partial x_2}{\partial u^3} & \frac{\partial x_3}{\partial u^3} \end{pmatrix}}_{3 \times 3} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{elementos de la base vectorial } \mathbf{a}_1 \\ \leftarrow \text{elementos de la base vectorial } \mathbf{a}_2 \\ \leftarrow \text{elementos de la base vectorial } \mathbf{a}_3 \end{array} \quad (2.30)$$

o también

$$\{P_{ij}\}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} \quad y \quad \{P_{ij}\} = (\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3)$$

Así, podemos escribir la ec. (2.28a) en forma matricial compacta como

$$\underbrace{\{g_{ij}\}}_{3 \times 3} = \underbrace{\{P_{ij}\}^T}_{3 \times 3} \underbrace{\{P_{ij}\}}_{3 \times 3} \quad (2.28b)$$

El producto punto de dos vectores puede expresarse ahora como

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{B} = f^i \mathbf{a}_i \cdot b^j \mathbf{a}_j = f^i b^j g_{ij} \quad (2.31a)$$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{B} = f_i \mathbf{a}^i \cdot b_j \mathbf{a}^j = f_i b_j g^{ij} \quad (2.31b)$$

Debemos recordar que para un sistema ortogonal $g_{ij} = 0$ si $i \neq j$, pero esto no implica que $g_{ii} = 1$. De lo desarrollado en el ejemplo anterior, encontramos que para el sistema coordenado cilíndrico la matriz de coeficientes métricos es:

$$\{g_{ij}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Note que el producto punto escalar también puede escribirse como

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{B} = f_i b^i = f^i b_i \quad (2.31c)$$

Con este resultado se vislumbra la ventaja de combinar un vector expresado en términos de la base original y el otro en términos de la base recíproca.

3. Transformación de vectores de coordenadas cartesianas a coordenadas curvilíneas

El vector $\mathbf{F}$ en coordenadas cartesianas es

$$\mathbf{F} = F_{x,i} \mathbf{e}_i \quad (3.1)$$

Aquí usamos el subíndice para recordar que nos referimos a las componentes en coordenadas cartesianas y no a las físicas correspondientes al sistema de coordenadas curvilíneas. El vector $\mathbf{F}$ en términos de las componentes contravariantes es

$$\mathbf{F} = f^{c,i} \mathbf{a}_i \quad (3.2)$$

En donde usamos $f^{c,i}$ la nomenclatura para recordar que se trata de las componentes correspondientes al sistema curvilíneo. De la ecuación (1.9) sabemos que

$$\mathbf{a}_i = \frac{\partial x_j}{\partial u^i} \mathbf{e}_j \quad (3.3)$$

De la combinación de las ecs. (3.1) a (3.2) se obtiene

$$f^{c,i} \frac{\partial x_j}{\partial u^i} \mathbf{e}_j = F_{x,j} \mathbf{e}_j \quad (3.4)$$

ó

$$F_{x,j} = \frac{\partial x_j}{\partial u^i} f^{c,i} \quad (3.5)$$

Esa ecuación puede expandirse para cada uno de las componentes y resumir los resultados en forma matricial

$$\underbrace{\begin{pmatrix} F_{x,1} \\ F_{x,2} \\ F_{x,3} \end{pmatrix}}_{3 \times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u^1} & \frac{\partial x_1}{\partial u^2} & \frac{\partial x_1}{\partial u^3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u^1} & \frac{\partial x_2}{\partial u^2} & \frac{\partial x_2}{\partial u^3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u^1} & \frac{\partial x_3}{\partial u^2} & \frac{\partial x_3}{\partial u^3} \end{pmatrix}}_{3 \times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} f^{c,1} \\ f^{c,2} \\ f^{c,3} \end{pmatrix}}_{3 \times 1} \quad (3.6)$$

Si utilizamos para la matriz cuadrada la notación introducida en la ec. (2.30) y denominamos

$$\{F_{x,i}\} = \underbrace{\begin{pmatrix} F_{x,1} \\ F_{x,2} \\ F_{x,3} \end{pmatrix}}_{3 \times 1} \quad \{f^{c,i}\} = \underbrace{\begin{pmatrix} f^{c,1} \\ f^{c,2} \\ f^{c,3} \end{pmatrix}}_{3 \times 1} \quad (3.7)$$

Entonces la ecuación (3.6) puede escribirse en forma compacta como

$$\underbrace{\{F_{x,i}\}}_{3 \times 1} = \underbrace{\{P_{ij}\}}_{3 \times 3} \underbrace{\{f^{c,j}\}}_{3 \times 1} \quad (3.8)$$

De esta se puede obtener

$$\underbrace{\{f^{c,i}\}}_{3 \times 1} = \underbrace{\{P_{ij}\}^{-1}}_{3 \times 3} \underbrace{\{F_{x,j}\}}_{3 \times 1} \quad (3.9)$$

Por lo que para expresar $f^{c,i}$ en términos de $F_{x,j}$ se necesita encontrar la inversa de la matriz $\{P_{ij}\}$.

La ecuación (3.4) establece que

$$\mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}_j = \delta_{ij} \quad (3.10)$$

que puede expresarse como

$$a_k^i a_{kj} = \delta_{ij} \quad (3.11)$$

Hay nueve ecuaciones de estas, que corresponden a la proyección de cada una de las bases sobre si misma y sobre las otras dos. Escribiendo cada una de las ecuaciones contenida en la ec. (3.10), y resumiendo el resultado en notación matricial, se obtiene

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix}}_{3 \times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u^1} & \frac{\partial x_1}{\partial u^2} & \frac{\partial x_1}{\partial u^3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u^1} & \frac{\partial x_2}{\partial u^2} & \frac{\partial x_2}{\partial u^3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u^1} & \frac{\partial x_3}{\partial u^2} & \frac{\partial x_3}{\partial u^3} \end{pmatrix}}_{3 \times 3} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{3 \times 3} \quad (3.12)$$

La primer matriz en esta ecuación la denominamos

$$\{Q_{ij}\} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{elementos de la base vectorial recíproca } \mathbf{a}^1 \\ \leftarrow \text{elementos de la base vectorial recíproca } \mathbf{a}^2 \\ \leftarrow \text{elementos de la base vectorial recíproca } \mathbf{a}^3 \end{array} \quad (3.13)$$

y si utilizamos la notación introducida en la ec. (2.30) para la segunda matriz, entonces podemos escribir la ec. (3.12) como

$$\{Q_{ij}\} \{P_{jk}\} = \{\delta_{ik}\} \quad (3.14)$$

Esto implica

$$\{Q_{ij}\} = \{P_{ij}\}^{-1} \quad (3.15)$$

Es muy importante notar que cada uno de los renglones de la matriz $\{Q_{ij}\}$ tienen como elementos tres componentes de uno de los vectores recíprocos, y que en contraste las columnas de la matriz $\{P_{jk}\}$ están formadas por los elementos de los vectores de la base original.

La substitución de (3.14) en (3.15) da como resultado

$$\underbrace{\{f^{c,i}\}}_{3 \times 1} = \underbrace{\{Q_{ij}\}}_{3 \times 3} \underbrace{\{F_{x,j}\}}_{3 \times 1} \quad (3.16)$$

La ecuación (3.12) implica que la matriz $\{P_{jk}\}^{-1}$ se puede encontrar directamente de la matriz de componentes de las bases vectoriales recíprocas. Para ello debe ponerse especial cuidado al formar la matriz $\{Q_{ij}\}$, ya que cada renglón de ella contiene como elementos los componentes de la base recíproca y deben colocarse de esa manera.

Si se desea encontrar las componentes covariantes del vector $\mathbf{F}$ en términos de sus componentes cartesianas puede utilizarse la ec. (2.19) escrita en forma compacta como

$$\underbrace{\{f_{c,i}\}}_{3 \times 1} = \underbrace{\{g_{ij}\}}_{3 \times 3} \underbrace{\{f^{c,j}\}}_{3 \times 1} \quad (3.17)$$

En esta relación la matriz $\{g_{ij}\}$ fue definida en la ec. (2.29), la matriz $\{f^{c,i}\}$ está dada por la ec. (3.7), y hemos introducido la definición

$$\{f_{c,i}\} = \begin{pmatrix} f_{c,1} \\ f_{c,2} \\ f_{c,3} \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

La substitución de la ec. (2.28b) en lugar de $\{g_{ij}\}$ en la ec. (3.17) da como resultado

$$\underbrace{\{f_{c,i}\}}_{3 \times 1} = \underbrace{\{P_{ji}\}^T}_{3 \times 3} \underbrace{\{P_{jk}\}}_{3 \times 3} \underbrace{\{f^{c,k}\}}_{3 \times 1} \quad (3.19)$$

Ahora podemos utilizar la ec. (3.16) para obtener

$$\underbrace{\{f_{c,i}\}}_{3 \times 1} = \underbrace{\{P_{ji}\}^T}_{3 \times 3} \underbrace{\{P_{jm}\}}_{3 \times 3} \underbrace{\{Q_{mk}\}}_{3 \times 3} \underbrace{\{F_{x,k}\}}_{3 \times 1} \quad (3.20)$$

Finalmente, si involucramos la ec. (3.14) en la (3.20), encontramos la siguiente relación para obtener las componentes contravariantes en términos de las cartesianas

$$\underbrace{\{f_{c,i}\}}_{3 \times 1} = \underbrace{\{P_{ji}\}}_{3 \times 3}^T \underbrace{\{F_{x,k}\}}_{3 \times 1} \quad (3.21)$$

Ejemplo 2

Dado el vector siguiente en coordenadas cartesianas

$$\mathbf{F} = F_{x,1} \mathbf{e}_1 + F_{x,2} \mathbf{e}_2 + F_{x,3} \mathbf{e}_3$$

ó en la notación más común

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$$

Debemos encontrarlo en términos de sus componentes físicas en coordenadas cilíndricas.

Las bases vectoriales en el sistema de coordenadas cilíndricas se encontraron en el Ejemplo 1 y son:

$$\mathbf{a}_1 = \cos u^2 \mathbf{e}_1 + \sin u^2 \mathbf{e}_2 = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{a}_2 = -u^1 \sin u^2 \mathbf{e}_1 + u^1 \cos u^2 \mathbf{e}_2 = -r \sin \theta \mathbf{e}_1 + r \cos \theta \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{e}_3$$

De estas se pueden obtener las bases vectoriales recíprocas. Así

$$V = \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) = r$$

$$\mathbf{a}^1 = \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}{V} = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2 = \mathbf{a}_1 = \hat{\mathbf{e}}_r$$

$$\mathbf{a}^2 = \frac{\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1}{V} = \frac{-\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2}{r} = \frac{\mathbf{a}_2}{r^2} = \frac{\hat{\mathbf{e}}_\theta}{r}$$

$$\mathbf{a}^3 = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{V} = \mathbf{a}_3 = \hat{\mathbf{e}}_z$$

Esto ejemplifica que en un sistema ortogonal de coordenadas curvilíneas no hay diferencia entre los vectores unitarios en el sistema base original y en el recíproco. Así se puede escribir $\mathbf{F}$ en el sistema base

$$\mathbf{F} = f^{c,i} \mathbf{a}_i$$

Pero de acuerdo a la ec. (3.16) las componentes contravariantes se pueden obtener a partir de

$$\begin{pmatrix} f^{c,1} \\ f^{c,2} \\ f^{c,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\frac{\sin \theta}{r} & \frac{\cos \theta}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

De aquí

$$\begin{aligned} f^{c,1} &= \cos \theta F_x + \sin \theta F_y \\ f^{c,2} &= -\frac{\sin \theta}{r} F_x + \frac{\cos \theta}{r} F_y \\ f^{c,3} &= F_z \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\mathbf{F} = [(\cos \theta)F_x + (\sin \theta)F_y] \mathbf{a}_1 + [(-\sin \theta)F_x + (\cos \theta)F_y] \frac{\mathbf{a}_2}{r} + F_z \mathbf{a}_3$$

Pero como

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \mathbf{a}_1, \quad \hat{\mathbf{e}}_\theta = \frac{\mathbf{a}_2}{r}, \quad \hat{\mathbf{e}}_z = \mathbf{a}_3$$

$$\mathbf{F} = [(\cos \theta)F_x + (\sin \theta)F_y] \hat{\mathbf{e}}_r + [(-\sin \theta)F_x + (\cos \theta)F_y] \hat{\mathbf{e}}_\theta + F_z \hat{\mathbf{e}}_z$$

que en otra forma

$$\mathbf{F} = F_r \hat{\mathbf{e}}_r + F_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta + F_z \hat{\mathbf{e}}_z$$

Esta es la forma tradicional de escribir un vector en coordenadas cilíndricas, en donde F_r , F_θ y F_z son las componentes físicas.

La conclusión se puede extender para cualquier sistema de coordenadas ortogonal y establecer que tanto el sistema con base vectorial $\mathbf{a}^i$, como el sistema con base vectorial $\mathbf{a}_i$, tienen las mismas componentes físicas.

4. Diferencial de volumen

El elemento diferencial de volumen se obtiene al considerar que los lados del elemento de volumen están formados por los vectores $\mathbf{a}_1 du^1$, $\mathbf{a}_2 du^2$ y $\mathbf{a}_3 du^3$

$$dV = \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) du^1 du^2 du^3 \quad (4.1)$$

Si recordamos que las componentes de las bases originales son:

$$a_{1i} = \frac{\partial x_i}{\partial u^1}, \text{ etc}$$

entonces

$$\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u^1} & \frac{\partial x_1}{\partial u^2} & \frac{\partial x_1}{\partial u^3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u^1} & \frac{\partial x_2}{\partial u^2} & \frac{\partial x_2}{\partial u^3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u^1} & \frac{\partial x_3}{\partial u^2} & \frac{\partial x_3}{\partial u^3} \end{pmatrix} = \det \{P_{ji}\} = J \quad (4.2)$$

en donde J es llamado el Jacobiano de la transformación. Utilizando esta nomenclatura en la ecuación (4.1) se obtiene

$$dV = J du^1 du^2 du^3 \quad (4.3)$$

Se puede demostrar que

$$\det \left(\{b_{ij}\} \{b_{ij}\}^T \right) = \left(\det \{b_{ij}\} \right)^2 \quad (4.4)$$

Por lo tanto de la ecuación (2.28b) se puede obtener

$$\det \{g_{ij}\} = \left(\det \{P_{ij}\} \right)^2 \quad (4.5)$$

Cuyo valor se acostumbra a denominar g , de tal manera que en términos del Jacobiano

$$\det \{g_{ij}\} = J^2 = g \quad (4.6)$$

Así el Jacobiano es

$$J = \sqrt{g} \quad (4.7)$$

Lo cual permite escribir la fórmula del elemento diferencial de volumen como

$$dV = J du^1 du^2 du^3 = \sqrt{g} du^1 du^2 du^3 \quad (4.8)$$

Debemos enfatizar que en un sistema coordenado ortogonal $g_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Por lo que

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u^1} & \frac{\partial x_1}{\partial u^2} & \frac{\partial x_1}{\partial u^3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u^1} & \frac{\partial x_2}{\partial u^2} & \frac{\partial x_2}{\partial u^3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u^1} & \frac{\partial x_3}{\partial u^2} & \frac{\partial x_3}{\partial u^3} \end{pmatrix} = \sqrt{g_{11} g_{22} g_{33}} \quad (4.9)$$

Ejemplo 3

Para el sistema de coordenadas cilíndricas

$$\{g_{ij}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g = \det\{g_{ij}\} = r^2$$

$$J = \sqrt{g} = r$$

Así que $dV = r dr d\theta dz$, que es el elemento de volumen en coordenadas cilíndricas que estamos acostumbrados a usar.

5. Diferenciales de área

La obtención del elemento de área perpendicular a una dirección se explica a continuación. Se obtendrá explícitamente el elemento de área perpendicular a la dirección $\mathbf{a}_3$. Por lo que con

$$\begin{aligned} d\mathbf{S}_1 &= \mathbf{a}_1 du^1 \\ d\mathbf{S}_2 &= \mathbf{a}_2 du^2 \end{aligned}$$

se puede hallar

$$d\mathbf{A}_3 = d\mathbf{S}_1 \times d\mathbf{S}_2 = (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) du^1 du^2 \quad (5.1)$$

cuya magnitud es

$$dA_3 = \|d\mathbf{A}_3\| = [(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)]^{1/2} du^1 du^2 \quad (5.2)$$

Para manipular la ec. (5.2) de una forma más conveniente se introduce la siguiente identidad

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \quad (5.3)$$

Así que la ec. (5.2) toma la forma

$$dA_3 = \|d\mathbf{A}_3\| = [(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1)(\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2) - (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2)(\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1)]^{1/2} du^1 du^2$$

Ahora introducimos la ec. (2.8) para obtener

$$dA_3 = \|d\mathbf{A}_3\| = [g_{11}g_{22} - (g_{12})^2]^{1/2} du^1 du^2 \quad (5.4a)$$

Análogamente se pueden obtener los elementos diferenciales de área perpendiculares a las otras dos direcciones, y ellos son:

$$dA_1 = \|d\mathbf{A}_1\| = [g_{22}g_{33} - (g_{23})^2]^{1/2} du^2 du^3 \quad (5.4b)$$

$$dA_2 = \|d\mathbf{A}_2\| = [g_{11}g_{33} - (g_{13})^2]^{1/2} du^1 du^3 \quad (5.4c)$$

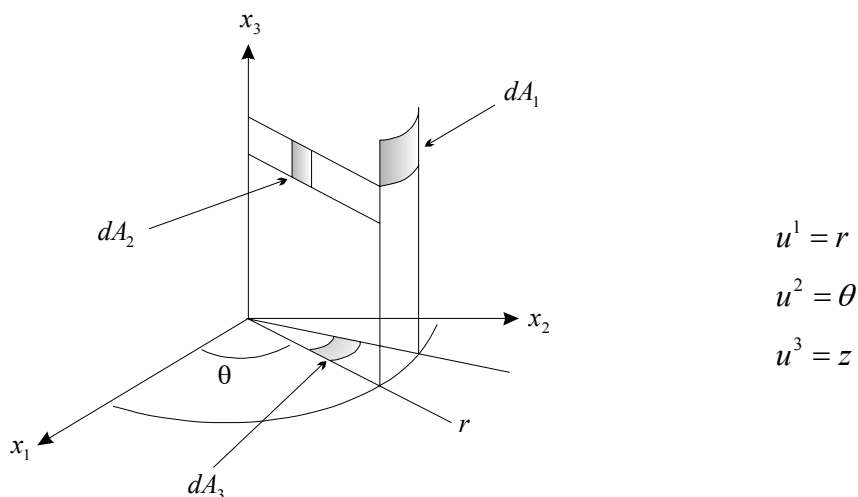
Los resultados pueden resumirse como

$$dA_i = [g_{jj}g_{kk} - (g_{kj})^2]^{1/2} du^j du^k \quad (5.5)$$

En donde $i \neq j, k$.

Ejemplo 4

Para el sistema de coordenadas cilíndricas



El elemento de área perpendicular a la dirección r está dado por

$$d\mathbf{A}_1 = d\mathbf{S}_2 \times d\mathbf{S}_3$$

$$d\mathbf{A}_1 = (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) du^2 du^3$$

$$dA_1 = [g_{22} g_{33} - (g_{23})^2]^{1/2} du^2 du^3$$

además

$$g_{11} = 1 \quad g_{22} = r^2 \quad g_{33} = 1$$

$$g_{ij} = 0 \text{ para } i \neq j$$

Por lo tanto

$$dA_1 = \sqrt{r^2} d\theta dz = r d\theta dz$$

En forma análoga se puede obtener

$$dA_2 = \sqrt{1} dr dz = dr dz$$

$$dA_3 = \sqrt{r^2} dr d\theta = r dr d\theta$$

6. Factores de escala de sistemas de coordenadas ortogonales curvilíneas

Los coeficientes métricos son esenciales en el desarrollo de operadores diferenciales para sistemas coordinados diferentes del sistema coordinado cartesiano. En un sistema ortogonal el vector $\mathbf{a}_i$ está definido por las ecs. (1.9)

$$\mathbf{a}_i = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} \right)_{u^j, u^k} \quad (6.1)$$

de tal forma que $\mathbf{a}_i$ tiene la misma dirección que la de cambio de u^i . A lo largo de esta curva considere el cambio diferencial

$$d s_i = \mathbf{a}_i d u^i \quad (\text{sin sumatoria}) \quad (6.2)$$

La magnitud de este segmento es

$$d s_i = \|d \mathbf{s}_i\| = \sqrt{\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i} d u^i = \sqrt{g_{ii}} d u^i \quad (6.3)$$

En donde g_{ii} es el coeficiente métrico, y en términos de él se define el factor de escala como

$$h_i = \sqrt{g_{ii}} \quad (\text{sin sumatoria}) \quad (6.4)$$

Entonces el vector base en la dirección i se puede escribir

$$\mathbf{a}_i = h_i \hat{\mathbf{e}}_i \quad (\text{sin sumatoria}) \quad (6.5)$$

y la ecuación (6.2) toma la forma

$$d \mathbf{s}_i = h_i d u^i \hat{\mathbf{e}}_i \quad (6.6)$$

7. Gradiente de un escalar en sistemas coordinados ortogonales curvilíneos

Considerando la función en el sistema coordinado curvilíneo dada por

$$\varphi = \varphi(u^1, u^2, u^3)$$

entonces su gradiente en coordenadas cartesianas es

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \mathbf{e}_i = \frac{\partial \varphi}{\partial u^j} \frac{\partial u^j}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \quad (7.1)$$

El gradiente de la coordenada u^j esta involucrado en esta expresión, ya que está dado por

$$\nabla u^j = \frac{\partial u^j}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \quad (7.1)$$

Por ello la ec. (7.1) puede ser escrita como

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial u^j} \nabla u^j \quad (7.3)$$

Con ayuda de la ecuación (6.6) se puede escribir el cambio diferencial de posición como

$$d\mathbf{s} = h_1 \hat{\mathbf{e}}_1 du^1 + h_2 \hat{\mathbf{e}}_2 du^2 + h_3 \hat{\mathbf{e}}_3 du^3 \quad (7.4)$$

Además como $\varphi = \varphi(u^1, u^2, u^3)$ su diferencial total es

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial u^i} du^i \quad (7.5)$$

Como un paso intermedio hacia la deducción de la fórmula del gradiente se propone

$$\nabla \varphi = \lambda_k \hat{\mathbf{e}}_k \quad (7.6)$$

en donde los coeficientes λ_k se determinarán a continuación. La relación general para la derivada direccional permite escribir

$$d\mathbf{s} \cdot \nabla \varphi = d\varphi \quad (7.7)$$

Además, para un sistema ortogonal (porque $\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij}$) la substitución de las ecs. (7.4)-(7.6) en (7.7) da como resultado

$$\lambda_1 h_1 du^1 + \lambda_2 h_2 du^2 + \lambda_3 h_3 du^3 = \frac{\partial \varphi}{\partial u^i} du^i \quad (7.8)$$

Esta expresión nos permite concluir que los coeficientes λ_k son

$$\lambda_k = \frac{1}{h_k} \frac{\partial \varphi}{\partial u^k} \quad (\text{sin sumatoria}) \quad (7.9)$$

Al reemplazar los coeficientes λ_k , dados en la ec. (7.9), en la ec. (7.8) se obtiene el gradiente de una función en un sistema coordenado ortogonal

$$\nabla \varphi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial u^1} \hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial u^2} \hat{\mathbf{e}}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial u^3} \hat{\mathbf{e}}_3 \quad (7.10)$$

Adicionalmente de la comparación de esta ecuación con la ec. (7.6) se concluye que el gradiente de una coordenada en un sistema curvilíneo ortogonal está relacionado a los factores de escala por la fórmula

$$\nabla u^j = \frac{\mathbf{e}_j}{h_j} \quad (\text{sin sumatoria}) \quad (7.11)$$

8. Divergencia de un vector en sistemas coordenados ortogonales curvilíneos

Considérese el operador Nabla

$$\nabla = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \mathbf{e}_i \frac{\partial u^j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial u^j} = \nabla u^j \frac{\partial}{\partial u^j} \quad (8.1)$$

Para un sistema coordenado ortogonal, el vector $\mathbf{F}$ puede escribirse en términos de sus componentes físicas como

$$\mathbf{F} = F^i \hat{\mathbf{e}}_i = F^1 (\hat{\mathbf{e}}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_3) + F^2 (\hat{\mathbf{e}}_3 \times \hat{\mathbf{e}}_1) + F^3 (\hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2) \quad (8.2)$$

Y utilizando la ec. (7.11)

$$\mathbf{F} = F^1 h_2 h_3 (\nabla u^2 \times \nabla u^3) + F^2 h_3 h_1 (\nabla u^3 \times \nabla u^1) + F^3 h_1 h_2 (\nabla u^1 \times \nabla u^2) \quad (8.3)$$

Ahora podemos utilizar el operador nabla de acuerdo a la ec. (8.1) para obtener la divergencia de $\mathbf{F}$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F} &= \nabla u^i \frac{\partial}{\partial u^i} \cdot [F^1 h_2 h_3 (\nabla u^2 \times \nabla u^3)] \\ &\quad + \nabla u^i \frac{\partial}{\partial u^i} \cdot [F^2 h_3 h_1 (\nabla u^3 \times \nabla u^1)] \\ &\quad + \nabla u^i \frac{\partial}{\partial u^i} \cdot [F^3 h_2 h_3 (\nabla u^2 \times \nabla u^3)] \end{aligned} \quad (8.4)$$

Expandiendo el miembro derecho de esta ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F} &= \nabla u^i \cdot (\nabla u^2 \times \nabla u^3) \frac{\partial}{\partial u^i} [F^1 h_2 h_3] \\ &\quad + \nabla u^i \cdot (\nabla u^3 \times \nabla u^1) \frac{\partial}{\partial u^i} [F^2 h_3 h_1] \\ &\quad + \nabla u^i \cdot (\nabla u^1 \times \nabla u^2) \frac{\partial}{\partial u^i} [F^3 h_1 h_2] \\ &\quad + F^1 h_2 h_3 \nabla u^i \frac{\partial}{\partial u^i} \cdot [\nabla u^2 \times \nabla u^3] \\ &\quad + F^2 h_3 h_1 \nabla u^i \frac{\partial}{\partial u^i} \cdot [\nabla u^3 \times \nabla u^1] \\ &\quad + F^3 h_1 h_2 \nabla u^i \frac{\partial}{\partial u^i} \cdot [\nabla u^1 \times \nabla u^2] \end{aligned} \quad (8.5)$$

Los tres últimos términos pueden eliminarse, porque

$$\nabla u^i \frac{\partial}{\partial u^i} \cdot [\nabla u^j \times \nabla u^k] = \nabla \cdot [\nabla u^j \times \nabla u^k] = 0 \quad (8.6)$$

Este resultado es válido en general porque un campo vectorial originado por un potencial (campo conservativo) es irrotacional. Así, de acuerdo a la siguiente fórmula para dos campos escalares φ y ψ cualesquiera

$$\nabla \cdot (\nabla \varphi \times \nabla \psi) = \nabla \psi \cdot (\nabla \times \nabla \varphi) - \nabla \varphi \cdot (\nabla \times \nabla \psi) = 0$$

Por lo tanto la ec. (8.5) se reduce a

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{F} = & \nabla u^i \cdot (\nabla u^2 \mathbf{x} \nabla u^3) \frac{\partial}{\partial u^i} [F^1 h_2 h_3] \\
& + \nabla u^i \cdot (\nabla u^3 \mathbf{x} \nabla u^1) \frac{\partial}{\partial u^i} [F^2 h_3 h_1] \\
& + \nabla u^i \cdot (\nabla u^1 \mathbf{x} \nabla u^2) \frac{\partial}{\partial u^i} [F^3 h_1 h_2] \quad (8.7)
\end{aligned}$$

La contribución de los gradientes de las superficies coordenadas, con la ayuda de la ec. (7.11), se puede escribir como

$$\nabla u^i \cdot (\nabla u^j \mathbf{x} \nabla u^k) = \hat{\mathbf{e}}_i \cdot (\hat{\mathbf{e}}_j \mathbf{x} \hat{\mathbf{e}}_k) \left[\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \right] \quad (8.8)$$

Siempre y cuando i , j y k estén en orden de una permutación par de 123. El análisis está limitado a sistemas ortogonales, por lo que sí i , j y k son diferentes entre sí y están en orden de una permutación par de 123

$$\hat{\mathbf{e}}_i \cdot (\hat{\mathbf{e}}_j \mathbf{x} \hat{\mathbf{e}}_k) = 1 \quad (8.9)$$

Así finalmente la expresión para la divergencia de un vector está dada por

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u^1} (F^1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial u^2} (F^2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial u^3} (F^3 h_1 h_2) \right] \quad (8.10)$$

9. El Laplaciano de un escalar en sistemas coordenados ortogonales curvilíneos

Si se inicia con el campo vectorial dado por

$$\mathbf{F} = \nabla \phi \quad (9.1)$$

De la ec. (7.10) se obtienen las componentes físicas de $\mathbf{F}$ que son

$$F^i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \phi}{\partial u^i} \quad (\text{sin sumatoria}) \quad (9.2)$$

La substitución de la ec. (9.2) en la (8.10) da como resultado la expresión para el Laplaciano del campo vectorial ϕ

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial u^1} \right) + \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial u^2} \right) + \frac{\partial}{\partial u^3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial u^3} \right) \right] \quad (9.3)$$

Las fórmulas anteriores tienen gran importancia ya que existen al menos 11 sistemas de coordenadas ortogonales curvilíneas. Adicionalmente en este tipo de sistemas coordenados las ecuaciones diferenciales parciales son factibles de resolverse por separación de

variables, y por lo tanto las soluciones pueden escribirse en términos de series de funciones ortogonales.

Ejemplo 5

Los factores de escala para una sistema de coordenadas cilíndricas son

$$h_1 = 1 \quad h_2 = r \quad h_3 = 1$$

Por substitución directa de estos en la ec. (7.10) se obtiene el gradiente de una función escalar ψ

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \hat{\mathbf{e}}_z$$

Utilizando los factores de escala junto en la ec. (8.10) se obtiene

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (F_r r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (F_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (F_z r) \right]$$

ó

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (F_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (F_z)$$

Aquí debe quedar muy claro que el vector en coordenadas cilíndricas está representado por

$$\mathbf{F} = F_r \hat{\mathbf{e}}_r + F_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta + F_z \hat{\mathbf{e}}_z$$

Finalmente el Laplaciano se obtiene por substitución directa de los factores de escala en la ecuación (9.3)

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

10. El teorema de la divergencia.

Se comenzará con la demostración del teorema expresado como

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{a} dV = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS \quad (10.1)$$

para un volumen $\mathcal{V}$ con superficie $\mathcal{A}$ que puede descomponerse en dos partes representadas por gráficas $z = z_1(x, y)$ y $z = z_2(x, y)$ y el campo vectorial $\mathbf{a}$ es continuo. El volumen y sus características se indican en la Figura 4.

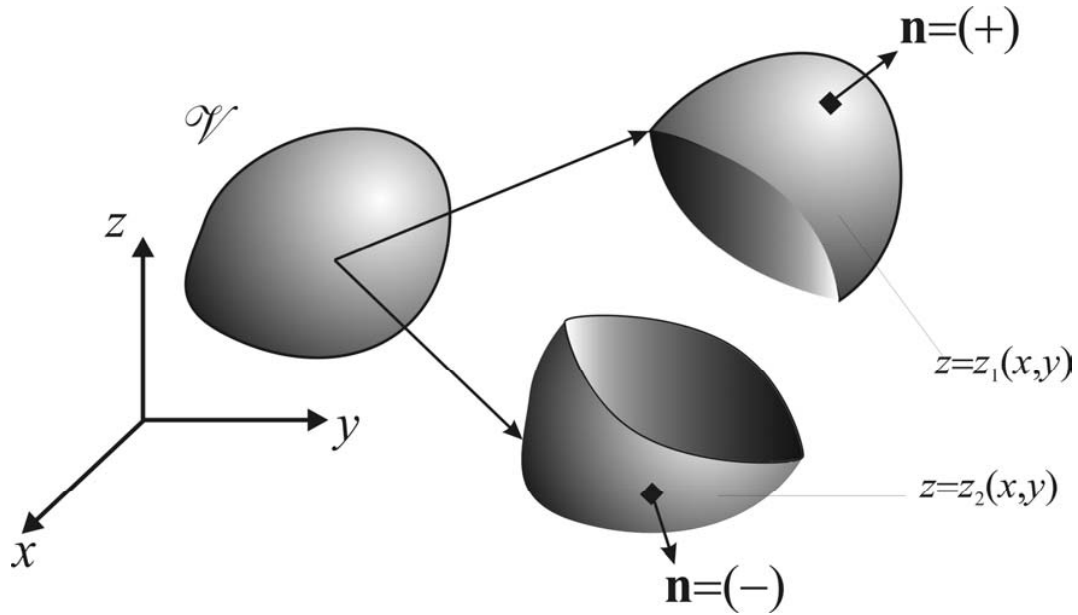


Figura 4. Sólido de volumen $\mathcal{V}$ y superficie $\mathcal{A}$ que puede descomponerse en dos gráficas $z_1(x, y)$ y $z_2(x, y)$. El vector $\mathbf{n}$ es unitario, normal a la superficie $\mathcal{A}$ y dirigido hacia afuera del volumen $\mathcal{V}$.

Para demostrar el teorema, la ecuación (10.1) se expande de la siguiente forma

$$\int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dV = \int_{\mathcal{A}} (a_x \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} + a_y \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} + a_z \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (10.2)$$

Esta ecuación puede demostrarse si logramos probar que

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial a_x}{\partial x} dV = \int_{\mathcal{A}} a_x \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS \quad (10.3a)$$

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial a_y}{\partial y} dV = \int_{\mathcal{A}} a_y \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS \quad (10.3b)$$

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial a_z}{\partial z} dV = \int_{\mathcal{A}} a_z \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS \quad (10.3c)$$

Nosotros trabajaremos en los detalles de la ec. (10.3c). Utilizando la nomenclatura introducida en la Figura 4 la ec. (10.3c) puede describirse como

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial a_z}{\partial z} dV = \int_x \int_y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial a_z}{\partial z} dz dy dx = \int_x \int_y \left[a_z|_{z_2} - a_z|_{z_1} \right] dy dx \quad (10.4)$$

Aquí estamos implicando que

$$\begin{aligned} \text{en } z_2(x, y) \quad \mathbf{n} &= (+), \text{ en la dirección de } \mathbf{k} \\ \text{en } z_1(x, y) \quad \mathbf{n} &= (-), \text{ en la dirección de } -\mathbf{k} \end{aligned} \quad (10.5)$$

De tal forma que se pueden demostrar las siguientes relaciones Problema 17

$$\begin{aligned} \text{en } z_2(x, y) \quad dx dy &= +\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS \\ \text{en } z_1(x, y) \quad dx dy &= -\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (10.6)$$

Con las ecs. (10.6), la ec. (10.4) toma la forma

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial a_z}{\partial z} dV = \int_{\mathcal{A}_2} a_z|_{z_2} \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} dS - \int_{\mathcal{A}_1} a_z|_{z_1} (-\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} dS) = \int_{\mathcal{A}} a_z \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} dS \quad (10.7)$$

En donde $\mathcal{A}_2$ y $\mathcal{A}_1$ son las superficies en las que $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = (+)$ y $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = (-)$, respectivamente.

En forma análoga podemos demostrar (10.3a) y (10.3b), y por lo tanto hemos demostrado el teorema de la divergencia expresado como

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{a} dV = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS \quad (10.8)$$

para un volumen $\mathcal{V}$ cuya superficie $\mathcal{A}$ puede representarse como la suma de dos gráficas, y un campo vectorial $\mathbf{a}$ continuo.

Ahora demostraremos que el teorema también es válido para volúmenes, como el mostrado en la siguiente figura, que pueden ser descompuestos en dos volúmenes para las cuales la ec. (10.8) es válida.

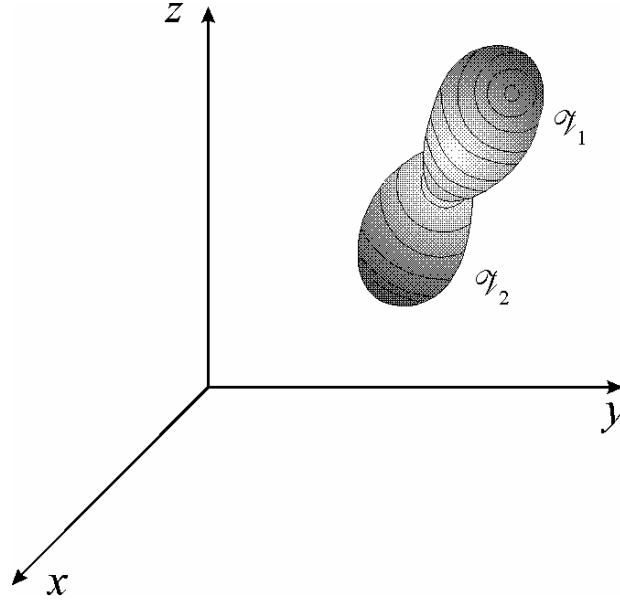


Figura 6. Sólido que puede ser descompuesto en dos regiones sólidas $\mathcal{V}_1$ y $\mathcal{V}_2$, cuyas superficies pueden ser descompuestas en dos gráficas.

El volumen $\mathcal{V}$ es la suma de los volúmenes $\mathcal{V}_1$ y $\mathcal{V}_2$, por lo cual se puede escribir

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{a} dV = \int_{\mathcal{V}_1} \nabla \cdot \mathbf{a} dV + \int_{\mathcal{V}_2} \nabla \cdot \mathbf{a} dV \quad (10.9)$$

Como $\mathcal{V}_1$ y $\mathcal{V}_2$ tienen superficies que se pueden descomponer en dos gráficas

$$\int_{\mathcal{V}_1} \nabla \cdot \mathbf{a} dV = \int_{\mathcal{A}_1} \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} dS \quad (10.10)$$

$$\int_{\mathcal{V}_2} \nabla \cdot \mathbf{a} dV = \int_{\mathcal{A}_2} \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} dS \quad (10.11)$$

Nótese que $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = \mathcal{A} + 2\mathcal{A}_C$, en donde $\mathcal{A}_C$ es el área de la superficie común de $\mathcal{V}_1$ y $\mathcal{V}_2$. En esa superficie $\mathbf{n}|_{\mathcal{A}_1} = -\mathbf{n}|_{\mathcal{A}_2}$, por lo que si la función vectorial $\mathbf{a}$ es continua en $\mathcal{V}$, entonces

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}|_{\mathcal{A}_1} = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}|_{\mathcal{A}_2} \quad (10.12)$$

Por lo tanto al sumar las ecuaciones (10.10) y (10.11) y usar la ecuación (10.12) obtenemos

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{a} dV = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} dS \quad (10.13)$$

para cualquier volumen $\mathcal{V}$ que pueda descomponerse en volúmenes cuya superficie pueda representarse como dos gráficas. El campo vectorial $\mathbf{a}$ debe ser continuo en $\mathcal{V}$.

Con un procedimiento similar puede demostrarse el teorema para volúmenes tales como los mostrados en las siguientes figuras

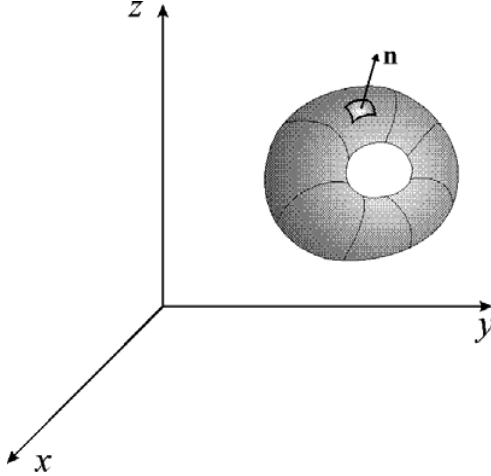


Figura 6. Sólido con un hueco interno.

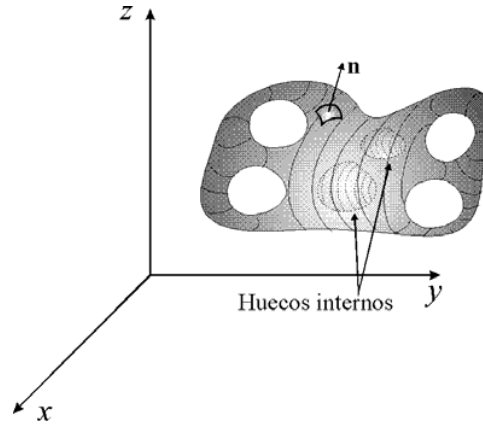


Figura 7. Sólido con huecos internos y externos.

Así podemos concluir que el teorema de la divergencia expresado por la ec. (10.13) es válido para cualquier campo vectorial $\mathbf{a}$ continuo en el sólido de volumen $\mathcal{V}$ que está envuelto por la superficie o superficies $\mathcal{A}$.

Otro resultado útil se consigue si se introduce

$$\mathbf{a} = M \mathbf{b}$$

en donde M es una función escalar arbitraria y $\mathbf{b}$ es un vector constante. De esta manera

$$\nabla \cdot (M \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \nabla M + M \nabla \cdot \mathbf{b}, \quad \text{porque } \nabla \cdot \mathbf{b} = 0$$

Usando esta relación en la ecuación (10.8)

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{b} \cdot \nabla M dV = \int_{\mathcal{A}} M \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\mathbf{b} \cdot \left[\int_{\mathcal{V}} \nabla M dV = \int_{\mathcal{A}} M \mathbf{n} dS \right]$$

ó

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla M dV = \int_{\mathcal{A}} M \mathbf{n} dS \quad (10.14)$$

Esta es la extensión del teorema de la divergencia para el gradiente de una función escalar.

Para extender el resultado a un tensor de segundo orden usaremos la siguiente relación

$$\mathbf{a} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{b} \quad (10.15)$$

en donde $\mathbf{b}$ es un vector constante.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{a} &= \nabla \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} [B_{jk} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \cdot b_p \mathbf{e}_p] \\ \nabla \cdot \mathbf{a} &= \nabla \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} [B_{jk} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \cdot b_p \mathbf{e}_p] \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} [B_{ik} b_k] = \frac{\partial B_{ik}}{\partial x_i} b_k + B_{ik} \frac{\partial b_k}{\partial x_i} \\ &= (\nabla \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{b} + \mathbf{B} : \underbrace{(\nabla \mathbf{b})^T}_{=0} \end{aligned}$$

Por lo tanto la ec. (10.8) se puede escribir como

$$\left[\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{B} dV \right] \cdot \mathbf{b} = \int_{\mathcal{A}} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (10.16)$$

$$(\mathbf{B} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{n} = B_{ij} b_j n_i = n_i B_{ij} b_j = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{b}$$

Usando esta relación en la ecuación (10.16) podemos obtener el teorema de la divergencia para un tensor de segundo orden

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{B} dV = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} dS = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{n} dS \quad (10.17)$$

En los siguientes ejemplos, la deducción de la ecuación general de la hidrostática y de la ecuación diferencial de la temperatura de un sólido, se muestra la conveniencia de disponer del teorema de la divergencia sin que esté restringido a un sistema particular de coordenadas. Por supuesto que la deducción tiene implícita todas las complicaciones que conlleva el aceptar el significado físico de cada uno de los términos. Más adelante se muestra el poder del análisis tensorial al combinarlo con el teorema de la divergencia y algunos conceptos usados en mecánica del continuo para obtener la derivada temporal del Jacobiano de una transformación de coordenadas, el teorema del transporte y la ecuación de continuidad. En los ejercicios propuestos se solicitará al lector la justificación de algunos de los pasos implícitos en el desarrollo.

Ejemplo 6**Deducción de la ecuación general de hidrostática**

Considérese un volumen de forma arbitraria con volumen $\mathcal{V}$ y delimitado por la superficie $\mathcal{A}$. El balance de fuerzas sobre tal volumen es:

$$\underbrace{\int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{g} dV}_{\text{fuerzas gravitacionales}} + \underbrace{\int_{\mathcal{A}} \mathbf{t}_{(n)} dS}_{\text{fuerzas superficiales}} = 0 \quad (\text{E6.1})$$

En condiciones de reposo el vector de esfuerzo está relacionado a la presión por

$$\mathbf{t}_{(n)} = -p \mathbf{n}$$

Así la ec. (E6.1) toma la forma

$$\int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{g} dV + \int_{\mathcal{A}} -p \mathbf{n} dS = 0 \quad (\text{E6.2})$$

Utilizando en el término de presión el teorema de la divergencia para un vector

$$\int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{g} dV - \int_{\mathcal{V}} \nabla p dV = 0$$

$$\text{ó} \quad \int_{\mathcal{V}} (\rho \mathbf{g} - \nabla p) dV = 0 \quad (\text{E6.3})$$

Como la región $\mathcal{V}$ en la que se realiza el balance de fuerzas es de forma y tamaño arbitrario, debemos reconocer que la integral (E6.3) es cero no por los límites sino por el integrando. Así que

$$-\nabla p + \rho \mathbf{g} = 0 \quad (\text{E6.4})$$

Esta es la ecuación general de la hidrostática.

Ejemplo 7.**Deducción de la ecuación diferencial de energía térmica para un material sólido.**

Considérese un volumen de control $\mathcal{V}$ de forma arbitraria y determinado por la superficie $\mathcal{A}$. El balance de energía sobre tal volumen es, en general:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Rapidez de acumulación} \\ \text{de energía térmica} \\ \text{en el cuerpo} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Rapidez de intercambio} \\ \text{de energía térmica} \\ \text{con los alrededores} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Rapidez de generación} \\ \text{de energía térmica} \\ \text{por fuentes homogéneas} \end{array} \right\}$$

Al representar la igualdad anterior en términos de la temperatura, las propiedades del sólido y del flux conductivo se obtiene:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho C_p (T - T_0) dV}_{\text{Rapidez de acumulación de energía}} = \underbrace{\int_{\mathcal{A}} -\mathbf{n} \cdot \mathbf{q} dA}_{\text{Energía intercambiada por contacto}} + \underbrace{\int_{\mathcal{V}} S_v dV}_{\text{Rapidez de generación}} \quad (\text{E7.1})$$

También se introdujo la rapidez de “generación” (más bien conversión de un tipo de energía a energía térmica) de energía puntual S_v en el material sólido, que puede deberse por ejemplo a radiación electromagnética o cambio químico.

La representación del contenido específico de energía del sólido se ha hecho en términos de su entalpía $\rho C_p (T - T_0)$, en donde T_0 es la temperatura del estado de referencia.

Como el volumen de sólido no se deforma cuando transcurre el tiempo la ec. (E7.1) se puede escribir como:

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial t} [\rho C_p (T - T_0)] dV = \int_{\mathcal{A}} -\mathbf{n} \cdot \mathbf{q} dA + \int_{\mathcal{V}} S_v dV \quad (\text{E7.2})$$

El uso del teorema de la divergencia permite escribir la ecuación anterior como

$$\int_{\mathcal{V}} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [\rho C_p (T - T_0)] + \nabla \cdot \mathbf{q} - S_v \right\} dV = 0 \quad (\text{E7.3})$$

Como la región $\mathcal{V}$ en la que se realiza el balance de fuerzas es de forma y tamaño arbitrario, debemos reconocer que la integral (E6.3) es cero no por los límites sino por el integrando. Así que

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho C_p (T - T_0)] + \nabla \cdot \mathbf{q} - S_v = 0 \quad (\text{E7.4})$$

Esta puede escribirse como

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho C_p T) = -\nabla \cdot \mathbf{q} + S_v \quad (\text{E7.5})$$

Al invocar la ley de Fourier $\mathbf{q} = -k \nabla T$, se obtiene la forma tradicional de la ecuación diferencial de la temperatura de un sólido de propiedades constantes:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T + S_v \quad (\text{E7.6})$$

Ejemplo 8**Deducción de la derivada temporal del Jacobiano de la transformación de coordenadas del sistema cartesiano fijo a uno móvil.**

En este ejemplo se pretende mostrar al alumno el poder del análisis tensorial, y la existencia de problemas que sería mucho más difícil de resolver sin tener a la mano esta herramienta.

En la deducción de las ecuaciones de transporte en volumen de control móvil que está sujeto a una deformación arbitraria, se requiere la derivada del Jacobiano del cambio de un sistema de coordenadas cartesiano con origen fijo (x_1, x_2, x_3) a un sistema cartesiano con un referencia a un observador con posición (ξ_1, ξ_2, ξ_3) que se mueve a la velocidad arbitraria $\mathbf{w}$, este concepto no es fácil de aceptar, ayudará a ello la lectura de las páginas 9 a 21 del libro de Salttery (1999).

Para este caso el Jacobiano está definido por

$$J = \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_3} \quad (\text{E8.1})$$

Su derivada temporal total es

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\epsilon_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_3} \right) = \epsilon_{ijk} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_3} \right) \\ &= \epsilon_{ijk} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_1} \right) \frac{\partial x_j}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_3} + \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_j}{\partial \xi_2} \right) \frac{\partial x_k}{\partial \xi_3} + \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_k}{\partial \xi_3} \right) \end{aligned} \quad (\text{E8.2})$$

Usando el hecho de que las coordenadas son funciones continuas permite escribir

$$\frac{dJ}{dt} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{dx_i}{dt} \right) \frac{\partial x_j}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_3} + \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_1} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{dx_j}{dt} \right) \frac{\partial x_k}{\partial \xi_3} + \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_2} \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\frac{dx_k}{dt} \right) \quad (\text{E8.3})$$

Los términos $\frac{dx_j}{dt}$ indican la rapidez con la que se mueve un observador en la dirección “j”, o sea las componentes w_j de la velocidad $\mathbf{w}$. Por ello la ec. (E8.3) puede escribirse como

$$\frac{dJ}{dt} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial w_i}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_3} + \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_1} \frac{\partial w_j}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_3} + \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_2} \frac{\partial w_k}{\partial \xi_3} \quad (\text{E8.4})$$

El uso de la regla de la cadena para reescribir cada uno de los términos que involucran las componentes w_j ,

$$\frac{\partial w_j}{\partial \xi_p} = \frac{\partial x_m}{\partial \xi_p} \frac{\partial w_j}{\partial x_m}$$

permite reescribir la ec. (E8.4) como

$$\frac{dJ}{dt} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_m}{\partial \xi_1} \frac{\partial w_i}{\partial x_m} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_3} + \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_m}{\partial \xi_2} \frac{\partial w_j}{\partial x_m} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_3} + \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_m}{\partial \xi_3} \frac{\partial w_k}{\partial x_m} \quad (\text{E8.5})$$

O en forma compacta en la forma

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{\partial w_1}{\partial x_m} (A_{1m}) + \frac{\partial w_2}{\partial x_m} (A_{2m}) + \frac{\partial w_3}{\partial x_m} (A_{3m}) \quad (\text{E8.6})$$

En donde A_{pm} se introdujo

$$A_{pm} = \epsilon_{pjk} \frac{\partial x_m}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_3} + \epsilon_{ipk} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_m}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_3} + \epsilon_{ijp} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_m}{\partial \xi_3} \quad (\text{E8.7})$$

Para explicar lo que implican estas definiciones se muestra a continuación uno de los A_{pm} en detalle

$$\begin{aligned} A_{1m} = & \epsilon_{123} \frac{\partial x_m}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} + \epsilon_{132} \frac{\partial x_m}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} \\ & + \epsilon_{213} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_m}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} + \epsilon_{312} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_m}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} \\ & + \epsilon_{231} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_m}{\partial \xi_3} + \epsilon_{321} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_m}{\partial \xi_3} \end{aligned} \quad (\text{E8.8})$$

Por comparación de la definición del Jacobiano con la ec. (E8.8), se puede concluir

$$A_{pm} = \delta_{mp} J \quad (\text{E8.9})$$

De tal manera que la ecuación (E8.6) se reduce a

$$\frac{dJ}{dt} = J \frac{\partial w_i}{\partial x_i} = J \nabla \cdot \mathbf{w} \quad (\text{E7.10})$$

Así hemos encontrado una expresión para la derivada del Jacobiano del cambio coordenadas $(x_1, x_2, x_3) \Rightarrow (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$.

Para el caso en que el volumen de control es móvil y se deforma de acuerdo al movimiento del fluido para el que se pretende encontrar la ecuación de transporte, el cambio de coordenadas $(x_1, x_2, x_3) \Rightarrow (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ está gobernado por la velocidad del fluido $\mathbf{w}$ y la derivada temporal se conoce como derivada material, así el resultado de la ec. (E7.9) puede escribirse como

$$\frac{DJ}{Dt} = J \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = J \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (\text{E8.11})$$

Ejemplo 9

El teorema del transporte

El teorema del transporte permite intercambiar el orden de diferenciación temporal e integración en un volumen de control que se deforma a la velocidad del fluido en el que está situado, esto es precisamente la definición de un volumen material $\mathcal{V}_m(t)$, como el mostrado en la figura siguiente:

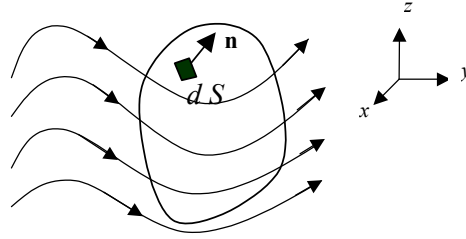


Figura 8. Volumen material de forma arbitraria, volumen $\mathcal{V}_m(t)$ y área superficial $\mathcal{A}_m(t)$.

El volumen se desplaza dentro de un fluido en movimiento, $\mathbf{n}$ indica el vector unitario y dS el diferencial de área superficial.

Por ejemplo, podemos preguntarnos qué sucede con la derivada del total de la propiedad volumétrica ψ (densidad, concentración molar, energía por unidad de volumen ó cantidad de movimiento volumétrica) contenida en el volumen material cuando se invierte el orden de la diferenciación e integración:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}_m(t)} \psi dV = ? \quad (\text{E9.1})$$

Aquí se debe entender que $dV = dx_1 dx_2 dx_3$. Esta operación no puede realizarse directamente ya que los límites de integración se modifican con el tiempo como lo indica claramente $\mathcal{V}_m(t)$. Sin embargo podemos realizar la integral en el sistema de coordenadas material (ξ_1, ξ_2, ξ_3) que se modifica de acuerdo a la velocidad del fluido $\mathbf{v}$ y así los límites de integración en este sistema de coordenadas no cambian con el tiempo pues en el sistema de coordenadas permanece constante $\mathcal{V}_m(0)$. Así al realizar el cambio de coordenadas $(x_1, x_2, x_3) \Rightarrow (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ en el diferencial de integración tendremos $dV = J d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$, y la integral dada en la ec. (E9.1) toma la forma

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}_m(t)} \psi dV = \frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}_m(0)} \psi J d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (\text{E9.2})$$

En la segunda integración los límites determinados por $\mathcal{V}_m$ no dependen del tiempo. Así es posible escribir.

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}_m(t)} \psi dV = \int_{\mathcal{V}_m(0)} \frac{D}{Dt} (\psi J) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (\text{E9.3})$$

Desarrollando la derivada se encuentra

$$\frac{D}{Dt} (\psi J) = J \frac{D\psi}{Dt} + \psi \frac{DJ}{Dt}$$

Que al usar la ec. (E8.10), para la derivada del Jacobiano, toma la forma

$$\frac{D}{Dt} (\psi J) = J \frac{D\psi}{Dt} + \psi J \nabla \cdot \mathbf{v} = J \left(\frac{D\psi}{Dt} + \psi \nabla \cdot \mathbf{v} \right) \quad (\text{E9.4})$$

Con este resultado la ec. (E9.3) puede escribirse

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}_m(t)} \psi dV = \int_{\mathcal{V}_m(0)} \left(\frac{D\psi}{Dt} + \psi \nabla \cdot \mathbf{v} \right) J d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (\text{E9.5})$$

En esta última la presencia del diferencial de volumen $dV = J d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$, permite rescribir

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}_m(t)} \psi dV = \int_{\mathcal{V}_m(t)} \left(\frac{D\psi}{Dt} + \psi \nabla \cdot \mathbf{v} \right) dx_1 dx_2 dx_3 \quad (\text{E9.6})$$

O sea

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \psi dV = \int_{\mathcal{V}(t)} \left(\frac{D\psi}{Dt} + \psi \nabla \cdot \mathbf{v} \right) dV \quad (\text{E9.7})$$

El integrando puede reescribirse al usar la derivada material en términos de la derivada parcial y la velocidad como

$$\frac{D\psi}{Dt} + \psi \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \psi + \psi \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\psi \mathbf{v}) \quad (\text{E9.8})$$

Así la ec. (E9.7) es ahora

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}_m(t)} \psi dV = \int_{\mathcal{V}_m(t)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\psi \mathbf{v}) \right) dV \quad (\text{E9.9})$$

Que al usar el teorema de la divergencia en el segundo término del integrando toma la forma conocida del teorema del transporte de Reynolds

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}_m(t)} \psi dV = \int_{\mathcal{V}_m(t)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) dV + \int_{\mathcal{V}_m(t)} \mathbf{n} \cdot (\psi \mathbf{v}) dA \quad (\text{E9.10})$$

Note la importancia de haber contado con la fórmula para la derivada del Jacobiano de la transformación $(x_1, x_2, x_3) \Rightarrow (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. La ec. (E8.10) toma la siguiente forma cuando el volumen de control $\mathcal{V}_a(t)$ se deforma arbitrariamente de acuerdo a la velocidad $\mathbf{w}$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_a(t)} \psi dV = \int_{\mathcal{V}_a(t)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) dV + \int_{\partial \mathcal{V}_a(t)} \mathbf{n} \cdot (\psi \mathbf{w}) dA \quad (\text{E8.11})$$

Esta expresión se conoce como el teorema general del transporte.

Ejemplo 10.

Deducción de la ecuación de continuidad en un volumen de control material $\mathcal{V}_m(t)$.

El volumen $\mathcal{V}_m(t)$, por definición, tiene la propiedad de que contiene siempre la misma masa, así

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho dV = 0 \quad (\text{E10.1})$$

Al aplicar el teorema del transporte con $\psi = \rho$, se obtiene

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho dV = \int_{\mathcal{V}_m(t)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV + \int_{\partial \mathcal{V}_m(t)} \mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{v}) dA = 0 \quad (\text{E10.2})$$

O sea

$$\int_{\mathcal{V}_m(t)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV + \int_{\partial \mathcal{V}_m(t)} \mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{v}) dA = 0 \quad (\text{E10.3})$$

Que toma la siguiente forma después de la aplicación del teorema de la divergencia y agrupación de términos

$$\int_{\mathcal{V}_m(t)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) dV = 0 \quad (\text{E10.4})$$

Debido a que el resultado es válido para cualquier $\mathcal{V}_m(t)$ finito, se concluye

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (\text{E10.5})$$

Que es la ecuación de continuidad de un fluido cualquiera incluyendo uno compresible. El resultado por supuesto incluye las restricciones implícitas en el uso de derivadas y los teoremas de la divergencia y transporte.

Ejemplo 11.**Deducción de la ecuación de continuidad en un volumen de control arbitrario $\mathcal{V}_a(t)$.**

En este caso como la superficie del volumen se desplaza a la velocidad $\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}$, el balance de masa está dado por

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_a(t)} \rho dV = - \int_{\mathcal{A}_a(t)} \mathbf{n} \cdot \rho (\mathbf{v} - \mathbf{w}) dA = 0 \quad (\text{E11.1})$$

El uso del teorema general del transporte dado por la ec. (E8.11) en el miembro derecho de la ecuación anterior lleva a

$$\int_{\mathcal{V}_a(t)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV + \int_{\mathcal{A}_a(t)} \mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{w}) dA = - \int_{\mathcal{A}_a(t)} \mathbf{n} \cdot \rho (\mathbf{v} - \mathbf{w}) dA = 0 \quad (\text{E11.2})$$

Al combinar los términos se cancelan el del lado izquierdo con el del derecho que contiene a la velocidad arbitraria $\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}$, obteniendo

$$\int_{\mathcal{V}_a(t)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV + \int_{\mathcal{A}_a(t)} \mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{v}) dA = 0 \quad (\text{E11.3})$$

El uso del teorema de la divergencia y la agrupación de los términos resultantes nos da

$$\int_{\mathcal{V}_a(t)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) dV = 0 \quad (\text{E11.4})$$

Como el resultado es válido para cualquier $\mathcal{V}_a(t)$ finito, se concluye

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (\text{E11.4})$$

Con lo cual se demuestra que la ecuación de continuidad es la misma independientemente del volumen de control usado para su deducción.

Problemas propuestos

Problemas que los alumnos deben poder hacer sin mayor dificultad por los conocimientos previos que tienen

Problema 1

Utilizando las siguientes matrices

$$\{\mathbf{A}\} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \{\mathbf{B}\} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

encuentre

- $\{A_{ij}\}\{B_{jk}\}$
- $\{B_{ki}\}\{A_{ij}\}$
- $\{A_{ij}\}^T \{B_{jk}\}^T$ y $\{B_{ki}\}^T \{A_{ij}\}^T$
- $\left(\{A_{ij}\}\{B_{jk}\}\right)^T$ y $\left(\{B_{ki}\}\{A_{ij}\}\right)^T$

Problema 2

Encuentre los determinantes de las matrices $\{A_{ij}\}$ y $\{B_{jk}\}$ del ejercicio anterior, así como los determinantes de cada uno de los resultados obtenidos en los incisos (a) a (d).

Problema 3

Obtenga las inversas de las siguientes matrices

$$\{A_{ij}\} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \{B_{ij}\} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \{C_{ij}\} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Problema 4

- Escriba en forma matricial el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$x + 3y + 3z = 0$$

$$3x + y + 2z = 6$$

$$2x - y - 3z = -3$$

- Resuelva el sistema de ecuaciones anterior.

c) Resuelva utilizando matrices el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x + 3y + 3z = 8$$

$$3x + y + 2z = -2$$

$$2x - y - 3z = 3$$

Problemas que los alumnos deben poder resolver después de estudiar las notas

Problema 5

Para un sistema de coordenadas bidimensional ortogonal formado por las coordenadas u^1 y u^2 . Demuestre que el Jacobiano

$$J\left(\frac{x, y}{u^1, u^2}\right) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u^1} & \frac{\partial y}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x}{\partial u^2} & \frac{\partial y}{\partial u^2} \end{pmatrix} = h_1 h_2$$

está de acuerdo con la ecuación (5.4a) que fue encontrada para el diferencial de área normal a la dirección u^3 .

Problema 6

Si $\hat{\mathbf{e}}_1$ es un vector unitario en la dirección que u^1 aumenta, demuestre que

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial (h_2 h_3)}{\partial u^1} \quad (1)$$

$$\nabla \times \hat{\mathbf{e}}_1 = \frac{1}{h_1} \left[\hat{\mathbf{e}}_2 \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial u^3} - \hat{\mathbf{e}}_3 \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial u^2} \right] \quad (2)$$

Problema 7

Demuestre que los vectores unitarios ortogonales pueden definirse como

$$\hat{\mathbf{e}}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} \quad (1)$$

Además demuestre que $\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_i = 1$ conduce a una expresión para el factor de escala que concuerda con la ec. (6.4).

La ecuación (1) puede usarse como punto de inicio para obtener

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_i}{\partial u^j} = \hat{\mathbf{e}}_j \frac{1}{h_i} \frac{\partial h_j}{\partial u^i}, i \neq j \quad (2)$$

$$y \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_i}{\partial u^i} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 \hat{\mathbf{e}}_j \frac{1}{h_j} \frac{\partial h_i}{\partial u^j} \quad (3)$$

Problema 8

Demuestre que en sistemas de coordenadas curvilíneas ortogonales se pueden realizar los productos escalar y vectorial normales que no involucran el operador ∇ como en coordenadas cartesianas, esto es no es necesario involucrar a los factores de escala.

Problema 9

Los siguientes vectores definen un sistema de coordenada oblicuas

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{i} \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{j} \quad y \quad \mathbf{a}_3 = (\mathbf{j} + \mathbf{k}) / \sqrt{2}$$

- Encuentre las matrices $\{P_{ij}\}$ y $\{Q_{ij}\}$ y la matriz de coeficientes métricos $[\mathbf{g}]$.
- Dado el siguiente vector en coordenadas cartesianas encuentre sus componentes en la base oblicua y la base oblicua recíproca

$$\mathbf{F} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

Problema 10

Las coordenadas esféricas están definidas por

$$r = u^1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \quad x_1 = u^1 \sin u^2 \cos u^3 \quad (1)$$

$$\theta = u^2 = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_3} \right) \quad x_2 = u^1 \sin u^2 \sin u^3 \quad (2)$$

$$\phi = u^3 = \tan^{-1} \left(\frac{x_2}{x_1} \right) \quad x_3 = u^1 \cos u^2 \quad (3)$$

- Encuentre $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ y $\mathbf{a}_3$.
- Encuentre los vectores unitarios correspondientes a la base vectorial.
- Encuentre la base vectorial recíproca $\mathbf{a}^1$, $\mathbf{a}^2$ y $\mathbf{a}^3$.
- Encuentre los coeficientes métricos $g_{ik} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_k$.
- Escriba el vector $\mathbf{F} = 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$ en la forma contravariante $\mathbf{F} = f^1 \mathbf{a}_1 + f^2 \mathbf{a}_2 + f^3 \mathbf{a}_3$ y en términos de las componentes físicas.
- Encuentre el diferencial de volumen dV .
- Calcule los elementos de área dA_1 , dA_2 y dA_3 .

- h. Escriba el vector $\mathbf{F}$ dado el inciso (e) en la forma covariante $\mathbf{F} = f_1 \mathbf{a}^1 + f_2 \mathbf{a}^2 + f_3 \mathbf{a}^3$, y en términos de sus componentes físicas.
- i. Escriba $\nabla \psi$, $\nabla \cdot \mathbf{f}$ y $\nabla^2 \psi$ en coordenadas esféricas.

Problema 11

Un sistema coordenado u, v, z que se utiliza frecuentemente en Electrostática e Hidrodinámica, está definido por

$$xy = u, \quad (1)$$

$$x^2 - y^2 = v, \quad (2)$$

$$z = z. \quad (3)$$

Este sistema es ortogonal.

- Describa brevemente la naturaleza de cada una de las tres superficies coordenadas.
- En un dibujo en el plano xy muestre las intersecciones de las superficies u -constante y v -constante.
- Indique las direcciones de los vectores unitarios $\mathbf{u}_0$ y $\mathbf{v}_0$ en los cuatro cuadrantes.
- ¿ Es este sistema coordenado de mano derecha ($\mathbf{u}_0 \times \mathbf{v}_0 = +\mathbf{k}$) o mano izquierda ($\mathbf{u}_0 \times \mathbf{v}_0 = -\mathbf{k}$) ?

Problemas de integración doble y triple

Problema 12

Realice la siguiente integral de volumen utilizando coordenadas cilíndricas

$$\int_D \exp(x^2 + y^2) dx dy dz$$

En donde D es la región definida por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$, $y = 1$ y $z = 1$.

Discute la utilidad, si es que la hay, del cambio de sistema coordenado.

Problema 13

Defina un sistema de coordenados oblicuo y con el evalúe la siguiente integral

$$\int_D xyz dx dy dz$$

La región de integración D , es el paralelepípedo cuyos vértices son $(0,0,0)$, $(2,2,0)$, $(3,4,0)$, $(1,2,0)$, $(3,4,5)$, $(5,6,5)$, $(6,8,5)$ y $(4,6,5)$. Ayudará el asegurarse si es o no un paralelepípedo.

Problema 14

Utilice coordenadas esféricas para representar paramétricamente la superficie de una esfera de radio R ; con la representación obtenida obtenga un diferencial de la superficie de la esfera. Plantee la fórmula para obtener la superficie de una esfera. Finalmente obtenga la superficie de una esfera.

Problema 15

Utilice coordenadas esféricas para representar en forma paramétrica la superficie de un cono de radio 3 y altura 7. Siguiendo el procedimiento esbozado en el problema 14 obtenga la superficie lateral de un cono cilíndrico de las dimensiones dadas.

Problema 16

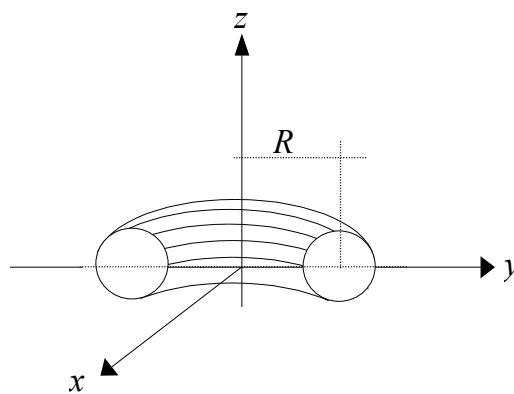
La representación paramétrica de la superficie de un Toro (ver la siguiente figura) está dada por la representación paramétrica

$$x = (R + \cos \phi) \cos \theta \quad (1)$$

$$y = (R + \cos \phi) \sin \theta \quad (2)$$

$$z = \sin \phi \quad (3)$$

en donde $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Encuentre dos vectores tangentes a la superficie y utilícelos para encontrar el área superficial. *Sugerencia: Busque en la literatura detalles de la definición de tal sistema de coordenadas.*



Problema 17

Demuestra las relaciones dadas por la ec- (10.6) usadas para la demostración del teorema de la divergencia

$$\begin{aligned} \text{en } z_2(x, y) \quad dx dy &= +\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS \\ \text{en } z_1(x, y) \quad dx dy &= -\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (10.6)$$

Problema 18

Demuestra que la fórmula para la derivada material de cualquier variable en un medio continuo está dada por

$$\frac{D\psi}{Dt} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \psi$$

Explica el significado físico de cada término.

Problema 19

Demuestra que la fórmula para la derivada total de cualquier variable en un medio continuo está dada por

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla \psi$$

Explica el significado físico de cada término.

Problema 20

Explique el significado físico de cada uno los términos de las ecuaciones (E10.1), (E10.3) y (E10.5) del procedimiento para deducir la ecuación de continuidad en un volumen de control material.

Problema 21

Explique el significado físico de cada uno los términos de las ecuaciones (E11.1), (E11.3) y (E11.4) del procedimiento para deducir la ecuación de continuidad en un volumen de control arbitrario.

Problema 22

Demuestre que el teorema del transporte de Reynolds dado por la ec. (E9.10) puede escribirse en la siguiente forma

$$\frac{D}{Dt} \int_{\gamma_m(t)} \rho \psi dV = \int_{\gamma_m(t)} \rho \frac{D\psi}{Dt} dV$$

Recuerde que ψ es una variable con unidades de propiedad por unidad de masa y ρ es la densidad.

Problema 23

Demuestre que $\frac{D}{Dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \frac{D\mathbf{v}}{Dt}$, en donde $\mathbf{r}$ es el vector de posición.

Problema 24

Deduzca la ecuación de continuidad para un fluido usando un volumen no deformable de control de forma y tamaño arbitrarios y que permanece en el mismo lugar. Indique el significado físico de los términos en el balance inicial y en el resultado final.

III. Solución de ecuaciones diferenciales parciales en ingeniería química: método de separación de variables aplicado a problemas en coordenadas cartesianas

0. Algunos comentarios sobre el material incluido en este capítulo

En este capítulo se presenta el método de separación de variables para la solución de ecuaciones diferenciales parciales. Empezaremos revisando el problema de transferencia de calor por conducción en un sólido: la aleta de enfriamiento con perfil de temperatura bidimensional en estado estacionario. Con esto, espero ejemplificar la posibilidad de encontrar soluciones aproximadas y la necesidad de la solución exacta. Así tendremos una motivación para desarrollar el método de separación de variables a partir de conceptos sencillos para después aplicarlos a otros problemas. Esto nos llevará al problema Sturm-Liouville y a que quede muy claro el concepto de ecuación diferencial homogénea y condiciones de frontera homogéneas. La discusión de este punto debe mostrar la importancia de la redefinición (transformación) de variables que permita encontrar suficientes condiciones de frontera homogéneas, de tal manera que la aplicación del método de separación de variables sea exitosa. En este punto debe quedar claro el concepto de función propia, valor propio, condición de valor propio y condición de ortogonalidad.

El cambio de variables no siempre conduce a un problema que directamente pueda resolverse al aplicar el método de separación de variables. Por ello a continuación se introducirá el método de superposición para ser usado como una herramienta que permita extender el método de separación de variables a situaciones con condiciones de frontera más complejas.

En seguida se aplicará el método de separación de variables a problemas con ecuaciones diferenciales parabólicas. Este caso será utilizado para presentar la forma en que los problemas con ecuaciones diferenciales parciales nohomogéneas pueden ser resueltos usando el método de separación de variables. De esta presentación espero que pueda emanar el método de solución de ecuaciones diferenciales por expansión en funciones propias. El Apéndice C (Solución general de la ecuación diferencial lineal de primer orden) complementa los temas presentados a lo largo del presente capítulo.

La solución de los problemas al final del capítulo ayudarán al lector a afianzar los conceptos presentados. La comprensión de los conceptos alrededor de la expansión en series de funciones propias de cualquier función se mejorará si se trabaja en la solución de los problemas 1 a 5 y en especial en los programas de cómputo asociados. Se propone la solución de problemas con ecuaciones diferenciales parciales elípticas, parabólicas e

hiperbólicas usando la expansión en series de funciones propias, esto dará una buena idea de los alcances de esta metodología. Al respecto, será muy formativo el desarrollo de los programas de cómputo para evaluar las soluciones analíticas.

Sobre las referencias

Para profundizar en esto temas se pueden consultar las referencias 1,4,5,6, 8, 12 y 14. En particular el libro de Hildebrand [5] contempla muchos más casos, pero el libro de Greenberg [4] puede ser el más sencillo y didáctico. Las referencias [8] y [12] están enfocadas a la solución de problemas de Ingeniería Química. Problemas que puedan ser resueltos por el método de separación de variables pueden encontrarse en el trabajo de Churchill [3].

1. Introducción

Ahora introduciremos las ecuaciones diferenciales aplicadas a problemas de Ingeniería Química enfatizando el porque estamos interesados en el uso de ellas, y porque se debe recurrir en ocasiones a ecuaciones diferenciales parciales. Para ello nos referiremos al siguiente problema de transferencia de calor :

En la aleta de enfriamiento mostrada en la Figura 1 la transferencia de calor en estado permanente está dada por el siguiente problema de valor en la frontera

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \quad \text{en el dominio } 0 < y < L, -B \leq x \leq +B \quad (1.1)$$

Sujeta a

$$\text{en } y = 0, \quad T = T_w \quad \text{para } -B \leq x \leq +B \quad (1.2)$$

$$\text{en } y = L, \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{para } -B \leq x \leq +B \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} &\text{en } x = \pm B, \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = h(T - T_a) \\ &\text{ó} \quad \mp k \frac{\partial T}{\partial x} = h(T - T_a) \quad \text{para } 0 \leq y \leq L \end{aligned} \quad (1.4)$$

Al escribir la ec. (1.1) se ha supuesto que el calor que se transfiere en la dirección z es despreciable con respecto al que se transfiere en las otras dos direcciones, Además se desprecia el calor que se disipa por el extremo de la aleta, en $y = L$, lo cual para muchos sistemas será cierto si

$$W \gg L, 2B$$

La ecuación (1.1) es una ecuación diferencial parcial y en este momento no sabemos resolverla. Por ello recurriremos a un artificio matemático para obtener una solución aproximada. Introducimos el concepto de temperatura promedio, para este problema, como $L > 2B$ y los cambios más importantes de la temperatura se esperan en la dirección y , la definición adecuada es:

$$\langle T \rangle = \frac{\int_0^W \int_{-B}^{+B} T \, dx \, dz}{\int_0^W \int_{-B}^{+B} dx \, dz} = \frac{1}{2B} \int_{-B}^{+B} T \, dx \quad (1.5)$$

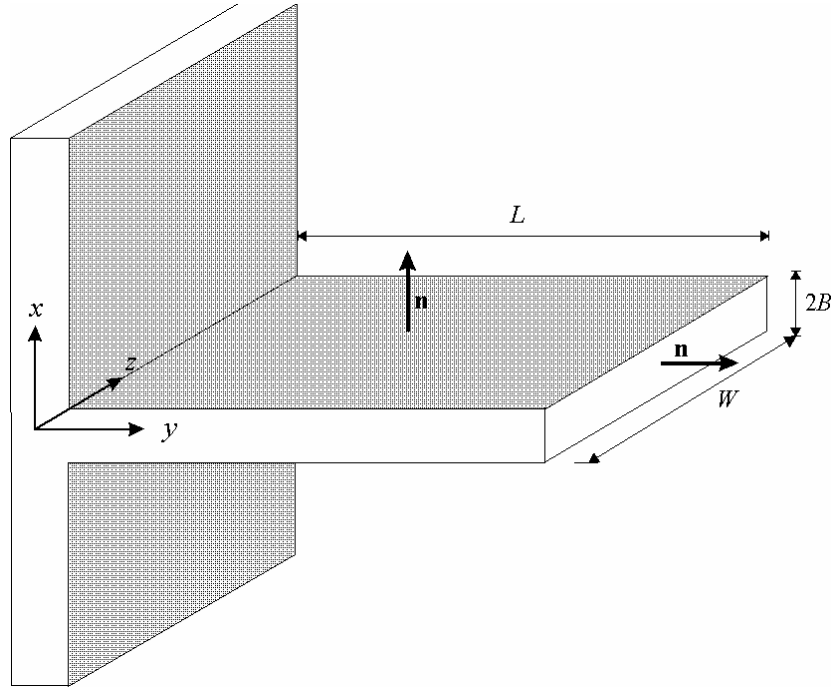


Figura 1. Aleta de enfriamiento rectangular.

Introduciendo esta definición en la ec. (1.1)

$$\frac{1}{2B} \int_{-B}^{+B} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx + \frac{1}{2B} \int_{-B}^{+B} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dy = 0$$

y como los límites de integración son constantes:

$$\frac{1}{2B} \int_{-B}^{+B} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) dx + \frac{\partial^2 \langle T \rangle}{\partial y^2} = 0 \quad (1.6)$$

que después de integrarse resulta en:

$$\frac{\partial^2 \langle T \rangle}{\partial y^2} + \frac{1}{2B} \left[\frac{\partial T}{\partial x} \right]_{-B}^{+B} = 0 \quad (1.7)$$

De (1.4) se obtiene

$$\text{en } x = +B \quad \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{h}{k} (T - T_a) \quad (1.8)$$

$$\text{en } x = -B \quad \frac{\partial T}{\partial x} = +\frac{h}{k} (T - T_a) \quad (1.9)$$

Usando las ecs. (1.8) y (1.9) en (1.7), y reconociendo que $\langle T \rangle$ es sólo función de y , la ec. (1.7) se reduce a:

$$\frac{d^2 \langle T \rangle}{d y^2} - \frac{h}{B k} (T - T_a) = 0 \quad (1.10)$$

Para poder resolver (1.10), basados en que $L > 2B$, nos vemos obligados a hacer la siguiente aproximación

$$T \approx \langle T \rangle \quad (1.11)$$

y así obtener

$$\frac{d^2 \langle T \rangle}{d y^2} - \frac{h}{B k} (\langle T \rangle - T_a) = 0 \quad (1.12)$$

Que está sujeta a las condiciones de frontera

$$\text{en } y = 0, \quad \langle T \rangle = T_w \quad (1.13)$$

$$\text{en } y = L, \quad \frac{d \langle T \rangle}{d y} = 0 \quad (1.14)$$

Para resolver esta ecuación primero introducimos las variables adimensionales siguientes

$$\theta = \frac{\langle T \rangle - T_a}{T_w - T_a} \quad Y = \frac{y}{L} \quad (1.15)$$

En términos de estas variables el problema de valor en la frontera es ahora

$$\frac{d^2 \theta}{d Y^2} - N^2 \theta = 0 \quad (1.16)$$

$$\text{en } Y = 0, \quad \theta = 1 \quad (1.17)$$

$$\text{en } Y = 1, \quad \frac{d \theta}{d Y} = 0 \quad (1.18)$$

Y el parámetro adimensional introducido es $N^2 = Bi \left(\frac{L}{B} \right)^2$

En donde el número de Biot está definido por

$$Bi = \frac{h B}{k} \quad (1.19)$$

La solución a este problema es

$$\theta = \frac{\cosh[N(1 - Y)]}{\cosh N} \quad (1.20)$$

Y el flux en la superficie es:

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = h(\langle T \rangle - T_a)$$

$$\text{ó} \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = h(T_w - T_a) \frac{\cosh[N(1-Y)]}{\cosh N} \quad (1.21)$$

Ahora queremos saber bajo que condiciones la aproximación

$$T \approx \langle T \rangle$$

es adecuada. Para esto podemos proponer

$$T = \langle T \rangle + \tilde{T} \quad (1.22)$$

En donde la desviación alrededor de la variable promedio $\tilde{T}$ es desconocida. Para estimarla recurrimos a las siguientes figuras en donde se muestran posibles perfiles de temperatura en la aleta

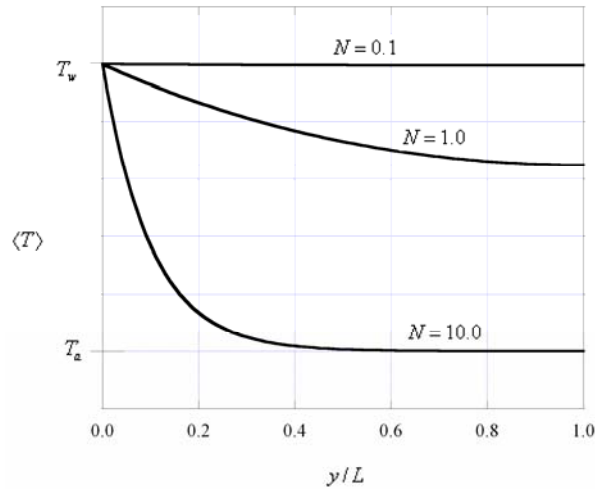


Figura 2. Perfil de la temperatura promedio en la dirección perpendicular a la pared.

Queremos encontrar las condiciones en las cuales

$$T_{x=0} - T_{x=B} \ll T_{x=B} - T_a \quad (1.23)$$

Una estimación del orden de magnitud del gradiente de temperatura es

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \mathbf{O}\left(\frac{T_{x=0} - T_{x=B}}{B}\right) \quad (1.24)$$

Esta ecuación permite, en combinación con la condición de frontera dada por la ec. (1.8), encontrar:

$$-\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{h}{k}(T_{x=B} - T_a) = \mathbf{O}\left(\frac{T_{x=0} - T_{x=B}}{B}\right)$$

De donde

$$T_{x=0} - T_{x=B} = \mathbf{O}(N_{Bi}(T_{x=B} - T_a)) \quad (1.25)$$

en la ecuación anterior se introdujo el número de Biot local definido por:

$$N_{Bi} = \frac{hB}{k} \quad (1.26)$$

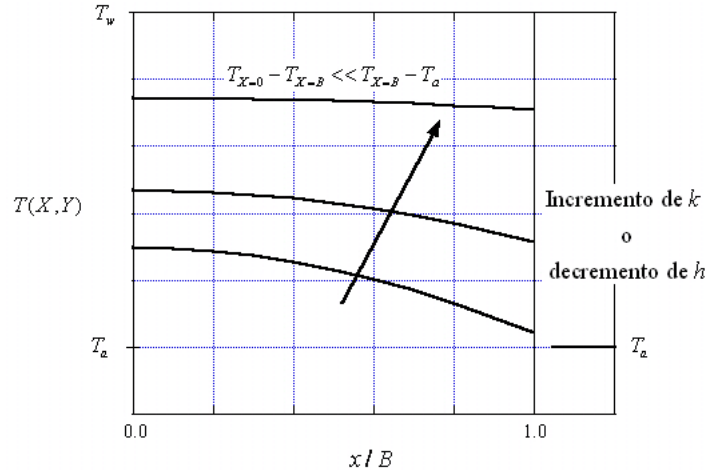


Figura 3. Perfiles de temperatura para un valor fijo de y .

Así podemos concluir de la ec. (1.23) que:

$$T_{x=0} - T_{x=B} << N_{Bi}(T_{x=0} - T_{x=B})$$

cuando

$$N_{Bi} << 1 \quad (1.27)$$

Si esta fuera la condición entonces:

$$T_{x=0} \approx T_{x=B} \approx \langle T \rangle \quad (1.28)$$

Y se esperaría que $\langle T \rangle$ sea una buena representación de la temperatura de la aleta de enfriamiento en los planos perpendiculares a la pared.

Por supuesto que las condiciones reales de validez de la solución desarrollada no las podremos saber hasta comparar los perfiles y fluxes obtenidos del problema de valor en la frontera planteado originalmente como ecs. (1.1) a (1.4). Para esto debemos aprender a resolver ecuaciones diferenciales parciales, y un método de solución es el de separación de variables. Antes de la presentación de ese tema revisaremos una lista de los diferentes tipos de ecuaciones diferenciales parciales y posibles alternativas de solución.

2. Ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden

Una ecuación diferencial parcial es una ecuación con más de una variable independiente, por ejemplo si $u = u(x, t)$ la ecuación gobernante podría ser

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

El orden de la ecuación es el de la derivada de orden más alto encontrada. Una ecuación diferencial parcial (EDP) lineal es una que no tiene productos de la variable dependiente por sí misma o por sus derivadas, por ejemplo:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v(x) \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v(x) \frac{\partial C}{\partial x} = D(x) \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (2.3)$$

Si no aparecen productos o potencias de las derivadas de la variable dependiente la ecuación es quasi-lineal. Esta es una clase especial de ecuaciones no lineales, por ejemplo:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \text{No lineal, pero quasi-lineal} \quad (2.4)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = 0, \quad \text{No lineal} \quad (2.5)$$

La forma más general de una ecuación quasi-lineal de segundo orden es:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F \quad (2.6)$$

en donde A , B , C , F son funciones de u , $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ x , y . Si A , B , C son independientes de u , $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ y F es una función lineal de u , $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ entonces la ecuación es lineal.

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial x} + \delta \frac{\partial u}{\partial y} + \phi \quad (2.7)$$

La ecuación es homogénea cuando $\phi = 0$.

Las ecuaciones de segundo orden se clasifican en tres tipos según la magnitud del discriminante $B^2 - 4AC$:

$$\Delta = B^2 - 4AC = 0 \quad \text{la ec. es parabólica}$$

$$\Delta = B^2 - 4AC > 0 \quad \text{la ec. es hiperbólica}$$

$$\Delta = B^2 - 4AC < 0 \quad \text{la ec. es elíptica}$$

Algunas de las ecuaciones más conocidas son las siguientes:

- Ecuación de conducción de calor unidimensional (No hay transporte convectivo).

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad B = 0, C = 0, \Delta = 0 \quad \text{Parabólica}$$

con la existencia de transporte convectivo:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v(x) \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad B = 0, C = 0, \Delta = 0 \quad \text{Parabólica}$$

- Ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad A, C = 1, B = 0, \Delta < 0 \quad \text{Elíptica}$$

- Ecuación de Poisson

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\rho \quad A, C = 1, B = 0, \Delta < 0 \quad \text{Elíptica}$$

- Ecuación de onda

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad A = \alpha^2, C = -1, B = 0, \Delta > 0 \quad \text{Hiperbólica}$$

Una ecuación diferencial para una variable u se puede satisfacer en un dominio ya sea abierto o cerrado (Figura 4). El dominio está delimitado por una superficie Σ , en la cual las condiciones de frontera se especifican. Las condiciones de frontera con las que nos encontraremos más frecuentemente en la definición de problemas en dominios cerrados son de tres tipos:

* Condición de frontera de Newman: La derivada de la variable dependiente, la cual es en realidad la componente normal del gradiente de la variable dependiente, está especificada por:

$$\mathbf{n} \cdot \nabla u = f(\mathbf{r}) \quad \text{en } \Sigma \quad (2.8)$$

* Condición de frontera de Dirichlet: La variable dependiente está especificada en la frontera.

$$\mathbf{u} = f(\mathbf{r}) \text{ en } \Sigma \quad (2.9)$$

* Condición de frontera mixta o de Cauchy: Se especifica en la frontera una función lineal de la componente normal del gradiente y de la función dependiente.

$$\alpha \mathbf{n} \cdot \nabla u + \beta u = f(\mathbf{r}) \text{ en } \Sigma \quad (2.10)$$

En problemas en dominios abiertos frecuentemente se requiere que la variable dependiente o su gradiente se hagan cero o sean finitos cuando $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$, esto puede indicarse como

$$u \rightarrow 0 \quad |\mathbf{r}| \rightarrow \infty \quad (2.11)$$

$$\nabla u \rightarrow 0 \quad |\mathbf{r}| \rightarrow \infty$$

Los tres tipos de condiciones son homogéneas para el caso en que el término independiente de la variable $f(\mathbf{r})$ es igual a cero.

Cuando se tiene que resolver una ecuación diferencial parcial se tiene que seleccionar un método. En la siguiente sección se mencionan varios de los más comunes.

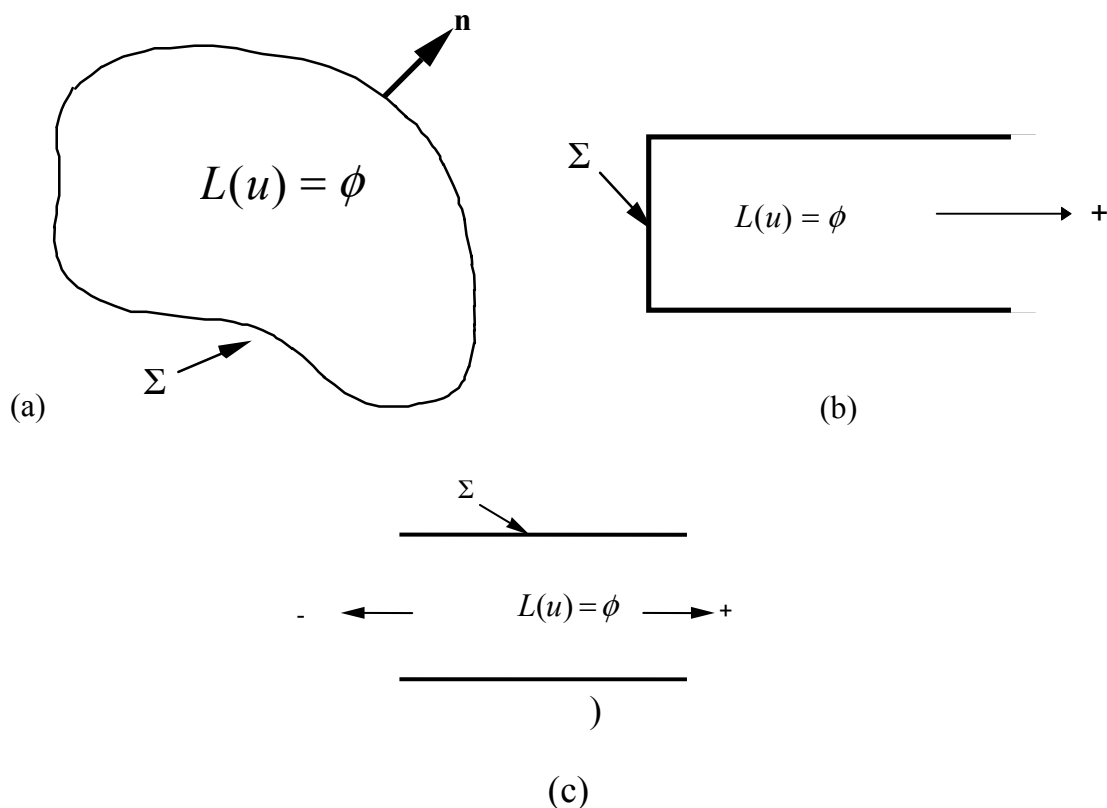


Figura 4. Tipos de dominio tratados en problemas de ingeniería Química: (a) cerrado, (b) semi infinito, y (c) infinito.

3. Algunos métodos de solución de ecuaciones diferenciales parciales (EDP)

A continuación se listan algunos de los métodos disponibles para la solución de ecuaciones diferenciales parciales. No se pretende que esta sea una lista completa, solo dar una idea de la variedad de los métodos existentes.

Métodos para la solución exacta de ecuaciones diferenciales parciales.

- a. Separación de variables. Este método es conveniente si el problema tiene las siguientes características:
 - Sistema de coordenadas ortogonal
 - Suficientes condiciones de frontera homogéneas
 - Dominio cerrado
- b. Métodos de transformada. Estos métodos son convenientes para dominios abiertos. Dos de los métodos más frecuentemente usados son:
 1. Transformada de Laplace $0 < t < \infty$ (semi infinito)
 2. Transformada de Fourier $-\infty < x < +\infty$ (infinito)
- c. Funciones de Green. Es un método muy útil para problemas no homogéneos, en especial cuando se tienen fuentes puntuales que son difíciles de representar con una expansión del tipo encontrado en el método de separación de variables.
- d. Métodos de similaridad. Este método generalmente es aplicable en problemas en donde se identifica una zona de cambios rápidos: capa límite. En muchos casos la transformación de similaridad reduce el problema original en término de ecuaciones diferenciales parciales a uno expresado con ecuaciones diferenciales ordinarias.

Métodos aproximados para la solución de ecuaciones diferenciales parciales no lineales.

- a. Analíticos
 1. Métodos de perturbación(útiles si se pueden identificar parámetros pequeños o grandes en la ecuación diferencial o las condiciones frontera).

2. Residuos ponderados

Colocación ortogonal

Momentos

Galerkin

b. Numéricos

1. Diferencias finitas. Es el método numérico más directo, pues su desarrollo se basa en ideas sencillas alrededor de la aproximación de funciones en series de Taylor. Los problemas más sencillos se pueden resolver con relativa facilidad, ya que el desarrollo de un programa de computación es muy directo. Sin embargo, el método requiere gran sofisticación cuando se involucran dominios que no son fácilmente representados en coordenadas ortogonales.
2. Elemento finito. El método se basa en las ideas de Galerkin y es en principio mucho más poderoso que el de diferencias finitas, como es de esperarse las ideas que lo fundamentan son más complicadas y el desarrollo de un programa de computación también es más complejo. Pero su aplicación a sistemas de geometrías complejas es inmediata.

Hay investigadores con gran reconocimiento que defienden con la misma intensidad cada uno de los dos métodos anteriores. Debemos mencionar, que muchos problemas complejos se han resuelto combinando ideas de ambos y de otros métodos.

La mayoría de los problemas relacionados a Fenómenos de Transporte e Ingeniería de reactores encontrados en los cursos típicos de un posgrado de Ingeniería Química se pueden resolver con herramientas de los métodos de separación de variables, transformada de Laplace y el método de diferencias finitas. Por tal razón es el objetivo de este libro revisar los fundamentos de tales métodos.

En muchos casos la solución de problemas requiere la aplicación de más de uno de los métodos listados. Así, se pueden proponer metodologías en base a las ideas teóricas que se presentarán.

4. Método de separación de variables

Este método funciona adecuadamente cuando el sistema de coordenadas es ortogonal, la ecuación es lineal y las condiciones de frontera son homogéneas. Primero se analizará la solución de una ecuación diferencial elíptica para mostrar los pasos principales del desarrollo. Por simplicidad, se empezará con un problema bidimensional en coordenadas cartesianas.

Considérese el siguiente problema de conducción de calor en estado estacionario.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \quad \text{en} \quad \begin{matrix} 0 < x < \ell \\ 0 < y < \ell \end{matrix} \quad (4.1)$$

$$T = T_0, \quad \text{en} \quad x = 0, \ell, \quad \text{para} \quad 0 < y < \ell \quad (4.2)$$

$$T = T_0, \quad \text{en} \quad y = 0, \quad \text{para} \quad 0 < x < \ell \quad (4.3)$$

$$T = T_1, \quad \text{en} \quad y = \ell, \quad \text{para} \quad 0 < x < \ell \quad (4.4)$$

Nótese que es muy parecido al problema de enfriamiento de la aleta pero con condiciones de frontera diferentes. Este es un problema con condiciones no-homogéneas, pero tres de ellas se pueden homogenizar si se utiliza la siguiente variable:

$$u = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} \quad (4.5)$$

Entonces

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = 0 \quad (4.6)$$

Sujeta

$$u = 0, \quad \text{en} \quad X = 0, 1 \quad \text{para} \quad 0 < Y < 1 \quad (4.7)$$

$$u = 0, \quad \text{en} \quad Y = 0, \quad \text{para} \quad 0 < X < 1 \quad (4.8)$$

$$u = 1, \quad \text{en} \quad Y = 1, \quad \text{para} \quad 0 < X < 1 \quad (4.9)$$

Se introdujeron las siguientes coordenadas adimensionales.

$$X = x / \ell, \quad Y = y / \ell \quad (4.10)$$

Se tratará de buscar soluciones de la forma

$$u(X, Y) = F(X)G(Y) \quad (4.11)$$

Substituyendo la ecuación (4.11) en (4.6) se puede obtener

$$\frac{1}{F} \frac{d^2 F}{dX^2} = -\frac{1}{G} \frac{d^2 G}{dY^2} \quad (4.12)$$

Puesto que los miembros derecho e izquierdo son funciones de diferente variable independiente, la igualdad sólo se puede satisfacer si los dos miembros son igual a la misma constante. La constante la denominaremos $-\lambda^2$ entonces

$$\frac{1}{F} \frac{d^2 F}{dX^2} = -\frac{1}{G} \frac{d^2 G}{dY^2} = -\lambda^2 \quad (4.13)$$

El signo es cuestión de conveniencia. Se podría haber seleccionado $+\lambda^2$, lo cual no modificaría el resultado final. Sin embargo, los valores de λ serían imaginarios. Resolviendo las ecuaciones (4.13) se encuentra

$$F(X) = A \sin(\lambda X) + B \cos(\lambda X) \quad (4.14a)$$

$$G(Y) = C \sinh(\lambda Y) + D \cosh(\lambda Y) \quad (4.14b)$$

Ahora se encontrarán las condiciones de frontera por medio de la sustitución de la ecuación (4.11) en las ecuaciones (4.7), (4.8) y (4.9) da:

Homogénea	$F(0) G(Y) = 0$	$\therefore F(0) = 0$ separable
-----------	-----------------	---------------------------------

Homogénea	$F(1) G(Y) = 0$	$\therefore F(1) = 0$ separable
-----------	-----------------	---------------------------------

Homogénea	$F(X) G(0) = 0$	$\therefore G(0) = 0$ separable
-----------	-----------------	---------------------------------

No- homogénea	$F(X) G(1) = 1$	no separable.
---------------	-----------------	---------------

En la dirección X hay dos condiciones de frontera homogéneas, y en Y solo una, posteriormente se verá la consecuencia de esto. Usando las condiciones de frontera en la dirección X :

$$F(X) = A \sin(\lambda X) + B \cos(\lambda X)$$

$$F(0) = B = 0$$

$$F(1) = A \sin(\lambda) = 0$$

Esta última ecuación se cumplirá cuando $A = 0$, ó $\sin(\lambda) = 0$. Si $A = 0$, entonces $F = 0$, que es la solución trivial. Por lo tanto,

$$\sin(\lambda) = 0 \quad (4.15)$$

Esta es la condición para obtener los valores propios, la cual se satisface si

$$\lambda_n = n\pi, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots, \infty$$

Estos son los valores propios. El valor $n = 0$ también es un valor propio, pero da lugar a la solución trivial. Si hubiéramos seleccionado $+\lambda^2$ como la constante de separación entonces la solución para F sería

$$F = A \sinh(\lambda X)$$

y la condición para los valores propios

$$\sinh(\lambda_n) = 0 \quad \text{en donde} \quad \lambda_n = i n \pi, \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \dots, \infty$$

Pero puesto que $\sinh(i\lambda X) = i \sin(\lambda X)$ la solución final sería idéntica.

Para cada n hay una función propia, así

$$F_n(X) = A_n \sin(\lambda_n X), \quad \text{en donde} \quad \lambda_n = n \pi, \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \dots, \infty \quad (4.16)$$

Para el problema de G sabemos que $G(0) = 0$, por lo tanto

$$G(0) = 0 = D$$

Que permite reducir (4.14b) a

$$G_n(Y) = C_n \sinh(\lambda_n Y), \quad \text{en donde} \quad \lambda_n = n \pi, \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \dots, \infty \quad (4.17)$$

Las ecuaciones (4.1) y (4.17) indican que hay n soluciones del tipo propuesto en la ecuación (4.11), por ello

$$U_n(X, Y) = F_n(X) G_n(Y)$$

$$U_n(X, Y) = A_n C_n \sin(\lambda_n X) \sinh(\lambda_n Y)$$

$$\text{ó} \quad U_n(X, Y) = a_n \sin(\lambda_n X) \sinh(\lambda_n Y), \quad \lambda_n = n \pi, \quad n = 1, 2, \dots, \infty \quad (4.18)$$

La solución general es la suma de todas las soluciones particulares

$$U(X, Y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\lambda_n X) \sinh(\lambda_n Y) \quad (4.19)$$

Para evaluar el coeficiente a_n , se utiliza la condición de frontera en $Y = 1$, dada por la ecuación (4.9), de tal forma que:

$$U(X, 1) = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\lambda_n X) \sinh(\lambda_n) \quad (4.20)$$

La cual es una expansión de 1 en términos de las funciones propias $\sin(\lambda_n X)$. Los coeficientes de la expansión son $a_n \sinh(\lambda_n)$. Se puede probar que las funciones propias son ortogonales, así

$$\int_0^1 \sin(\lambda_n X) \sin(\lambda_m X) dX = 0, \quad \text{si} \quad n \neq m \quad (4.21)$$

Que es una consecuencia directa de la condición para los valores propios. Esto puede lograrse considerando la integral

$$I_{nm} = \int_0^1 \text{sen}(\lambda_n X) \text{sen}(\lambda_m X) dX =$$

$$= \frac{\text{sen}(\lambda_m - \lambda_n) X}{2(\lambda_m - \lambda_n)} \Big|_0^1 - \frac{\text{sen}(\lambda_m + \lambda_n) X}{2(\lambda_m + \lambda_n)} \Big|_0^1, \quad \text{en donde } \lambda_m \neq \lambda_n$$

Desarrollando el término

$$\frac{\text{sen}(\lambda_m \pm \lambda_n) X}{\lambda_m \pm \lambda_n} \Big|_0^1 = \frac{\text{sen}(\lambda_m X) \cos(\lambda_n X)}{\lambda_m \pm \lambda_n} \Big|_0^1 = 0, \quad \text{puesto que } \text{sen} \lambda_m = 0$$

$$\pm \frac{\cos(\lambda_n X) \text{sen}(\lambda_m X)}{\lambda_m \pm \lambda_n} \Big|_0^1 = 0, \quad \text{puesto que } \text{sen} \lambda_n = 0$$

Nótese que la condición para los valores propios hace que las funciones propias sean ortogonales

$$I_{nm} = \int_0^1 \text{sen}(\lambda_n X) \text{sen}(\lambda_m X) dX = 0, \quad \lambda_n \neq \lambda_m \quad (4.22)$$

Pero además

$$I_{nn} = \int_0^1 \text{sen}^2(\lambda_n X) dX = \left[\frac{1}{2} X - \frac{1}{4} \text{sen}(2\lambda_n X) \right]_0^1$$

$$\text{ó} \quad I_{nn} = \frac{1}{2} \quad (4.23)$$

La ortogonalidad de las funciones propias dada por la ec. (4.22) puede usarse para evaluar los coeficientes de la ec. (4.20).

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \text{sen}(\lambda_n X)] \text{senh}(\lambda_n)$$

multiplicando por $\text{sen}(\lambda_m X)$ e integrando de 0 a 1

$$\int_0^1 \text{sen}(\lambda_n X) dX = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{senh}(\lambda_n) \int_0^1 \text{sen}(\lambda_n X) \text{sen}(\lambda_m X) dX$$

Esta se reduce a lo siguiente debido a la condición de ortogonalidad dada por la ecuación (4.22).

$$\int_0^1 \text{sen}(\lambda_n X) dX = \frac{1}{2} a_n \text{senh}(\lambda_n)$$

$$a_n = \frac{2[1 - \cos(\lambda_n)]}{\lambda_n \sinh(\lambda_n)}, \quad \lambda_n = n\pi, n = 1, 2, \dots, \infty \quad (4.24)$$

El resultado final es:

$$U(X, Y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2[1 - \cos(n\pi)]}{n\pi \sinh(n\pi)} \sin(n\pi X) \sinh(n\pi Y) \quad (4.25)$$

En este momento se ha obtenido la solución analítica para la distribución de temperatura adimensional $U(X, Y)$, pero es claro que la evaluación no es tan directa debido a que la expresión está en términos de una serie infinita. Inmediatamente surge la pregunta ¿cuántos término de la serie son necesarios? El primer paso para responder esta pregunta será verificar si la serie es convergente. Esto lo logramos al comparar términos consecutivos de la serie que la expresaremos, reconociendo que en la forma actual los términos pares son cero, entonces (4.25) puede escribirse como

$$U(X, Y) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{4 \sin[(2j+1)\pi X] \sinh[(2j+1)\pi Y]}{(2j+1)\pi \sinh[(2j+1)\pi]} \quad (4.26)$$

$$o \quad U(X, Y) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j(X, Y)$$

$$\text{En donde} \quad A_j(X, Y) = \frac{4 \sin[(2j+1)\pi X] \sinh[(2j+1)\pi Y]}{(2j+1)\pi \sinh[(2j+1)\pi]} \quad (4.27)$$

La serie convergirá si la relación de términos consecutivos es menor que uno. Por ello se plantea

$$\frac{A_{j+1}(X, Y)}{A_j(X, Y)} = \left(\frac{2j+1}{4j+3} \right) \left(\frac{\sin[(4j+3)\pi X]}{\sin[(2j+1)\pi X]} \right) \left(\frac{\sinh[(4j+3)\pi Y]}{\sinh[(2j+1)\pi Y]} \right) \left(\frac{\sinh[(2j+1)\pi]}{\sinh[(4j+3)\pi]} \right) \quad (4.28)$$

No es demasiado difícil concluir que

$$\left(\frac{2j+1}{4j+3} \right) < 1, \quad \left(\frac{\sinh[(4j+3)\pi Y]}{\sinh[(2j+1)\pi Y]} \right) \left(\frac{\sinh[(2j+1)\pi]}{\sinh[(4j+3)\pi]} \right) < 1 \quad (4.29a,b)$$

Es importante reconocer que lo anterior es más fácil de satisfacer a medida que el valor de Y se aleja de 1. El término que contiene la relación de senos trigonométricos es más complicado de analizar. Sin embargo, cuando $X \ll 1$

$$\left(\frac{2j+1}{4j+3} \right) \left(\frac{\sin \left[\frac{(4j+3)\pi X}{2} \right]}{\sin \left[\frac{(2j+1)\pi X}{2} \right]} \right) \approx \left(\frac{2j+1}{4j+3} \right) \left(\frac{(4j+3)\pi X}{(2j+1)\pi X} \right) \approx 1 \quad (4.30)$$

Y así para $X \ll 1$

$$\frac{A_{j+1}(X, Y)}{A_j(X, Y)} < 1 \quad (4.31)$$

El análisis también se puede realizar para valores tales como $X = 0.5$ y $X = 1$ llegando a la misma conclusión. El análisis no nos da información de que tan rápido (cuantos términos se necesitan) se alcanza la convergencia. Así, el número de términos necesarios podría ser poco práctico.

Al complicarse las expresiones en las soluciones por serie, el análisis de convergencia puede ser mucho más difícil y la obtención de criterios mucho menos evidente. Un buen programa de cómputo puede evitar el análisis, pero es recomendable tener en mente que el análisis de la serie nos puede dar información muy útil y que la serie aunque formalmente correcta puede simplemente no converger.

Lo discutido anteriormente sobre la convergencia de la solución se ejemplifica en los resultados mostrados en las Figura 5, que se encuentra a continuación. Es claro que la serie converge mucho más rápido en las zonas lejanas a $Y = 1$ y las zonas de mayor problema para alcanzar la convergencia están en la vecindad de las esquinas $(0,1)$ y $(1,1)$. Como algo importante debemos concluir que la rapidez de convergencia de la serie depende de las coordenadas (X, Y) y por ello un programa eficiente para obtener el perfil de temperatura deberá probar término a término cómo la suma se acerca al valor convergente y parar el proceso al alcanzar una tolerancia pertinente.

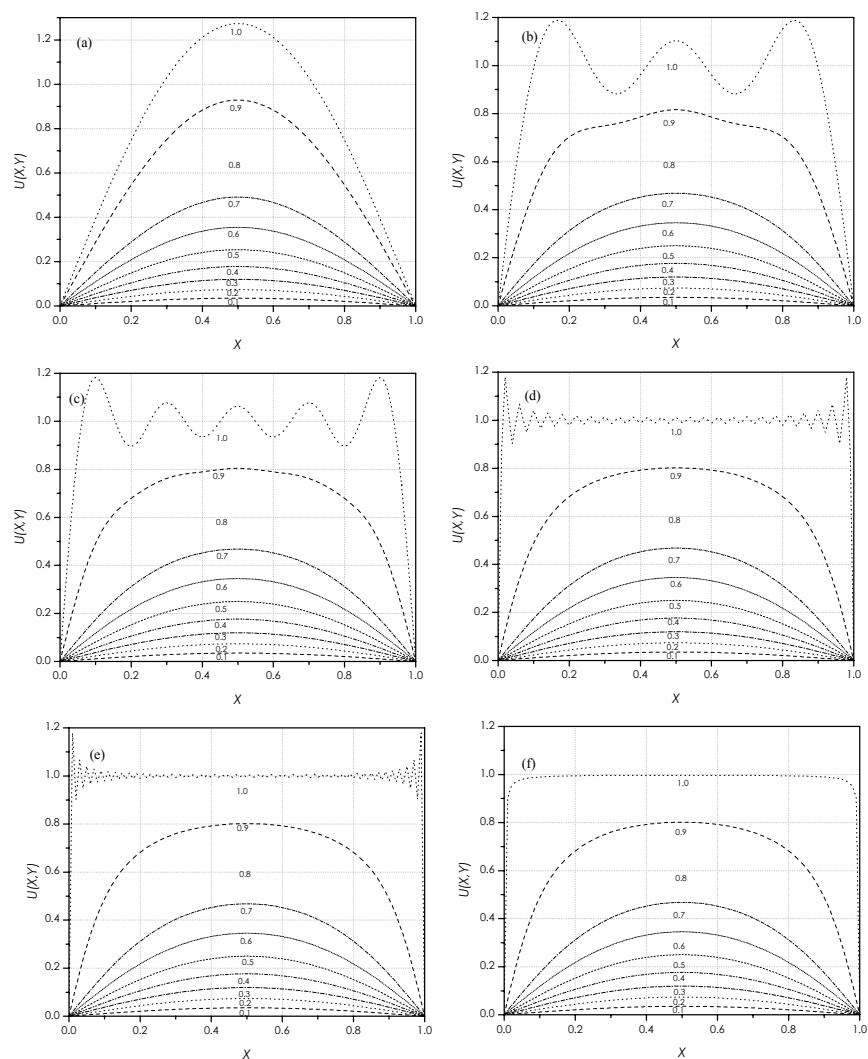


Figura 5. Efecto del número de términos en la evaluación de la solución para diferentes términos de la serie (a) 1, (b) 5, (c) 10, (d) 50, (e) 100 y (f) 200.

5. El problema de Sturm-Liouville

Debemos hacer notar que se pudo encontrar la solución por el método de separación de variables debido a que la ecuación diferencial es lineal y homogénea. Esta condición no hubiera sido suficiente, ya que si se hubieran dejado las condiciones de frontera expresadas en su forma original, ecs. (4.2)-(4.4) no se hubiera podido encontrar información para las condiciones de frontera de $F(X)$ y $G(Y)$ y por lo tanto no habríamos podido determinar la constante de separación λ . Finalmente para obtener las constantes a_n en la serie infinita aparentemente contamos con una gran suerte al disponer de la fórmula (4.21). En realidad esta no es una casualidad sino resultado de la estructura matemática del problema original que da lugar al problema de $F(X)$. Nótese que este está dado por la ec. diferencial (4.13)

$$\frac{d^2 F}{dX^2} = -\lambda^2 F \quad (5.1)$$

Y las condiciones de frontera

$$F(0) = F(1) = 0 \quad (5.2)$$

Esta es una forma particular del llamado problema de Sturm-Liouville, y como vimos anteriormente su solución incluye el determinar la constante λ . Así encontramos que

$$F_n(X) = \text{sen}(\lambda_n X), \text{ en donde } \lambda_n = n\pi, \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots \infty \quad (5.3)$$

Esto nos lleva a que las ecuaciones (5.1) y (5.2) representan el problema de valor en la frontera de cada una de las F_n , esto es

$$\frac{d^2 F_n}{dX^2} = -\lambda_n^2 F_n \quad (5.4)$$

Y las condiciones de frontera

$$F_n(0) = F_n(1) = 0 \quad (5.5)$$

Como el problema es válido para cualquier n , podemos escribir (5.4) como

$$\frac{d^2 F_n}{dX^2} = -\lambda_n^2 F_n, \quad \frac{d^2 F_m}{dX^2} = -\lambda_m^2 F_m \quad \text{en donde } n \neq m \quad (5.6a,b)$$

Con el propósito de buscar una fórmula como la mostrada en (4.21) multiplicamos la ec. (5.6a) por F_m y (5.6b) por F_n para luego substraer de la primera la segunda. Así obtendremos

$$F_m \frac{d^2 F_n}{dX^2} - F_n \frac{d^2 F_m}{dX^2} = -\lambda_n^2 F_m F_n + \lambda_m^2 F_n F_m, \quad \text{en donde } n \neq m \quad (5.7)$$

$$\text{ó} \quad (\lambda_n^2 - \lambda_m^2) F_m F_n = F_n \frac{d^2 F_m}{dX^2} - F_m \frac{d^2 F_n}{dX^2}, \quad n \neq m \quad (5.8)$$

Nótese que si $n = m$ se tendrá una identidad y el análisis pierde todo significado. Ahora se integra la expresión en el dominio de validez de $F(X)$ $[0,1]$, para obtener

$$(\lambda_n^2 - \lambda_m^2) \int_0^1 F_m F_n dX = \int_0^1 F_n \frac{d^2 F_m}{dX^2} dX - \int_0^1 F_m \frac{d^2 F_n}{dX^2} dX \quad (5.9)$$

Integración por partes de los términos del lado derecho de la ecuación nos llevan a

$$\begin{aligned} (\lambda_n^2 - \lambda_m^2) \int_0^1 F_m F_n dX = & \left[F_n \frac{d F_m}{d X} \right]_{X=0}^{X=1} - \int_0^1 \frac{d F_n}{d X} \frac{d F_m}{d X} dX - \left[F_m \frac{d F_n}{d X} \right]_{X=0}^{X=1} + \int_0^1 \frac{d F_m}{d X} \frac{d F_n}{d X} dX \end{aligned} \quad (5.10)$$

que inmediatamente se puede reducir a

$$(\lambda_n^2 - \lambda_m^2) \int_0^1 F_m F_n dX = \left[F_n \frac{d F_m}{d X} \right]_{X=0}^{X=1} - \left[F_m \frac{d F_n}{d X} \right]_{X=0}^{X=1} \quad (5.11)$$

La aplicación de las condiciones de frontera nos lleva a

$$\begin{aligned} (\lambda_n^2 - \lambda_m^2) \int_0^1 F_m F_n dX = & F_n(1) \left[\frac{d F_m}{d X} \right]_{X=1} - F_n(0) \left[\frac{d F_m}{d X} \right]_{X=0} - F_m(1) \left[\frac{d F_n}{d X} \right]_{X=1} + F_m(0) \left[\frac{d F_n}{d X} \right]_{X=0} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Al usar las condiciones de frontera dadas por la ec. (5.5) la ecuación anterior se reduce a

$$(\lambda_n^2 - \lambda_m^2) \int_0^1 F_m F_n dX = 0$$

que nos lleva a la fórmula buscada

$$\int_0^1 F_m F_n dX = 0, \quad n \neq m \quad (5.13)$$

Nótese que no tuvimos necesidad de usar la forma específica de $F_n(X)$ ni los valores de λ_n . Sin embargo, si no se dispusiera de condiciones de frontera homogéneas para $F(X)$ no se hubiera podido determinar λ_n ni tampoco se podría haber llegado a la fórmula (5.13). Una forma más general del problema de Sturm Liouville está dada por

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \lambda y \quad \text{en} \quad a \leq x \leq b \quad (5.14)$$

y las condiciones de frontera homogéneas

$$a_1 y(a) - a_2 \left. \frac{dy}{dx} \right|_{y=a} = 0 \quad (5.15a)$$

$$b_1 y(b) - b_2 \left. \frac{dy}{dx} \right|_{y=b} = 0 \quad (5.15b)$$

En donde a_1 , a_2 , b_1 y b_2 son constantes y a_2 , b_2 son diferentes de cero. Este, como se encontrará en las siguientes secciones y los ejemplos propuestos, se puede resolver para encontrar las soluciones y_n (funciones propias) y los valores de λ_n (valores propios). De tal manera que el problema dado por las ecs.(5.14)-(5.15) puede ahora escribirse como

$$\frac{d^2 y_n}{dx^2} = \lambda_n y_n \quad \text{en } a \leq x \leq b \quad (5.16)$$

Sujeta a las condiciones de frontera homogéneas

$$a_1 y_n(a) - a_2 \left. \frac{dy_n}{dx} \right|_{y=a} = 0 \quad (5.17a)$$

$$b_1 y_n(b) - b_2 \left. \frac{dy_n}{dx} \right|_{y=b} = 0 \quad (5.17b)$$

Se puede ahora demostrar, por un procedimiento análogo al seguido para encontrar (5.13), que

$$\begin{aligned} (\lambda_n - \lambda_m) \int_a^b y_n y_m dx &= \left[y_n(b) \left. \frac{dy_m}{dx} \right|_b - y_m(b) \left. \frac{dy_n}{dx} \right|_b \right] \\ &\quad + \left[y_m(a) \left. \frac{dy_n}{dx} \right|_a - y_n(a) \left. \frac{dy_m}{dx} \right|_a \right] \end{aligned} \quad (5.18)$$

Al involucrar las condiciones de frontera se llega a

$$\begin{aligned} (\lambda_n - \lambda_m) \int_a^b y_n y_m dx &= \left[y_n(b) y_m(b) \frac{b_1}{b_2} - y_m(b) y_n(b) \frac{b_1}{b_2} \right] \\ &\quad + \left[y_m(a) y_n(a) \frac{a_1}{a_2} - y_n(a) y_m(a) \frac{a_1}{a_2} \right] \end{aligned} \quad (5.19)$$

o sea
$$\int_a^b y_m y_n dx = 0, \quad n \neq m \quad (5.20)$$

que se denomina la condición de ortogonalidad de las funciones propias. Una vez más nótese que no fue necesario utilizar la forma específica de y_n y λ_n para encontrar la ec. (5.18). O sea solo es necesario que el problema de valor en la frontera tenga la forma de las ecs. (5.14)-(5.15), un problema de Sturm-Liouville, para concluir que existe la condición de ortogonalidad dada por la ec. (5.20). Insistiremos que el problema dado por las ecs. (5.4)-(5.5) es de la forma dada por las ecs. (5.16)-(5.17) con las siguientes equivalencias

$$\begin{aligned} F_n &\Rightarrow y_n \\ -\lambda_n^2 &\Rightarrow \lambda_n \end{aligned}$$

$$X \Rightarrow x$$

$$0 \Rightarrow a$$

$$1 \Rightarrow b$$

En la siguiente sección revisaremos una formulación del problema de Sturm-Liouville que incluye los problemas generados en otros sistemas de coordenadas ortogonales, pero antes resumiremos las ideas relacionadas que hemos encontrado hasta el momento con las referidas a la solución de problemas de valor en la frontera bidimensionales por el método de separación de variables. Esto lo expresaremos en la siguiente forma:

Condiciones para resolver un problema de valor en la frontera con una ecuación elíptica bidimensional:

- a) La ecuación debe ser homogénea: ecuación de Laplace.
- b) Deben disponerse de suficientes condiciones de frontera homogéneas. Esto significa al menos dos condiciones homogéneas en la misma dirección. En ocasiones estas se pueden obtener con un cambio de variable sencillo.

Por último antes de pasar a la siguiente sección debemos enfatizar que si el problema de valor en la frontera es homogéneo, o sea tanto la ecuación diferencial como las condiciones de frontera, la solución es la trivial.

6. Teoría de Sturm-Liouville. Funciones ortogonales y problemas de valor en la frontera

Los problemas lineales que se formulan en sistemas de coordenadas ortogonales son factibles de separación. O sea la solución puede escribirse como resultado de la separación de la siguiente manera

$$u(x_1, x_2, x_3) = F_1(x_1)F_2(x_2)F_3(x_3) \quad (6.1)$$

Esto genera ecuaciones diferenciales para cada una de las funciones $F_1(x_1)$, $F_2(x_2)$, $F_3(x_3)$ en términos de las constantes de separación, λ . Las ecuaciones son de la forma

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + [q(x) + \lambda w(x)] y = 0 \quad (6.2)$$

En donde x representa cualquiera de las tres coordenadas x_1 , x_2 , x_3 y y la correspondiente función $F_1(x_1)$, $F_2(x_2)$ ó $F_3(x_3)$. La constante de separación es λ y $p(x)$, $q(x)$, $w(x)$ toman diferentes formas funcionales dependiendo del sistema coordenado. Esto se muestra mejor en los siguientes dos ejemplos:

Ejemplo 1

En coordenadas cartesianas hemos visto que la solución de la ecuación diferencial parcial

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = 0 \quad (6.E1.1)$$

puede escribirse como

$$u(X, Y) = F(X)G(Y) \quad (6.E1.2)$$

en donde

$$\frac{d^2 F}{dX^2} + \lambda^2 F = 0 \quad \frac{d^2 G}{dY^2} - \lambda^2 G = 0 \quad (6.E1.3a,b)$$

Comparando estas ecuaciones con la ecuación (6.2) se concluye que :
para la ecuación (6.E1.3a)

$$\lambda = \lambda^2, \quad q = 0, \quad p = w = 1;$$

y para la ecuación (6.E1.3b)

$$\lambda = -\lambda^2, \quad q = 0, \quad p = w = 1.$$

Ejemplo 2

En coordenadas cilíndricas

$$\nabla^2 u = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial u}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} = 0 \quad (6.E2.1)$$

y la separación de variables conduce a :

$$u(R, Z) = F(R)G(Z) \quad (6.E2.2)$$

En donde $G(Z)$ está determinada por

$$\frac{d^2 G}{dZ^2} - \lambda^2 G = 0 \quad (6.E2.3)$$

que es de la misma forma que (6.E1.3b). La ecuación diferencial ordinaria que determina $F(R)$ es

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{dF}{dR} \right) + \lambda^2 F = 0$$

$$\frac{d}{dR} \left(R \frac{dF}{dR} \right) + \lambda^2 RF = 0 \quad (6.E2.4)$$

Al comparar esta con (6.2) se concluye que

$$\lambda = \lambda^2, \quad q = 0, \quad p = w = R$$

Los ejemplos anteriores muestran que las ecuaciones ordinarias obtenidas por el método de separación de variables son de la forma mostrada por la ecuación (6.2).

Las condiciones de frontera que se generan en la dirección x pueden ser de muchas formas, sin embargo, frecuentemente ellas son homogéneas o periódicas. Esto en el sentido en que se discutirá a continuación. Supondremos que a y b son los límites de integración a lo largo del eje coordenado x , y que las condiciones de frontera que debe satisfacer la solución de la ecuación (6.2) son las siguientes

$$a_1 y(a) - a_2 \left. \frac{dy}{dx} \right|_{y=a} = 0 \quad (6.3a)$$

$$b_1 y(b) - b_2 \left. \frac{dy}{dx} \right|_{y=b} = 0 \quad (6.3b)$$

Estas son condiciones homogéneas mixtas o del tipo de Cauchy. Ya anteriormente vimos que al tener un problema condiciones homogéneas, se generan un número infinito de soluciones (funciones propias) $y_1, y_2, y_3, \dots$ que corresponden a los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$. Algunas veces las condiciones son periódicas, como por ejemplo

$$y(a) = y(b) \quad (6.4a)$$

$$r(a) y'(a) = r(b) y'(b) \quad (6.4b)$$

Note que el que $r(a) = r(b)$, implica que la función $y(x)$ y su primera derivada $y'(x)$ valen lo mismo en a y b .

Lo que pretendemos ahora es demostrar que las funciones propias, soluciones de la ecuación diferencial ordinaria de la forma mostrada por la ecuación (6.2), con condiciones de frontera homogéneas o periódicas, son ortogonales con respecto a la función de ponderación $w(x)$. Es decir

$$\int_a^b w(x) y_n(x) y_m(x) dx = 0, \text{ para } n \neq m \quad (6.5)$$

Veremos que esta propiedad es generada directamente de la forma de las condiciones de frontera. Si probamos lo anterior en general, en adelante, podremos después de observar la ecuación diferencial ordinaria y las condiciones de frontera, decidir si las soluciones son ortogonales o no. De esta forma no tendremos que analizar la posible ortogonalidad de las funciones generadas en cada caso particular. El problema de valor en la frontera definido por ecuaciones de la forma (6.2), con condiciones de frontera del tipo (6.3) o (6.4) se conoce como problema de Sturm-Liouville.

Para lograr la demostración pretendida consideramos las ecuaciones diferenciales asociadas con las funciones propias y_n , y y_m correspondientes a dos valores propios diferentes λ_n , y λ_m :

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy_n}{dx} \right] + [q(x) + \lambda_n w(x)] y_n = 0 \quad (6.6a)$$

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy_m}{dx} \right] + [q(x) + \lambda_m w(x)] y_m = 0 \quad (6.6b)$$

Ahora se multiplicará la primera de ellas por y_m , y se le restará la segunda multiplicada por y_n , para obtener

$$(\lambda_n - \lambda_m) y_n y_m w = y_n \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy_m}{dx} \right] - y_m \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy_n}{dx} \right]$$

Ahora procedemos a la integración de este resultado entre a y b para obtener

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_a^b w y_n y_m dx = \int_a^b \left\{ y_n \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy_m}{dx} \right] - y_m \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy_n}{dx} \right] \right\} dx$$

El miembro derecho de esta ecuación puede ser integrado por partes para obtener

$$\begin{aligned} (\lambda_n - \lambda_m) \int_a^b w y_n y_m dx &= y_n p(x) \frac{dy_m}{dx} \Big|_a^b - \int_a^b p(x) \frac{dy_n}{dx} \frac{dy_m}{dx} dx \\ &\quad - y_m p(x) \frac{dy_n}{dx} \Big|_a^b + \int_a^b p(x) \frac{dy_m}{dx} \frac{dy_n}{dx} dx \end{aligned}$$

Que puede simplificarse fácilmente a

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_a^b w y_n y_m dx = p(b) \left[y_n(b) \frac{dy_m}{dx} \Big|_b - y_m(b) \frac{dy_n}{dx} \Big|_b \right]$$

$$+p(a)\left[y_m(a)\frac{dy_n}{dx}\Big|_a - y_n(a)\frac{dy_m}{dx}\Big|_a\right] \quad (6.7)$$

Podemos observar que si las condiciones son periódicas como se estableció en las ecuaciones (6.4), el miembro derecho de la ecuación (6.7) será idéntico a cero siempre y cuando

$$p(a) = p(b)$$

Como conclusión la ecuación (6.5) es satisfecha.

Para el caso en que las condiciones de frontera son homogéneas, como se muestran en la ecuación (6.3), podemos obtener

$$y'_m(a) = (a_1/a_2)y_m(a) ; \quad y'_n(a) = (a_1/a_2)y_n(a) \quad (6.8a)$$

$$y'_m(b) = (b_1/b_2)y_m(b) ; \quad y'_n(b) = (b_1/b_2)y_n(b) \quad (6.8b)$$

La substitución de estas en el miembro derecho de la ecuación (6.7) demuestra una vez más que la ecuación (6.5) se satisface. Podemos entonces concluir que las funciones propias generadas de cualquier problema de Sturm-Liouville son ortogonales con respecto a $w(x)$. Note que cuando $p(a) = p(b) = 0$, es suficiente que y y y' sean finitas en las fronteras para que las soluciones de la ecuación (6.2) sean ortogonales. Podemos entonces adicionar esta condición como otra de las posibles para tener un problema de Sturm-Liouville

$$\begin{aligned} &y(a), y'(a); y(b), y'(b) \text{ finitas} \\ &\text{con } p(a) = p(b) = 0 \end{aligned} \quad (6.9)$$

El valor de la integral definida por la ecuación (6.5) no es cero cuando $n = m$

$$\int_a^b w(x) y_n^2(x) dx = g_n \quad (6.10)$$

Podemos hacer las funciones propias ortonormales de la siguiente forma

$$Y_n(x) = \frac{y_n(x)}{\sqrt{g_n}} \quad (6.11)$$

Por lo tanto la condición de ortogonalidad se transforma a

$$\int_a^b w(x) Y_n(x) Y_m(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{para } n \neq m \\ 1, & \text{para } n = m \end{cases} \quad (6.12)$$

Cualquier función puede ser expandida en términos de funciones propias, por ejemplo la función $f(x)$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n Y_n(x)$$

Los coeficientes pueden obtenerse usando la propiedad de ortogonalidad. Multiplicando, ambos miembros de la ecuación (6.12), por $w(x) Y_m(x)$ e integrando

$$\begin{aligned} \int_a^b w(x) f(x) Y_m(x) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_a^b w(x) Y_n(x) Y_m(x) dx = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \begin{cases} 0, & \text{para } n \neq m \\ 1, & \text{para } n = m \end{cases} = A_m \end{aligned}$$

O sea las constantes de la expansión en series son

$$A_m = \int_a^b w(x) f(x) Y_m(x) dx$$

Para finalizar esta sección comentaremos que las series del Fourier del seno y coseno son un caso especial de funciones propias generadas por el problema definido por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda^2 y = 0, \quad -\pi < x < +\pi \quad (6.13)$$

sujeta a las condiciones de frontera

$$y(-\pi) = y(\pi) = 0 \quad (6.14)$$

$$y'(-\pi) = y'(\pi) = 0 \quad (6.15)$$

Generando soluciones de la forma

$$y_n(x) = a_n \sin(n\pi x) + b_n \cos(n\pi x), \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.16)$$

7. El problema de la aleta de enfriamiento en dos dimensiones: solución por el método de separación de variables.

Ahora podemos volver al problema de transferencia de calor y tratar de resolverlo como originalmente se planteó. O sea

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (7.1)$$

Sujeta a

$$\text{en } y = 0, \quad T = T_w \quad (7.2)$$

$$\text{en } y = L, \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (7.3)$$

$$\text{en } x = \pm B, \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = h(T - T_a) \quad \text{ó} \quad \mp \frac{\partial T}{\partial x} = h(T - T_a) \quad (7.4)$$

Es conveniente recordar lo planteado en la Sección 5 y que denominamos *Condiciones para resolver un problema de valor en la frontera con una ecuación elíptica bidimensional*. En el presente problema observamos que la ecuación diferencial es homogénea y que se tienen 3 condiciones nohomogéneas y solo la dada por la ec. (7.3) es homogénea. Para tener las dos condiciones de frontera necesarias en una misma dirección se introduce el siguiente cambio de variables adimensionales:

$$\text{en } u = \frac{T - T_a}{T_w - T_a}, \quad X = \frac{x}{B}, \quad Y = \frac{y}{B} \quad (7.5)$$

de tal manera que el problema toma ahora la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = 0 \quad (7.6)$$

$$\text{en } Y = 0, \quad u = 1 \quad (7.7)$$

$$\text{en } Y = r = \frac{L}{B}, \quad \frac{\partial u}{\partial Y} = 0 \quad (7.8)$$

$$\text{en } X = \pm 1, \quad \mp \frac{\partial u}{\partial X} = N_{Bi} u \quad (7.9)$$

En esta última hemos definido el número de Biot como

$$N_{Bi} = \frac{hB}{k} \quad (7.10)$$

En este momento debe ser claro que el problema dado por las ecs. (7.6)-(7.9) es factible de solución con el método de separación de variables ya que la ecuación diferencial es homogénea y se dispone de tres condiciones homogéneas, dos de ellas en la misma dirección. Note que el cambio de variables con $u = T/T_a$ llevaría a un problema adimensional, pero sin condiciones de frontera homogéneas suficientes.

Ahora procedemos a la solución de (7.6) por el método de separación de variables. Se propone

$$u(X, Y) = F(X)G(Y) \quad (7.11)$$

La substitución de (7.11) en (7.6) da

$$\frac{1}{F} \frac{d^2 F}{dX^2} + \frac{1}{G} \frac{d^2 G}{dY^2} = 0$$

ó

$$-\frac{1}{F} \frac{d^2 F}{dX^2} = \frac{1}{G} \frac{d^2 G}{dY^2} = \lambda^2 \quad (7.12)$$

Nótese que el signo en la separación se ha seleccionado de esta forma porque las dos condiciones de frontera en X son homogéneas. La solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias en (7.12) es

$$F(X) = A \sen(\lambda X) + E \cos(\lambda X) \quad (7.13)$$

$$G(Y) = C \sinh(\lambda Y) + D \cosh(\lambda Y) \quad (7.14)$$

Las condiciones homogéneas en X permiten encontrar

$$\text{en } X = \pm 1, \quad \mp \frac{dF}{dX} = N_{Bi} F \quad (7.15)$$

Utilizando estás condiciones para evaluar las constantes de $F(X)$, dada por la ecuación (7.13), cuya derivada es

$$\frac{dF}{dX} = \lambda [A \cos(\lambda X) - E \sen(\lambda X)] \quad (7.16)$$

Substituyendo (7.13) y (7.16) en (7.15) se obtiene :

en $X = +1$

$$-\lambda [A \cos \lambda - E \sen \lambda] = N_{Bi} [A \sen \lambda + E \cos \lambda] \quad (7.17)$$

en $X = -1$

$$+\lambda [A \cos \lambda + E \sen \lambda] = N_{Bi} [E \cos \lambda - A \sen \lambda] \quad (7.18)$$

De estas últimas se puede obtener

$$A [N_{Bi} \sen \lambda + \lambda \cos \lambda] = E [\lambda \sen \lambda - N_{Bi} \cos \lambda] \quad (7.19)$$

y

$$A [N_{Bi} \sen \lambda + \lambda \cos \lambda] = -E [\lambda \sen \lambda - N_{Bi} \cos \lambda] \quad (7.20)$$

Las cuales pueden escribirse como

$$A + M E = 0 \quad (7.21a)$$

$$A - M E = 0 \quad (7.21b)$$

en donde

$$M = \frac{N_{Bi} \cos \lambda - \lambda \sen \lambda}{N_{Bi} \sen \lambda + \lambda \cos \lambda} \quad (7.22)$$

El determinante del sistema de ecuaciones (7.21) es

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & M \\ 1 & -M \end{vmatrix} = -2 M$$

Solo hay solución no trivial para A y E si $M = 0$, o sea

$$N_{Bi} \cos \lambda - \lambda \sin \lambda = 0 \quad (7.23)$$

lo cual implica $A = 0$. Esto nos llevaría a que la $F(X)$ está dada por

$$F_n(X) = \cos(\lambda_n X) \quad (7.24)$$

siendo los valores propios las raíces de la ecuación (7.23).

Sin embargo, hay otra posibilidad porque las ecuaciones (7.21) pueden escribirse como

$$\frac{1}{M} A + E = 0 \quad (7.25a)$$

$$\frac{1}{M} A - E = 0 \quad (7.25b)$$

El determinante de este sistema es

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{M} & 1 \\ \frac{1}{M} & -1 \end{vmatrix} = -2 \frac{1}{M}$$

En este caso solo hay solución no trivial si

$$N_{Bi} \sin \lambda + \lambda \cos \lambda = 0 \quad (7.26)$$

lo cual implica que $E = 0$, y que la función $F(X)$ está ahora dada por

$$F_n(X) = \sin(\lambda_n X) \quad (7.27)$$

en donde los valores propios son las raíces de la ecuación (7.26).

Aquí cabe preguntarse cuál es la función $F(X)$ adecuada. Como el problema es lineal y ambas satisfacen la ecuación diferencial y las condiciones de frontera: ambas son correctas.

Es decir para X y Y dados el valor de la solución en términos de (7.24) o (7.27) debe ser el mismo. En las siguientes líneas demostraremos cual es más conveniente. Las ecuaciones (7.6) a (7.9) se reescribirán de la siguiente manera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial (-X)^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = 0 \quad (7.28)$$

$$\text{en } Y = 0, \quad u = 1 \quad (7.29)$$

$$\text{en } Y = r, \quad \frac{\partial u}{\partial Y} = 0 \quad (7.30)$$

$$\text{en } -X = \mp 1, \quad \pm \frac{\partial u}{\partial (-X)} = N_{Bi} u \quad (7.31)$$

Ahora demos el nombre $\bar{X}$ a $(-X)$ de tal forma que las ecuaciones (7.28) a (7.31) toman la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{X}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = 0 \quad (7.32)$$

$$\text{en } Y = 0, \quad u = 1 \quad (7.33)$$

$$\text{en } Y = r, \quad \frac{\partial u}{\partial Y} = 0 \quad (7.34)$$

$$\text{en } \bar{X} = \mp 1, \quad \pm \frac{\partial u}{\partial \bar{X}} = N_{Bi} u \quad (7.35)$$

Si ahora comparamos los problemas de valor en la frontera dados por las ecuaciones (7.6) a (7.9), y (7.32) a (7.35) podemos concluir que

$$u(X, Y) = u(\bar{X}, Y) \quad (7.36)$$

o sea

$$u(X, Y) = u(-X, Y) \quad (7.37)$$

Lo cual implica simetría, en este caso alrededor de $X = 0$. Por lo cual

$$\text{en } X = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial X} = 0 \quad (7.38)$$

Entonces en el problema de valor en la frontera dado por las ecuaciones (7.6) a (7.9), una de las condiciones de frontera en $X = \pm 1$ puede ser reemplazada por (7.38), de tal forma que el problema queda definido por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = 0 \quad (7.39)$$

$$\text{en } Y = 0, \quad u = 1 \quad (7.40)$$

$$\text{en } Y = r, \quad \frac{\partial u}{\partial Y} = 0 \quad (7.41)$$

$$\text{en } X = 1, \quad -\frac{\partial u}{\partial X} = N_{Bi} u \quad (7.42)$$

$$\text{en } X = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial X} = 0 \quad (7.43)$$

Ya hemos demostrado que si proponemos $u = F(X) G(Y)$, podemos demostrar a partir de la ecuación (7.39), que

$$F(X) = A \sin(\lambda X) + E \cos(\lambda X) \quad (7.44)$$

$$G(Y) = C \sinh(\lambda Y) + D \cosh(\lambda Y) \quad (7.45)$$

Las condiciones homogéneas dadas por las ecuaciones (7.42) y (7.43) permiten encontrar

$$\text{en } X = +1, \quad -\frac{dF}{dX} = N_{Bi} F \quad (7.46)$$

$$\text{en } X = 0, \quad \frac{dF}{dX} = 0 \quad (7.47)$$

La substitución de (7.44) en (7.46) nos lleva a

$$-\lambda [A \cos \lambda - E \sin \lambda] = N_{Bi} [A \sin \lambda + E \cos \lambda] \quad (7.48)$$

El uso de (7.44) en (7.47) resulta en

$$A(1) - B(0) = 0, \Rightarrow A = 0 \quad (7.49)$$

Por lo que (7.48) se simplifica a

$$\tan \lambda = \frac{N_{Bi}}{\lambda}, \text{ condición de los valores propios} \quad (7.50)$$

y (7.44) a

$$F_n(X) = \cos(\lambda_n X) \quad (7.51)$$

Nótese que la solución es idéntica a una de las encontradas anteriormente [ecuaciones (7.23) y (7.24)]. En este momento podemos plantear que la solución del problema es

$$u(X, Y) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(X) G_n(Y) \quad (7.52)$$

en donde

$$G_n(Y) = C_n \sinh(\lambda_n Y) + D_n \cosh(\lambda_n Y) \quad (7.53)$$

Podemos utilizar la condición homogénea dada por la ecuación (7.41) para encontrar

$$\text{en } Y = r, \quad \frac{dG}{dY} = 0 \quad (7.54)$$

Esta nos permite a partir de (7.53) concluir que

$$C_n = -D_n \tanh(\lambda_n r) \quad (7.55)$$

Utilizando esta escribiremos (7.53) como

$$G_n(Y) = D_n g_n(Y) \quad (7.56)$$

$$\text{en donde } g_n(Y) = \cosh(\lambda_n Y) - \tanh(\lambda_n r) \sinh(\lambda_n Y) \quad (7.57)$$

Por lo que usando (7.56) en (7.52), esta puede expresarse como

$$u(X, Y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n F_n(X) g_n(Y) \quad (7.58)$$

Ahora, para determinar la constante D_n , se usa la condición de frontera dada por la ecuación (7.40), o sea en $Y = 0$ la ecuación (7.58) da

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} D_n F_n(X) \quad (7.59)$$

Ahora debemos reconocer que $F_n(X)$ es la solución de un problema del tipo de Sturm-Liouville, por lo tanto

$$\int_0^1 F_m(X) F_n(X) dX = 0, \quad \text{si } n \neq m \quad (7.60)$$

Utilizando esta condición de ortogonalidad en la ecuación (7.59) se puede obtener

$$D_n = \frac{\int_0^1 F_n(X) dX}{\int_0^1 F_n^2(X) dX} \quad (7.61)$$

Que puede expresarse como

$$D_n = \frac{4 \operatorname{sen} \lambda_n}{2 \lambda_n + \operatorname{sen}(2 \lambda_n)} \quad (7.62)$$

Aquí hemos utilizado

$$\begin{aligned} \int_0^1 \cos^2(\lambda_n X) dX &= \left[\frac{X}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2 \lambda_n X)}{4 \lambda_n} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2 \lambda_n)}{4 \lambda_n} \end{aligned} \quad (7.63)$$

$$\int_0^1 \cos(\lambda_n X) dX = \left[\frac{\operatorname{sen}(\lambda_n X)}{\lambda_n} \right]_0^1 = \frac{\operatorname{sen} \lambda_n}{\lambda_n} \quad (7.64)$$

Para finalizar el problema es conveniente hacer un resumen del resultado

Solución:
$$u(X, Y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n F_n(X) g_n(Y) \quad (7.65)$$

en donde

$$F_n(X) = \cos(\lambda_n X) \quad (7.66)$$

$$g_n(Y) = \cosh(\lambda_n Y) - \tanh(\lambda_n r) \operatorname{senh}(\lambda_n Y) \quad (7.67)$$

esta última puede expresarse también como

$$g_n(Y) = \frac{\cosh[\lambda_n(r - Y)]}{\cosh(\lambda_n r)}$$

La constante D_n esta dada por

$$D_n = \frac{4 \operatorname{sen} \lambda_n}{2 \lambda_n + \operatorname{sen}(2 \lambda_n)} \quad (7.68)$$

y los valores propios λ_n se evalúan de

$$\tan \lambda_n = \frac{N_{Bi}}{\lambda_n}, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (7.69)$$

Recuérdese que estas ecuaciones están en términos de las siguientes variable y parámetros adimensionales

$$u = \frac{T - T_a}{T_w - T_a}, \quad X = \frac{x}{B}, \quad Y = \frac{y}{B}, \quad r = \frac{L}{B} \quad (7.70)$$

Ahora podemos utilizar la ec. (7.65) para calcular la temperatura promedio de acuerdo a

$$\langle T \rangle = \frac{1}{2B} \int_{-B}^{+B} T dx = \int_0^1 T(X, Y) dX \quad (7.71)$$

Substituyendo T en términos de u usando ecuación (7.70)

$$\langle T \rangle_{\text{exac}} = \int_0^1 (T_w - T_a) u dX - \int_0^1 T_a dX \quad (7.72)$$

Aquí hemos denominado $\langle T \rangle_{\text{exac}}$ como el promedio exacto pues u ha sido encontrada sin incluir suposiciones adicionales a las que se hicieron en el planteamiento original del problema de la aleta de enfriamiento rectangular.

Procediendo a evaluar la integral en la ecuación (7.72) se llega a

$$\langle u_{\text{exacta}} \rangle = \frac{\langle T \rangle_{\text{exac}} - T_a}{T_w - T_a} = \int_0^1 u \, dX = \sum_{n=1}^{\infty} D_n g_n(Y) \int_0^1 F_n(X) \, dX$$

Utilizando la integral indicada en la ecuación (7.64) encontramos

$$\langle u_{\text{exacta}} \rangle = \frac{\langle T \rangle_{\text{exac}} - T_a}{T_w - T_a} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \sin^2 \lambda_n}{\lambda_n [2 \lambda_n + \sin(2 \lambda_n)]} g_n(Y) \quad (7.73)$$

La evaluación de la solución requiere los valores de λ_n que son las raíces de la ecuación (7.69). En la Figura 5 se muestra el tipo de procedimiento que podría seguirse para evaluar las raíces gráficamente. En este caso se han graficado $\tan(\lambda)$ y N_{Bi} / λ como función de λ y las raíces son donde estas curvas coinciden. Se muestra en misma figura el efecto del número de Biot. Es claro que cuando el número Biot aumenta la primer raíz se aleja de cero.

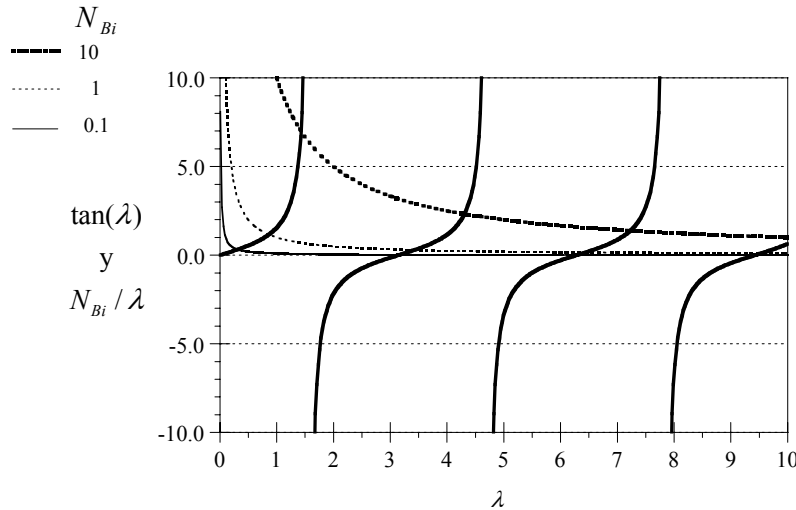


Figura 5. Determinación gráfica de las raíces de la ecuación (7.69) a través de las intersecciones de sus dos miembros.

Las raíces también se pueden obtener si la ecuación (7.69) se reescribe como

$$\lambda \sin(\lambda) - N_{Bi} \cos(\lambda) = 0 \quad (7.74)$$

La determinación gráfica de las raíces de esta ecuación se muestra en la Figura 6. En este caso las raíces corresponden a cuando la curva corta el eje de las abscisas. Es importante notar que si no se hace una ampliación adecuada de la figura se puede perder la primer raíz. La ampliación se muestra en la Figura 7.

La evaluación de las expresiones obtenidas a través del método de separación de variables siempre requiere la solución de problemas de valor propio. Estos problemas pueden ser tan

sencillos como el representado por $\text{sen}(\lambda) = 0$ o más complicado como en el caso de la ecuación (7.69). Para la solución de tal problema puede utilizarse un método gráfico, pero si se requieren evaluaciones múltiples será necesario recurrir a rutinas de cómputo basadas en métodos como el de Regula Falsi o el de Mueller.

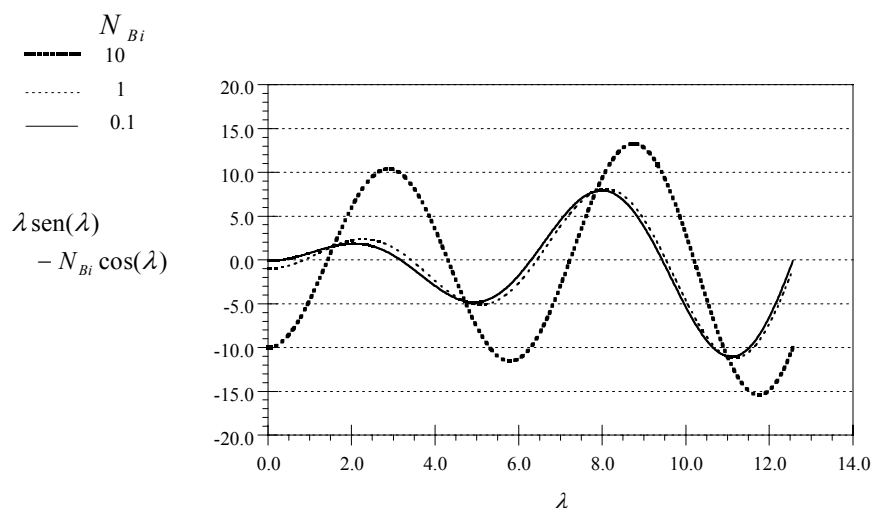


Figura 6. Determinación gráfica de las raíces de la ecuación $\lambda \text{sen}(\lambda) - N_{Bi} \cos(\lambda) = 0$ para diferentes valores del número de Biot. Las raíces se obtienen en las intersecciones de las curvas con el eje de las abscisas.

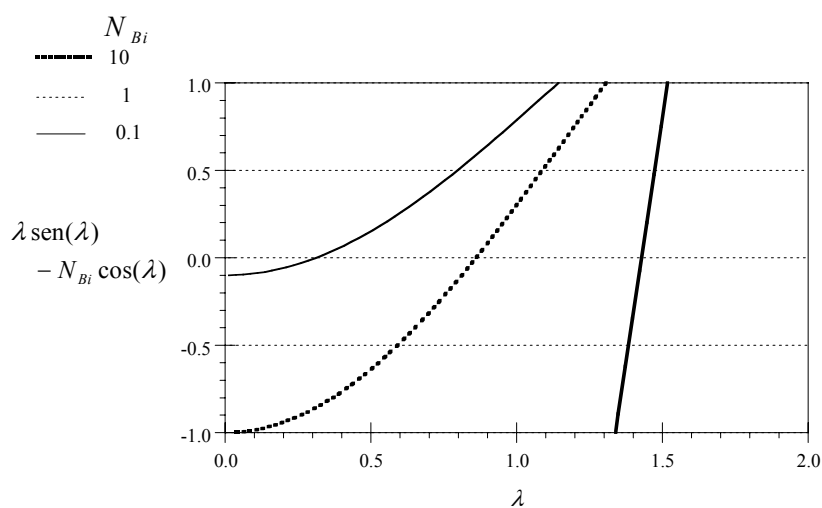


Figura 7. Determinación gráfica de la raíz de la ecuación $\lambda \text{sen}(\lambda) - N_{Bi} \cos(\lambda) = 0$ más cercana al eje de las ordenadas para diferentes valores del número de Biot. Las raíces se obtienen en las intersecciones de las curvas con el eje de las abscisas.

En las siguientes figuras se muestra la U obtenida con la ec. (7.65) y la temperatura promedio obtenida con la ec. (7.73) para diferentes números de Biot.

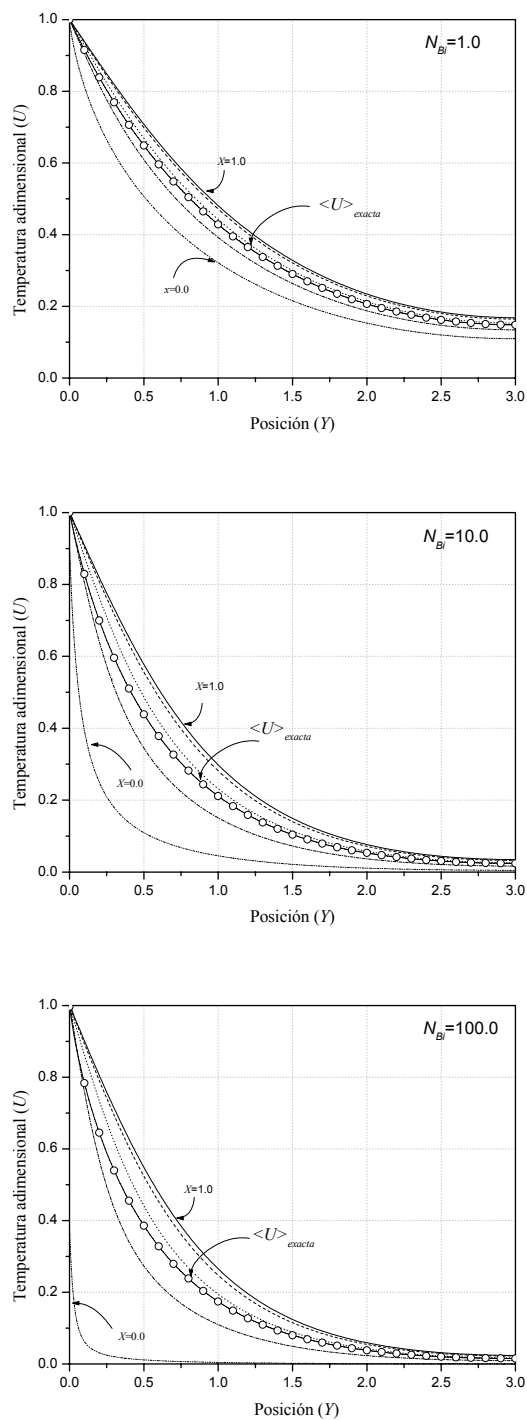
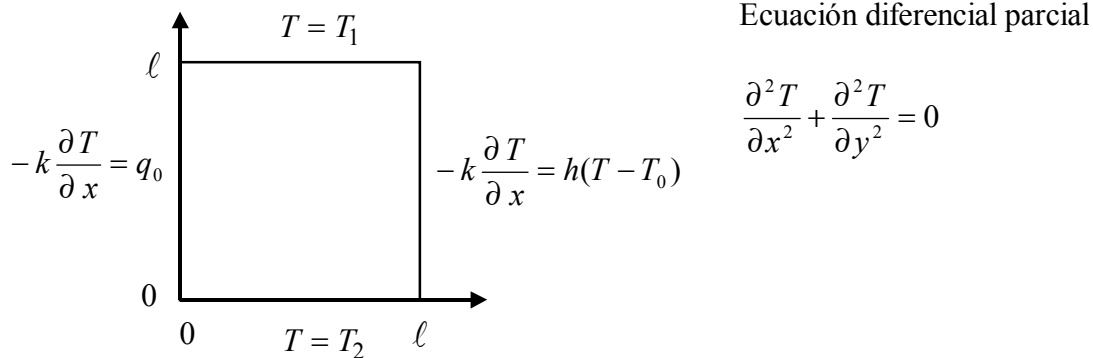


Figura 8. Perfiles de temperatura en diferentes posiciones de X comparados con la predicción de la temperatura promedio a diferentes valores del número de Biot. Aquí se usaron 21 términos para evaluar la serie y el parámetro L/B se tomo igual a 5.0

8. El método de superposición

Ahora consideremos un problema similar al resuelto anteriormente, el de la aleta, pero ahora las condiciones de frontera son un poco más difíciles. En la siguiente figura se muestra el dominio bidimensional, la ecuación diferencial y las condiciones de frontera que definen el problema

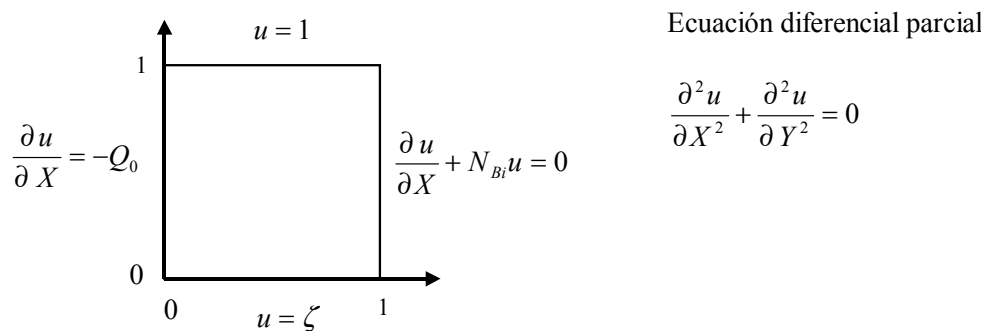


Debemos notar que la figura representa un sistema de sección cuadrada en el cual las superficies superior e inferior se mantienen a las temperaturas constantes T_1 y T_2 respectivamente. Por otro lado en la superficie vertical izquierda se suministra calor de tal manera que el flux q_0 es independiente de la posición. Finalmente en la frontera vertical derecha se retira calor de acuerdo a la ley de enfriamiento de Newton a un medio que se mantiene a la temperatura T_0 .

Es claro que el problema no tiene las características para ser resuelto por el método de separación de variables, ya que no hay ninguna condición de frontera homogénea. Con el objeto de buscar las condiciones necesarias se proponen varios cambios de variables uno de ellos es el dado por las siguientes variables adimensionales

$$u = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} \quad X = \frac{x}{\ell} \quad Y = \frac{y}{\ell}$$

Con estas el problema toma la forma mostrada en el siguiente esquema:



en donde

$$Q_0 = \frac{q_0 \ell}{k(T_1 - T_0)} \quad N_{Bi} = \frac{h \ell}{k} \quad \zeta = \frac{T_2 - T_0}{T_1 - T_0}$$

En la presente forma del problema de valor en la frontera la ecuación diferencial parcial es separable, pero solamente hay una condición homogénea y no hay cambios de variable sencillos que puedan producir dos condiciones de frontera homogéneas en la misma dirección.

Entonces se descompondrá el problema en dos partes de tal manera que en cada uno se tengan dos condiciones homogéneas en una de las direcciones. Así para

$$u(X, Y) = u_1(X, Y) + u_2(X, Y)$$

los problemas para $u_1(X, Y)$ y $u_2(X, Y)$ son los mostrados en el siguiente esquema:

$$\begin{array}{l} \text{Problema 1} \\ \text{En el dominio } 0 \leq X \leq 1, 0 \leq Y \leq 1: \\ \text{Condiciones de frontera:} \\ \text{En } Y=1: u_1 = 1 \\ \text{En } Y=0: u_1 = \zeta \\ \text{En } X=0: \frac{\partial u_1}{\partial X} = 0 \\ \text{En } X=1: \frac{\partial u_1}{\partial X} + N_{Bi} u_1 = 0 \\ \text{Ecuación diferencial: } \frac{\partial^2 u_1}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial Y^2} = 0 \end{array}$$

Problema 1

$$\begin{array}{l} \text{Problema 2} \\ \text{En el dominio } 0 \leq X \leq 1, 0 \leq Y \leq 1: \\ \text{Condiciones de frontera:} \\ \text{En } Y=1: u_2 = 0 \\ \text{En } Y=0: u_2 = 0 \\ \text{En } X=0: \frac{\partial u_2}{\partial X} = -Q_0 \\ \text{En } X=1: \frac{\partial u_2}{\partial X} + N_{Bi} u_2 = 0 \\ \text{Ecuación diferencial: } \frac{\partial^2 u_2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial Y^2} = 0 \end{array}$$

Problema 2

Nótese que la suma de las ecuaciones diferenciales da como resultado la original, y lo mismo es cierto para las condiciones de frontera. Esta descomposición ejemplifica la esencia del método de superposición. Cada uno de los problemas satisface lo que resumimos en la sección 5 como *Condiciones para resolver un problema de valor en la frontera con una ecuación elíptica bidimensional*. Ahora se necesita resolver para u_1 y u_2 .

Solución para u_1 :

u_1 está dado por el siguiente problema de valor en la frontera

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial Y^2} = 0 \quad (8.1)$$

$$\text{en } X = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial X} = 0 \quad (8.2)$$

$$\text{en } X = 1, \quad \frac{\partial u_1}{\partial X} + N_{Bi} u_1 = 0 \quad (8.3)$$

$$\text{en } Y = 0, \quad u_1 = \zeta \quad (8.4)$$

$$\text{en } Y = 1, \quad u_1 = 1 \quad (8.5)$$

Se propone la separación de variables de acuerdo a

$$u_1(X, Y) = F(X)G(Y) \quad (8.6)$$

La substitución de esta en (8.1) nos da

$$\frac{d^2 F}{dX^2} + \lambda^2 F = 0 \quad \frac{d^2 G}{dY^2} - \lambda^2 G = 0 \quad (8.7a,b)$$

De las condiciones de frontera homogéneas dadas por (8.2) y (8.3) se obtienen las siguientes condiciones para $F(X)$

$$\text{en } X = 0, \quad \frac{dF}{dX} = 0 \quad (8.8a)$$

$$\text{en } X = 1, \quad \frac{dF}{dX} + N_{Bi} F = 0 \quad (8.8b)$$

Debido a que no hay condiciones de frontera homogéneas en la dirección Y , no es posible encontrar condiciones para $G(Y)$, pero estas no son necesarias. La solución para (8.7a) es

$$F(X) = A \sin(\lambda X) + B \cos(\lambda X) \quad (8.9)$$

La derivada es necesaria para aplicar las condiciones de frontera, ésta es

$$\frac{dF}{dX} = \lambda [A \cos(\lambda X) - B \sin(\lambda X)] \quad (8.10)$$

La substitución de (8.10) en la ecuación (8.8a) resulta en

$$\left. \frac{dF}{dX} \right|_{X=0} = 0 = \lambda A, \quad \Rightarrow \quad A = 0 \quad (8.11)$$

Similarmente de la substitución de (8.9) y (8.10) en (8.8b), y usando $A = 0$, se obtiene

$$\left. \frac{dF}{dX} \right|_{X=1} + N_{Bi} F(1) = 0 = -\lambda B \sin(\lambda) + N_{Bi} B \cos(\lambda)$$

$$\text{ó} \quad \tan(\lambda) = N_{Bi} / \lambda, \text{ condición de los valores propios} \quad (8.12)$$

En las Figuras 5 a 7 se muestran algunos de los valores propios más pequeños. Así, las funciones propias están completamente definidas y son

$$F_n(X) = \cos(\lambda_n X) \quad (8.13)$$

Las solución para $G(Y)$ a partir de (8.7b) es

$$G_n(Y) = a_n \sinh(\lambda_n Y) + b_n \cosh(\lambda_n Y) \quad (8.14)$$

Por lo cual se puede escribir $u_1(X, Y)$ como

$$u_1(X, Y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sinh(\lambda_n Y) \cos(\lambda_n X) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cosh(\lambda_n Y) \cos(\lambda_n X) \quad (8.15)$$

El uso de las condiciones de frontera en $Y = 0$ y $Y = 1$, dadas por las ecuaciones (8.4) y (8.5) respectivamente, permite obtener

$$\text{En } Y = 0 \quad u_1(X, 0) = \zeta = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(\lambda_n X) \quad (8.16)$$

En $Y = 1$:

$$u_1(X, 1) = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sinh(\lambda_n) \cos(\lambda_n X) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cosh(\lambda_n) \cos(\lambda_n X) \quad (8.17)$$

La funciones $F_n(X) = \cos(\lambda_n X)$ son ortogonales puesto que se originaron de un problema de Sturm-Liouville en donde $w(x) = 1$, $p(x) = 1$ y $q(x) = 0$. Por lo tanto b_n se puede obtener de la ecuación (8.16) como :

$$b_n = \frac{\zeta \int_0^1 \cos(\lambda_n X) dX}{\int_0^1 \cos^2(\lambda_n X) dX} \quad (8.18)$$

El uso de la ortogonalidad de $F_n(X)$ en la ecuación (8.16) da

$$\int_0^1 \cos(\lambda_n X) dX = [a_n \sinh(\lambda_n) + b_n \cosh(\lambda_n)] \int_0^1 \cos^2(\lambda_n X) dX$$

$$\text{ó} \quad a_n = \left[\frac{\int_0^1 \cos(\lambda_n X) dX}{\int_0^1 \cos^2(\lambda_n X) dX} - b_n \cosh(\lambda_n) \right] \frac{1}{\sinh(\lambda_n)} \quad (8.19)$$

Y la constante a_n se puede obtener después de reemplazar b_n , en la ecuación (8.19), con la ecuación (8.18)

$$a_n = \frac{1 - \zeta \cosh(\lambda_n)}{\sinh(\lambda_n)} \frac{\int_0^1 \cos(\lambda_n X) dX}{\int_0^1 \cos^2(\lambda_n X) dX} \quad (8.20)$$

En este momento u_1 está completamente determinada. Ahora procederemos a encontrar u_2

Solución para u_2 :

u_2 está dado por el siguiente problema de valor en la frontera

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial Y^2} = 0 \quad (8.21)$$

$$\text{en } X = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial X} = -Q_0 \quad (8.22)$$

$$\text{en } X = 1, \quad \frac{\partial u_2}{\partial X} + N_{Bi} u_2 = 0 \quad (8.23)$$

$$\text{en } Y = 0, \quad u_2 = 0 \quad (8.24)$$

$$\text{en } Y = 1, \quad u_2 = 0 \quad (8.25)$$

Se propone la separación de variables de acuerdo a

$$u_2(X, Y) = F(X)G(Y) \quad (8.26)$$

La substitución de esta en (8.21) nos da

$$\frac{d^2 F}{dX^2} - \alpha^2 F = 0 \quad \frac{d^2 G}{dY^2} + \alpha^2 G = 0 \quad (8.27a,b)$$

De las condiciones de frontera homogéneas dadas por (8.24) y (8.25) se obtienen las siguientes condiciones para $G(Y)$

$$\text{en } Y = 0, \quad G(0) = 0 \quad (8.28)$$

$$\text{en } Y = 1, \quad G(1) = 0 \quad (8.29)$$

Y por la condición homogénea en $X = 1$ dada por la ecuación (8.23) se genera la siguiente condición para $F(X)$

$$\text{en } X = 1, \quad \left. \frac{dF}{dX} \right|_{X=1} + N_{Bi} F(1) = 0 \quad (8.30)$$

La solución para (8.27b) es

$$G(Y) = C \sin(\alpha Y) + D \cos(\alpha Y) \quad (8.31)$$

La substitución de (8.31) en la ecuación (8.28) resulta en

$$G(0) = C(0) + D(1), \Rightarrow D = 0 \quad (8.32)$$

Similarmente de la substitución de (8.31) en (8.29), y usando $D = 0$, se obtiene

$$G(1) = 0 = C \operatorname{sen}(\alpha)$$

$$\text{ó} \quad \operatorname{sen}(\alpha) = 0, \text{ condición de los valores propios} \quad (8.33)$$

En este caso los valores propios son

$$\alpha_n = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8.34)$$

Y las funciones propias están completamente definidas por

$$G_n(Y) = \operatorname{sen}(\alpha_n Y) \quad (8.35)$$

Las solución para $F(X)$ a partir de (8.27a) es

$$F_n(X) = A_n \operatorname{senh}(\alpha_n X) + B_n \cosh(\alpha_n X) \quad (8.36)$$

Cuya derivada es

$$\frac{dF}{dX} = \alpha_n [A_n \cosh(\alpha_n X) + B_n \operatorname{senh}(\alpha_n X)] \quad (8.37)$$

La substitución de (8.36) y (8.37) en la condición de frontera dada por (8.30) resulta en

$$\alpha_n [A_n \cosh(\alpha_n) + B_n \operatorname{senh}(\alpha_n)] + N_{Bi} [A_n \operatorname{senh}(\alpha_n) + B_n \cosh(\alpha_n)] = 0 \quad (8.38)$$

La cual se puede resolver para obtener

$$B_n = -A_n \frac{N_{Bi} \operatorname{senh}(\alpha_n) + \alpha_n \cosh(\alpha_n)}{\alpha_n \operatorname{senh}(\alpha_n) + N_{Bi} \cosh(\alpha_n)} = -A_n \frac{N_{Bi} + \alpha_n \coth(\alpha_n)}{\alpha_n + N_{Bi} \coth(\alpha_n)} \quad (8.39)$$

o

$$B_n = -A_n h_n, \quad \text{en donde} \quad h_n = \frac{N_{Bi} + \alpha_n \coth(\alpha_n)}{\alpha_n + N_{Bi} \coth(\alpha_n)} \quad (8.40a,b)$$

Por lo cual la ecuación (8.36) se puede escribir como

$$F_n(X) = A_n [\operatorname{senh}(\alpha_n X) - h_n \cosh(\alpha_n X)] \quad (8.41)$$

Ahora $u_2(X, Y)$ se puede escribir como

$$u_2(X, Y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(\alpha_n Y) [\operatorname{senh}(\alpha_n X) - h_n \cosh(\alpha_n X)] \quad (8.42)$$

El uso de las condición de frontera en $X = 0$, dada por la ec. (8.22), permite obtener

$$\text{En } X = 0 : \quad \frac{\partial u_2}{\partial x} = -Q_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n A_n \operatorname{sen}(\alpha_n Y) [(1) - h_n(0)] \quad (8.43)$$

La funciones $G_n(Y) = \operatorname{sen}(\alpha_n Y)$ son ortogonales puesto que se originaron de un problema de Sturm-Liouville en donde $w(x) = 1$, $p(x) = 1$ y $q(x) = 0$. Por lo tanto A_n se puede obtener de la ecuación (8.42) como :

$$-Q_0 \int_0^1 \sin(\alpha_n Y) dY = \alpha_n A_n \int_0^1 \sin^2(\alpha_n Y) dY \quad (8.44)$$

Por lo que A_n

$$A_n = - \frac{Q_0 \int_0^1 \sin(\alpha_n Y) dY}{n\pi \int_0^1 \sin^2(\alpha_n Y) dY} \quad (8.45)$$

Así finalmente hemos encontrado

$$u(X, Y) = u_1(X, Y) + u_2(X, Y) \quad (8.46)$$

Es conveniente listar los detalles de las contribuciones u_1 y u_2

Para u_1 :

$$u_1(X, Y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sinh(\lambda_n Y) \cos(\lambda_n X) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cosh(\lambda_n Y) \cos(\lambda_n X) \quad (8.15)$$

en donde λ_n son las raíces de

$$\tan(\lambda) = N_{Bi} / \lambda, \text{ condición de los valores propios} \quad (8.12)$$

Y las constantes a_n y b_n son

$$a_n = \frac{1 - \zeta \cosh(\lambda_n)}{\sinh(\lambda_n)} \frac{\int_0^1 \cos(\lambda_n X) dX}{\int_0^1 \cos^2(\lambda_n X) dX} \quad (8.19)$$

$$b_n = \frac{\zeta \int_0^1 \cos(\lambda_n X) dX}{\int_0^1 \cos^2(\lambda_n X) dX} \quad (8.18)$$

Para u_2 :

$$u_2(X, Y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\alpha_n Y) [\sinh(\alpha_n X) - h_n \cosh(\alpha_n X)] \quad (8.42)$$

en donde los valores propios α_n an están dados por

$$\alpha_n = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8.34)$$

$$A_n = - \frac{Q_0 \int_0^1 \sin(\alpha_n Y) dY}{n\pi \int_0^1 \sin^2(\alpha_n Y) dY} \quad (8.45)$$

La evaluación de la solución requiere los valores de λ_n que son las raíces de la ecuación (8.15). Nótese que el procedimiento para encontrar las raíces de esta ecuación fue discutido anteriormente en la Sección 6.

Es conveniente modificar ligeramente lo que denominamos las condiciones para resolver una ecuación diferencial parcial bidimensional para que quede como

Condiciones para resolver un problema de valor en la frontera con una ecuación elíptica bidimensional:

- a) La ecuación debe ser homogénea: ecuación de Laplace.
- b) Debe disponerse de suficientes condiciones de frontera homogéneas. Esto significa al menos dos condiciones homogéneas en la misma dirección. En ocasiones estas se pueden obtener con un cambio de variable sencillo y otras por el método de superposición. Este último método requiere la solución de dos problemas más sencillos que el original.

En la Figura 9 se muestra, en forma gráfica, los resultados de la evaluación de la ecuación (8.46).

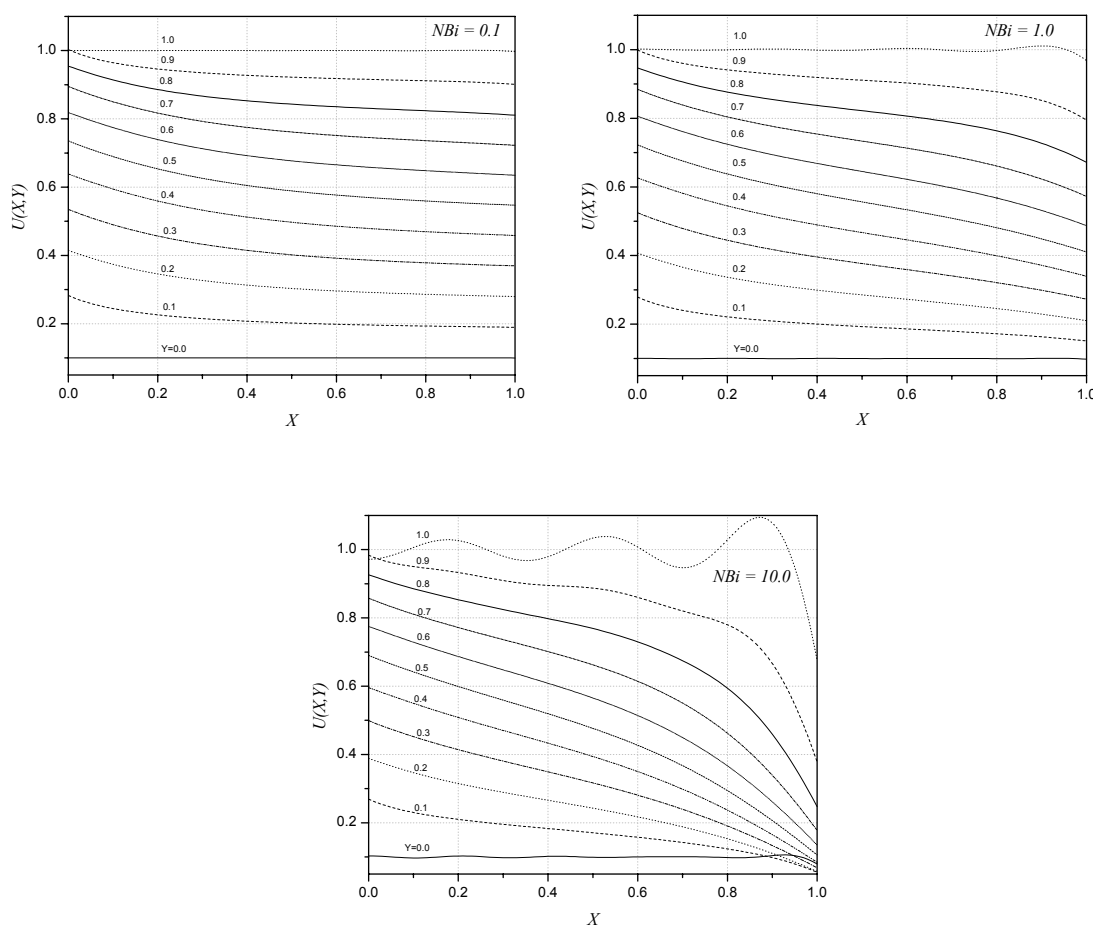


Figura 9. Perfiles de temperatura para diferentes números de Biot, otros parámetros son $Q = 0.5$ y $\zeta = 0.1$. Se usaron 20 términos de las series.

9. Un problema tridimensional

Ahora consideraremos el caso presentado en la conducción de calor en un sistema tridimensional en estado estacionario con algunas condiciones de frontera no-homogéneas. Esta situación se muestra en la siguiente figura:

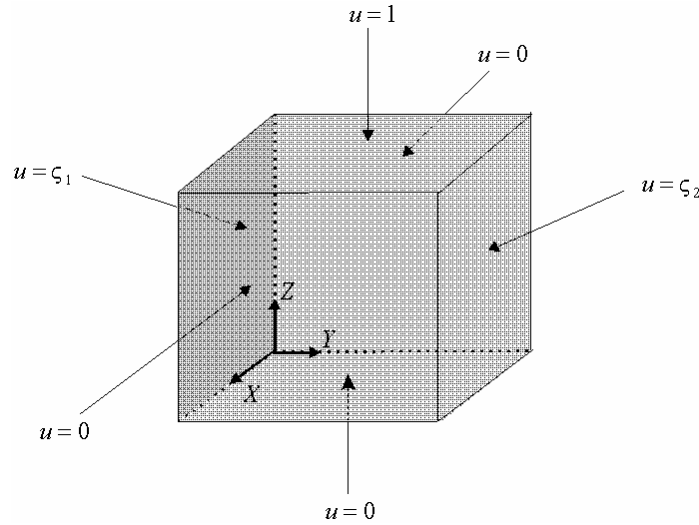


Figura 10. Cubo de material sólido cuyas superficies se mantienen a las temperaturas mostradas.

La descripción del sistema no da ninguna indicación de que se deba incluir el término de acumulación. Por ello el problema se puede plantear en términos de la siguiente ecuación diferencial parcial elíptica (Ecuación de Laplace tridimensional)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} = 0 \quad \begin{array}{l} 0 < X < 1 \\ 0 < Y < 1 \\ 0 < Z < 1 \end{array} \quad (9.1)$$

sujeta a las siguientes condiciones de frontera

$$\text{en } X = 0, \quad u = 0 \quad (9.2)$$

$$\text{en } X = 1, \quad u = 0 \quad (9.3)$$

$$\text{en } Y = 0, \quad u = \zeta_1 \quad (9.4)$$

$$\text{en } Y = 1, \quad u = \zeta_2 \quad (9.5)$$

$$\text{en } Z = 0, \quad u = 0 \quad (9.6)$$

$$\text{en } Z = 1, \quad u = 1 \quad (9.7)$$

Si se procede a la aplicación del método de separación de variables al problema anterior encontraremos que se generarán dos constantes de separación. Para determinarlas se requiere del equivalente a dos problemas de Sturm-Liouville y por lo tanto de al menos cuatro condiciones de frontera homogéneas, o sea dos homogéneas en X y dos homogéneas en algunas Y o Z . El problema dado por las ecs. (9.1)-(9.7) no satisface estas condiciones por ello recurriremos al método de superposición.

Las condiciones de frontera homogéneas en X nos sugieren que se proponga la siguiente superposición

$$u(X, Y, Z) = u_1(X, Y, Z) + u_2(X, Y, Z) \quad (9.8)$$

en donde

Problema 1

Problema 2

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial Z^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial Z^2} = 0 \quad (9.9a,b)$$

$$\text{en } X = 0, \quad u_1 = 0 \quad \text{en } X = 0, \quad u_2 = 0 \quad (9.10a,b)$$

$$\text{en } X = 1, \quad u_1 = 0 \quad \text{en } X = 1, \quad u_2 = 0 \quad (9.11a,b)$$

$$\text{en } Y = 0, \quad u_1 = \zeta_1 \quad \text{en } Y = 0, \quad u_2 = 0 \quad (9.12a,b)$$

$$\text{en } Y = 1, \quad u_1 = \zeta_2 \quad \text{en } Y = 1, \quad u_2 = 0 \quad (9.13a,b)$$

$$\text{en } Z = 0, \quad u_1 = 0 \quad \text{en } Z = 0, \quad u_2 = 0 \quad (9.14a,b)$$

$$\text{en } Z = 1, \quad u_1 = 0 \quad \text{en } Z = 1, \quad u_2 = 1 \quad (9.15a,b)$$

Algunos de los detalles para encontrar u_1 se dan a continuación. Inicialmente se propone

$$u_1(X, Y, Z) = F(X) G(Y) H(Z)$$

$$\frac{1}{F} \frac{d^2 F}{dX^2} = -\frac{1}{G} \frac{d^2 G}{dY^2} - \frac{1}{H} \frac{d^2 H}{dZ^2} = -\alpha^2$$

De esta se puede obtener

$$\frac{d^2 F}{dX^2} + \alpha^2 F = 0, \quad \text{y} \quad -\frac{1}{G} \frac{d^2 G}{dY^2} - \frac{1}{H} \frac{d^2 H}{dZ^2} = -\alpha^2$$

Rearreglando la última de estas ecuaciones se obtiene

$$\frac{1}{H} \frac{d^2 H}{dZ^2} - \alpha^2 = -\frac{1}{G} \frac{d^2 G}{dY^2} = -\beta^2$$

Por lo que los problemas para F , G y H están dados por

$$\frac{d^2 F}{dX^2} + \alpha^2 F = 0$$

$$\frac{d^2 G}{dY^2} - \beta^2 G = 0$$

$$\frac{d^2 H}{dZ^2} + \gamma^2 H = 0$$

en donde $\gamma^2 = \beta^2 - \alpha^2$

$$F(X) = A \operatorname{sen}(\alpha X) + B \cos(\alpha X)$$

$$G(Y) = C \operatorname{senh}(\beta Y) + D \cosh(\beta Y)$$

$$H(Z) = E \operatorname{sen}(\gamma Z) + K \cos(\gamma Z)$$

$$F(0) = 0$$

$$\beta_{nm}^2 = (n\pi)^2 + (m\pi)^2$$

$$H(0) = 0$$

$$F(1) = 0$$

$$G_{nm}(Y) = C_{nm} \operatorname{senh}(\beta_{nm} Y) + D_{nm} \cosh(\beta_{nm} Y)$$

$$H(1) = 0$$

$$\alpha_n = n\pi, n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\gamma_m = m\pi, m = 1, 2, 3, \dots$$

$$F_n(X) = \operatorname{sen}(n\pi X)$$

$$H_m(Z) = \operatorname{sen}(m\pi Z)$$

Por lo tanto

$$u_{nm} = F_n(X) G_{nm}(Y) H_m(Z)$$

y

$$u_1(X, Y, Z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [A_{nm} \operatorname{senh}(\beta_{nm} Y) + B_{nm} \cosh(\beta_{nm} Y)] \operatorname{sen}(n\pi X) \operatorname{sen}(m\pi Z) \quad (9.16)$$

Usando la condición de frontera en $Y = 0$

$$\zeta_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} \operatorname{sen}(n\pi X) \operatorname{sen}(m\pi Z)$$

De esta, después de utilizar la ortogonalidad de F_n y H_m , se obtiene

$$B_{nm} = \frac{\zeta_1 \int_0^1 \operatorname{sen}(n\pi X) dX \int_0^1 \operatorname{sen}(m\pi Z) dZ}{\int_0^1 \operatorname{sen}^2(n\pi X) dX \int_0^1 \operatorname{sen}^2(m\pi Z) dZ}$$

ó

$$B_{nm} = \frac{4\zeta_1 [1 - (-1)^n] [1 - (-1)^m]}{mn\pi^2} \quad (9.17)$$

Usando la condición de frontera en $Y = 1$

$$\zeta_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [A_{nm} \operatorname{senh}(\beta_{nm}) + B_{nm} \cosh(\beta_{nm})] \operatorname{sen}(n\pi X) \operatorname{sen}(m\pi Z)$$

De la cual se obtiene

$$\zeta_2 \int_0^1 \text{sen}(n\pi X) dX \int_0^1 \text{sen}(m\pi Z) dZ =$$

$$[A_{nm} \sinh(\beta_{nm}) + B_{nm} \cosh(\beta_{nm})] \int_0^1 \text{sen}^2(n\pi X) dX \int_0^1 \text{sen}^2(m\pi Z) dZ$$

Usando la ecuación (9.17) para sustituir B_{nm} se obtiene la siguiente expresión para A_{nm}

$$A_{nm} = \frac{[\zeta_2 - \zeta_1 \cosh(\beta_{nm})] \int_0^1 \text{sen}(n\pi X) dX \int_0^1 \text{sen}(m\pi Z) dZ}{\sinh(\beta_{nm}) \int_0^1 \text{sen}^2(n\pi X) dX \int_0^1 \text{sen}^2(m\pi Z) dZ}$$

$$\text{ó} \quad A_{nm} = \frac{4[\zeta_2 - \zeta_1 \cosh(\beta_{nm})][1 - (-1)^n][1 - (-1)^m]}{\sinh(\beta_{nm}) m n \pi^2} \quad (9.18)$$

Hemos determinado completamente u_1

Solución del problema para u_2 :

Por inspección podemos concluir que

$$u_2(X, Y, Z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [C_{nm} \sinh(\beta_{nm} Z) + D_{nm} \cosh(\beta_{nm} Z)] \text{sen}(n\pi X) \text{sen}(m\pi Y) \quad (9.19)$$

en donde

$$\beta_{nm} = \sqrt{(n\pi)^2 + (m\pi)^2}$$

Nótese que la ecuación (9.19) satisface la ecuación diferencial (9.9b) y las condiciones homogéneas en X y Y dadas por las ecs. (9.10b)-(9.13b).

Para determinar una de las constantes de integración, utilizamos la condición de frontera en $Z = 0$

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} D_{nm} \text{sen}(n\pi X) \text{sen}(m\pi Y), \quad \Rightarrow D_{nm} = 0 \quad (9.20)$$

Al utilizar la condición de frontera en $Z = 1$ se obtiene

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} \sinh(\beta_{nm}) \text{sen}(n\pi X) \text{sen}(m\pi Y)$$

y de esta

$$C_{nm} = \frac{\int_0^1 \operatorname{sen}(n\pi X) dX \int_0^1 \operatorname{sen}(m\pi Y) dZ}{\operatorname{senh}(\beta_{nm}) \int_0^1 \operatorname{sen}^2(n\pi X) dX \int_0^1 \operatorname{sen}^2(m\pi Z) dZ}$$

ó

$$C_{nm} = \frac{4[1 - (-1)^n][1 - (-1)^m]}{\operatorname{senh}(\beta_{nm}) m n \pi^2} \quad (9.21)$$

Así finalmente tenemos la solución para $u(X, Y, Z) = u_1(X, Y, Z) + u_2(X, Y, Z)$. A continuación resumimos las expresiones más importantes:

$u_1(X, Y, Z)$ está dada por

$$u_1(X, Y, Z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [A_{nm} \operatorname{senh}(\beta_{nm} Y) + B_{nm} \cosh(\beta_{nm} Y)] \operatorname{sen}(n\pi X) \operatorname{sen}(m\pi Z) \quad (9.16)$$

en donde

$$\beta_{nm}^2 = (n\pi)^2 + (m\pi)^2$$

$$B_{nm} = \frac{4\zeta_1[1 - (-1)^n][1 - (-1)^m]}{m n \pi^2} \quad (9.17)$$

y

$$A_{nm} = \frac{4[\zeta_2 - \zeta_1 \cosh(\beta_{nm})][1 - (-1)^n][1 - (-1)^m]}{\operatorname{senh}(\beta_{nm}) m n \pi^2} \quad (9.18)$$

y $u_2(X, Y, Z)$ está dada por

$$u_2(X, Y, Z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} \operatorname{senh}(\beta_{nm} Z) \operatorname{sen}(n\pi X) \operatorname{sen}(m\pi Y) \quad (9.19)$$

en donde

$$\beta_{nm} = \sqrt{(n\pi)^2 + (m\pi)^2}$$

y

$$C_{nm} = \frac{4[1 - (-1)^n][1 - (-1)^m]}{\operatorname{senh}(\beta_{nm}) m n \pi^2} \quad (9.21)$$

A continuación se muestra la evaluación de la solución ec. (9.8)

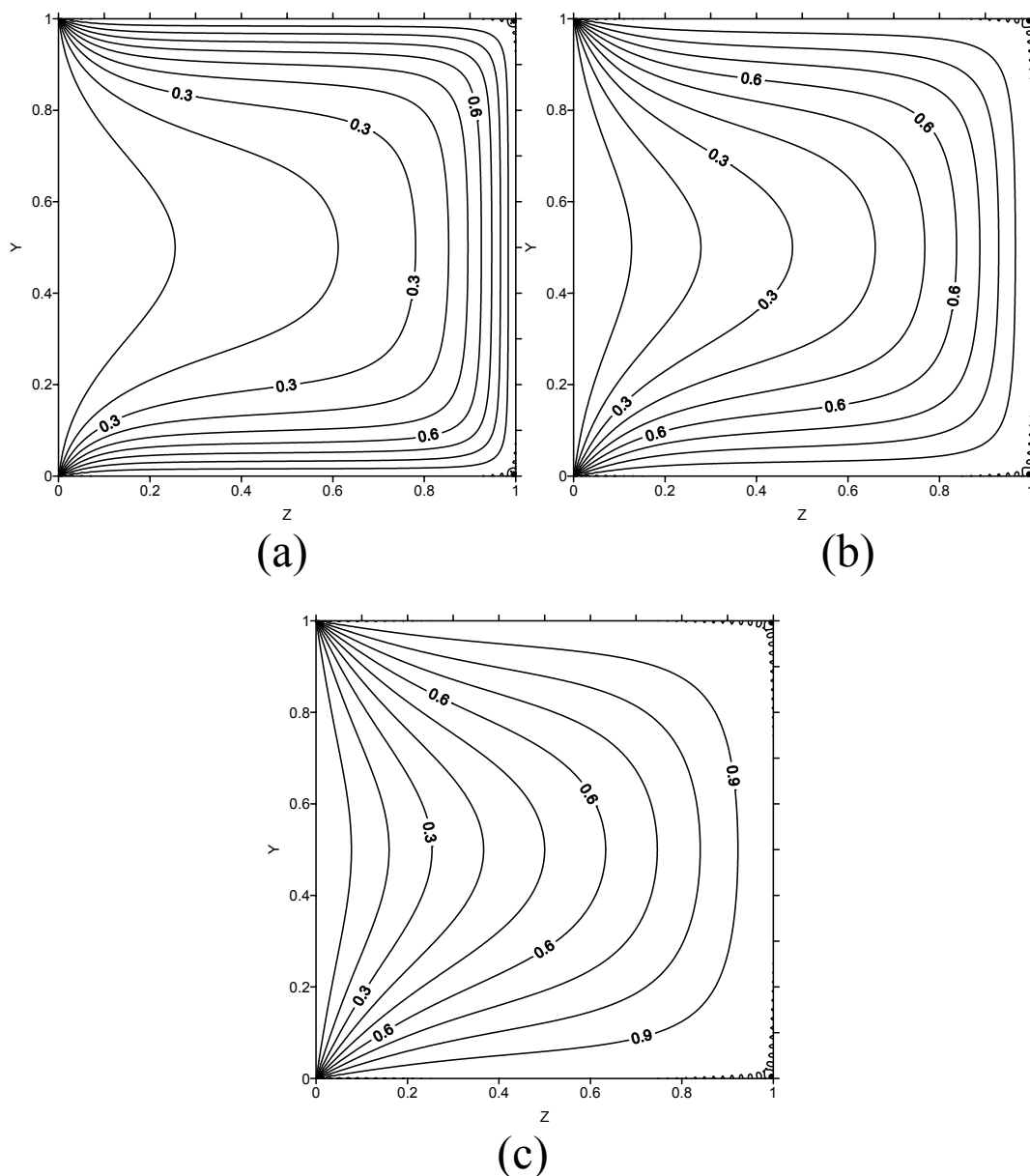


Figura 11. Perfiles de temperatura, para planos de X constante (a) $X= 0.1$ (b) $X=0.2$ y (c) $X= 0.5$. Se usó ζ_1 y ζ_2 igual a 1.0 y 80 términos de la serie.

Un comentario sobre la evaluación de la solución:

Los cálculos cuando el número de términos crece mucho se podrán hacer mejor si se considera que a partir de (9.16)

$$H_{nm}(Y) = A_{nm} \sinh(\beta_{nm} Y) + B_{nm} \cosh(\beta_{nm} Y) \quad (9.22)$$

con

$$B_{nm} = \frac{4 \zeta_1 [1 - (-1)^n] [1 - (-1)^m]}{m n \pi^2} \quad (9.17)$$

y

$$A_{nm} = \frac{4 [\zeta_2 - \zeta_1 \cosh(\beta_{nm})] [1 - (-1)^n] [1 - (-1)^m]}{\sinh(\beta_{nm}) m n \pi^2} \quad (9.18)$$

Se puede obtener

$$H_{nm}(Y) = R_{nm} \left[\zeta_2 \frac{\sinh(\beta_{nm} Y)}{\sinh(\beta_{nm})} + \zeta_1 \frac{\sinh[\beta_{nm} (1 - Y)]}{\sinh(\beta_{nm})} \right] \quad (9.23)$$

en donde

$$R_{nm} = \frac{4 [1 - (-1)^n] [1 - (-1)^m]}{m n \pi^2}$$

y en el desarrollo se usó

$$B_{nm} = \zeta_1 R_{nm}$$

y

$$A_{nm} = \frac{[\zeta_2 - \zeta_1 \cosh(\beta_{nm})]}{\sinh(\beta_{nm})} R_{nm}$$

Durante los cálculos se debe considerar que las siguientes relaciones pueden escribirse como

$$\frac{\sinh(\beta_{nm} Y)}{\sinh(\beta_{nm})} = \frac{\exp(-\beta_{nm} [1 - Y]) - \exp(-\beta_{nm} [Y + 1])}{1 - \exp(-2 \beta_{nm})} \quad (9.24)$$

$$\frac{\sinh[\beta_{nm} (1 - Y)]}{\sinh(\beta_{nm})} = \frac{\exp(-\beta_{nm} Y) - \exp(-\beta_{nm} [2 - Y])}{1 - \exp(-2 \beta_{nm})} \quad (9.25)$$

y que al tener aproximadamente $\beta_{nm} > 50$

$$\frac{\sinh(\beta_{nm} Y)}{\sinh(\beta_{nm})} \approx \exp(-\beta_{nm} [1 - Y]) \quad (9.26)$$

$$\frac{\sinh[\beta_{nm} (1 - Y)]}{\sinh(\beta_{nm})} \approx \exp(-\beta_{nm} Y) \quad (9.27)$$

Lo mismo habría que hacer para la evaluación de (9.19), o sea

$$C_{nm} \sinh(\beta_{nm} Z) = R_{nm} \frac{\sinh(\beta_{nm} Z)}{\sinh(\beta_{nm})} \approx R_{nm} \exp[-\beta_{nm} (1 - Z)] \quad (9.28)$$

También cuando aproximadamente $\beta_{nm} > 50$.

Finalmente podemos resumir las condiciones que debe satisfacer un problema tridimensional para ser resuelto por el método de separación de variables

Condiciones para resolver un problema de valor en la frontera con una ecuación elíptica tridimensional:

- a) La ecuación debe ser homogénea: ecuación de Laplace.
- b) Debe disponerse de suficientes condiciones de frontera homogéneas. Esto significa al menos dos condiciones homogéneas en dos de las direcciones. En ocasiones estas se pueden obtener con un cambio de variable sencillo y en otras será necesario la introducción de superposiciones. Esto último llevará a la solución de dos o tres problemas más sencillos que el original.

10. Solución de ecuaciones diferenciales parciales parabólicas

En las secciones anteriores hemos revisado el método de separación de variables y el método de diferencias aplicados a la solución de ecuaciones diferenciales parciales elípticas. Ahora, se revisarán problemas con ecuaciones diferenciales parabólicas; el problema de conducción de calor unidimensional y transitorio es de esta clase. La ecuación diferencial que describe el fenómeno mencionado contiene una derivada de primer orden con respecto a una variable independiente (el tiempo), y una derivada de segundo orden con respecto a una segunda variable independiente

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (10.1)$$

Esto significa que es necesaria una condición inicial para el tiempo. Esta condición inicial se usará para evaluar los coeficientes de la solución expresada por una serie. Esto significa que el problema se necesita plantear de tal manera que las condiciones de frontera en x sean homogéneas. Los conceptos mencionados se mostrarán en la solución del problema que modela la conducción de calor en una placa de espesor ℓ , como la mostrada en la Figura 12, que inicialmente se encuentra a la temperatura T_0 . En cierto instante dos de sus caras opuestas se ponen en contacto con fluidos que se mantienen a T_1 y T_2 respectivamente.

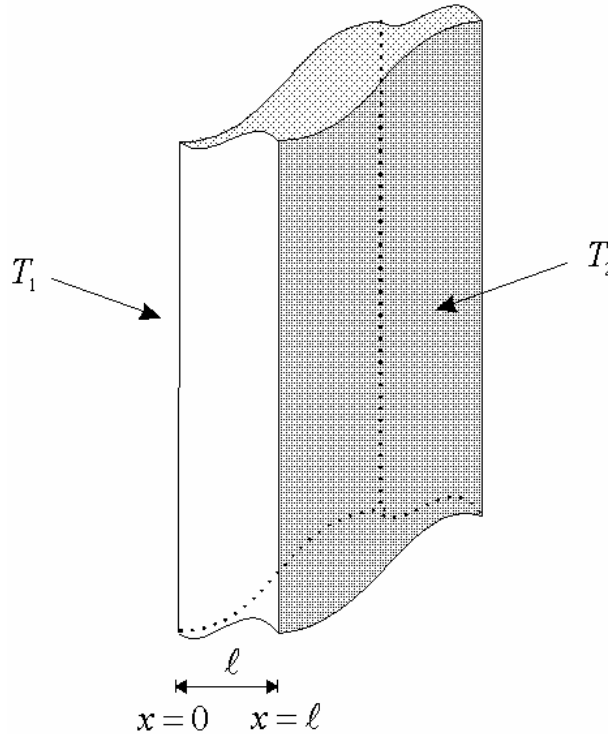


Figura 12. Placa sólida que separa dos fluidos que se mantienen a T_1 y T_2

La conducción de calor unidimensional está gobernada por la ecuación diferencial (10.1) sujeta a las siguientes condiciones de frontera e inicial

$$+k \frac{\partial T}{\partial x} = h(T - T_1) \quad \text{en } x = 0 \quad (10.2)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = h(T - T_2) \quad \text{en } x = \ell \quad (10.3)$$

$$T = T_0 \quad \text{para } t = 0 \quad (10.4)$$

Hemos supuesto que la resistencia a la transferencia de calor ofrecida por los fluidos es la misma de cada lado y que h es el coeficiente de transferencia de calor.

Es la primera vez que tratamos con una ecuación parabólica, sin embargo la experiencia en la solución de ecuaciones elípticas nos indica que el método de separación de variables no podrá aplicarse con éxito al problema dado por las ecuaciones (10.1)-(10.4) pues a pesar de que la ecuación es homogénea no hay dos condiciones de frontera homogéneas en la misma dirección para con ello poder generar el requerido problema de Sturm-Liouville.

Se introducen las siguientes variables adimensionales

$$u = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}, \quad X = \frac{x}{\ell}, \quad N_{Bi} = \frac{h\ell}{k}, \quad \tau = \frac{\alpha t}{\ell^2} \quad (10.5)$$

Y el problema toma la siguiente forma

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} \quad (10.6)$$

$$\text{en } X = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial X} = N_{Bi} u \quad (10.7)$$

$$\text{en } X = 1 \quad -\frac{\partial u}{\partial X} = N_{Bi} (u - 1) \quad (10.8)$$

$$\text{en } \tau = 0 \quad u = \zeta = \frac{T_0 - T_1}{T_2 - T_1} \quad (10.9)$$

Una vez más notamos que si se intenta la solución suponiendo $u(X, \tau) = \Theta(\tau)F(X)$ pero como una de las condiciones de frontera de X es no homogénea no se podrían obtener ni las funciones propias, ni los valores propios ya que no hay suficientes condiciones de frontera homogéneas en la dirección X . Por ello se propone la siguiente superposición:

$$u(X, \tau) = u_s(X) + \tilde{u}(X, \tau) \quad (10.10)$$

Donde $u_s(X)$ es la solución en estado estacionario, y $\tilde{u}(\tau, X)$ es la contribución transitoria. Las condiciones no homogéneas serán asignadas al problema de $u_s(X)$, de tal forma que se escribe

$$\frac{d^2 u_s}{dX^2} = 0 \quad (10.11)$$

$$-\frac{du_s}{dX} = N_{Bi} (u_s - 1) \quad \text{en } X = 1 \quad (10.12)$$

$$\frac{du_s}{dX} = N_{Bi} u_s \quad \text{en } X = 0 \quad (10.13)$$

De esta manera el problema para $\tilde{u}$ está dado por la ecuación diferencial siguiente

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} \quad (10.14)$$

Esta debe resolverse sujeta a las siguientes condiciones inicial y de frontera para $\tau = 0$ $\tilde{u} = \zeta - u_s(X)$ (10.15)

$$\text{en } X = 0 \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} = N_{Bi} \tilde{u} \quad (10.16)$$

$$\text{en } X = 1 \quad -\frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} = N_{Bi} \tilde{u} \quad (10.17)$$

La solución para $u_s(X)$ es

$$u_s(X) = C_1 X + C_2 \quad (10.18)$$

Utilizando las condiciones de frontera se obtienen

$$-C_1 = N_{Bi} [C_1 + C_2 - 1] \quad (10.19)$$

y

$$C_1 = N_{Bi} C_2 \quad (10.20)$$

Resolviendo simultáneamente las anteriores ecuaciones se obtienen

$$C_2 = \frac{1}{2 + N_{Bi}} \quad \text{y} \quad C_1 = \frac{N_{Bi}}{2 + N_{Bi}}$$

Por lo tanto

$$u_s(X) = \frac{N_{Bi} X + 1}{2 + N_{Bi}} \quad (10.21)$$

Ahora se procederá a obtener la solución para $\tilde{u}$. Para ello se propone

$$\tilde{u}(X, \tau) = F(X)\Theta(\tau) \quad (10.22)$$

La substitución de la última ecuación en la ec. (10.14) lleva a

$$\frac{1}{\Theta} \frac{d\Theta}{d\tau} = \frac{1}{F} \frac{d^2 F}{dX^2} = -\lambda^2 \quad (10.23)$$

Las soluciones son

$$\Theta = A e^{-\lambda^2 \tau} \quad (10.24)$$

y

$$F = B \operatorname{sen}(\lambda X) + D \cos(\lambda X) \quad (10.25)$$

Al sustituir la ecuación (10.25) en las condiciones de frontera homogéneas dadas por las ecuaciones (10.16) y (10.17) obtenemos

$$\frac{dF(0)}{dX} = N_{Bi} F(0) \quad \text{y} \quad \frac{dF(1)}{dX} = -N_{Bi} F(1) \quad (10.26)$$

Para usar estas condiciones de frontera es necesaria la derivada

$$\frac{dF}{dX} = \lambda B \cos(\lambda X) - \lambda D \operatorname{sen}(\lambda X) \quad (10.27)$$

El uso de las ecuaciones (10.25) y (10.27) junto con las ecuaciones (10.26) da como resultados

$$\lambda B = N_{Bi} D \quad (10.28)$$

y

$$-[\lambda B \cos(\lambda) - \lambda D \operatorname{sen}(\lambda)] = N_{Bi} [B \operatorname{sen}(\lambda) + D \cos(\lambda)] \quad (10.29)$$

$$D = N_{Bi}^{-1} \lambda B \quad (10.30)$$

La substitución de (10.30) en (10.29) da como resultado

$$-\lambda \cos \lambda + \frac{\lambda^2}{N_{Bi}} \operatorname{sen} \lambda = N_{Bi} \operatorname{sen} \lambda + \lambda \cos \lambda$$

que puede expresarse también como

$$\lambda_n^2 \tan \lambda_n - N_{Bi} \lambda_n = N_{Bi} (N_{Bi} \tan \lambda_n + \lambda_n) \quad n = 1, 2, \dots, \infty \quad (10.31)$$

Esta es la condición de los valores propios. Las funciones propias se obtienen al eliminar B de la ecuación (10.25) usando la ec. (10.30):

$$F_n(X) = \cos(\lambda_n X) + \frac{N_{Bi}}{\lambda_n} \operatorname{sen}(\lambda_n X) \quad n = 1, 2, \dots, \infty \quad (10.32)$$

La parte transitoria de $u(X, \tau)$ tiene entonces la forma

$$\tilde{u}(X, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n F_n(X) e^{-\lambda_n^2 \tau} \quad (10.33)$$

Para evaluar los coeficientes a_n se usa la condición inicial $u(X, 0)$ dada por la ecuación (10.15):

$$\zeta - u_s(X) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n F_n(X) \quad (10.34)$$

La función $F_n(X)$ es ortogonal, por lo tanto de (10.34) puede obtenerse a_n como

$$a_n = \frac{\int_0^1 [\zeta - u_s(X)] F_n(X) dX}{\int_0^1 F_n^2(X) dX} \quad (10.35)$$

Para finalizar esta sección mostramos la forma de la solución $u(X, \tau)$ en las siguientes figuras para dos valores del número de Biot: 10 y 0.1.

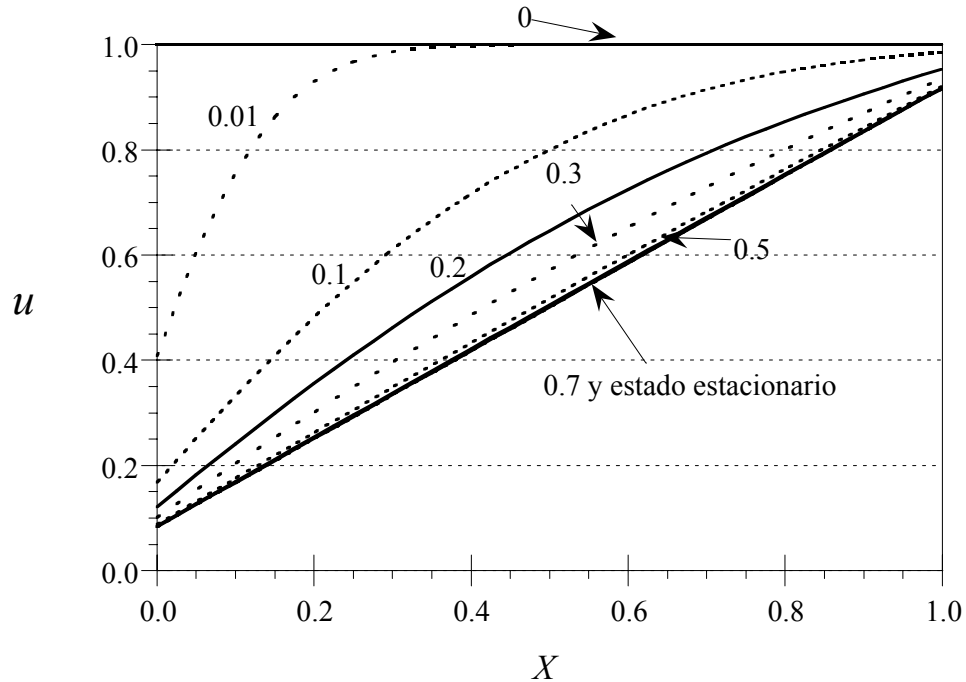


Figura 13. Perfiles de temperatura para diferentes tiempos y $N_{Bi} = 10$. La condición inicial usada es $u = \zeta = 1$.

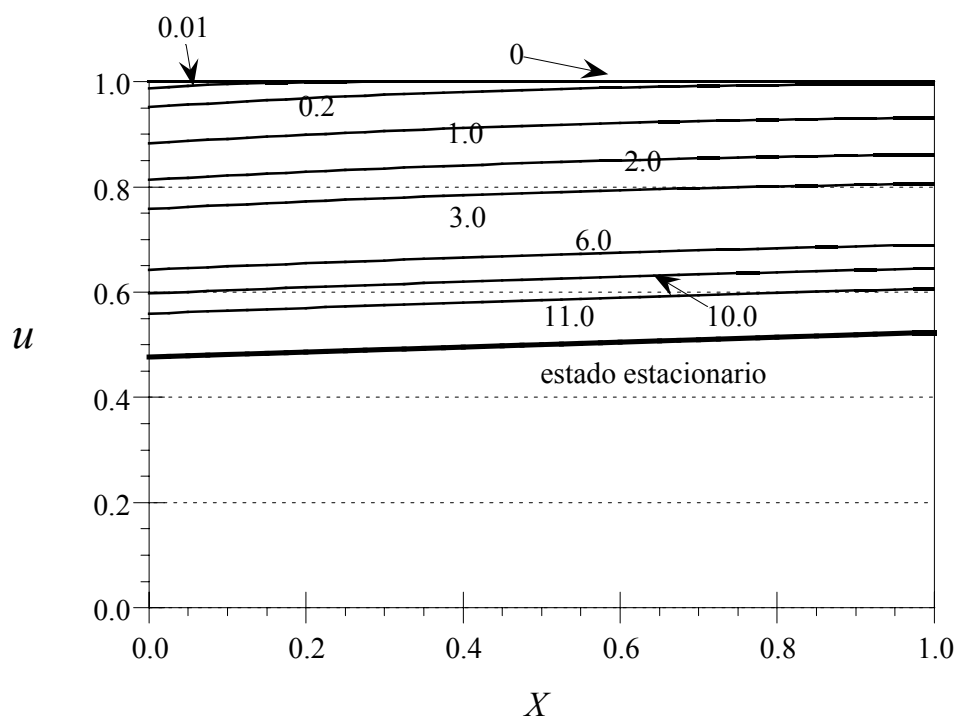


Figura 14. Perfiles de temperatura para diferentes tiempos y $N_{Bi} = 0.1$. La condición inicial usada es $u = \zeta = 1$.

Al comparar las figuras anteriores se observa que al disminuir el número de Biot el sistema tarda más en alcanzar el estado estacionario. Cuando $N_{Bi} = 10$ el tiempo en alcanzar el estado estacionario es aproximadamente 0.6. Por otro lado para $N_{Bi} = 0.1$ el sistema tardará más de 10 unidades adimensionales de tiempo para llegar al estado estacionario.

Un procedimiento similar al presentado en la sección se puede usar para un problema transitorio en más de una dirección y sin problemas se puede extender para el caso en que la ecuación diferencial sea nohomogénea debido a un término fuente independiente del tiempo.

11. Solución de problemas no homogéneos.

Para ejemplificar este caso se considerará el problema relacionado a un canal de sección rectangular en el que se pone en movimiento un fluido newtoniano que inicialmente está en reposo. El movimiento se provoca al aplicar la caída de presión constante expresada por $\Delta P/L$. Si se restringe el análisis a una sección de longitud L , lejana a los extremos del canal en donde el flujo volumétrico es tal que prevalecen condiciones de flujo laminar, la ecuación diferencial que gobierna la componente de la velocidad en la dirección z (Figura 12) es:

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} \right) \quad (11.1)$$

Como se mencionó la caída de presión es constante y se puede expresar como

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\Delta P}{L} \quad (11.2)$$

Este término hace que la ecuación diferencial sea no homogénea lo cual complicará la solución del problema. Las paredes del canal se suponen rígidas y permanecen estáticas, por otro lado el fluido inicialmente está en reposo. Así, las condiciones de frontera e inicial se expresan de la siguiente manera:

$$v_z = 0 \quad \text{en} \quad x = 0, a \quad (11.3)$$

$$v_z = 0 \quad \text{en} \quad y = 0, b \quad (11.4)$$

$$v_z = 0 \quad \text{para} \quad t = 0 \quad (11.5)$$

En la Figura 15 se muestran las coordenadas usadas y las dimensiones del canal:

Es conveniente introducir las siguientes variables y parámetros adimensionales

$$u = \frac{v_z}{v_0} \quad X = \frac{x}{a} \quad Y = \frac{y}{a} \quad \tau = t \frac{v_0}{a^2} \quad \phi = -\frac{a^2}{\mu v_0} \left(\frac{\Delta P}{L} \right) \quad \zeta = \frac{b}{a} \quad (11.6)$$

El problema en su forma adimensional está dado por

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \phi + \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \quad (11.7)$$

sujeta a

$$\text{en} \quad X = 0, 1 \quad u = 0 \quad (11.8)$$

$$\text{en} \quad Y = 0, \zeta \quad u = 0 \quad (11.9)$$

$$\text{para} \quad \tau = 0 \quad u = 0 \quad (11.10)$$

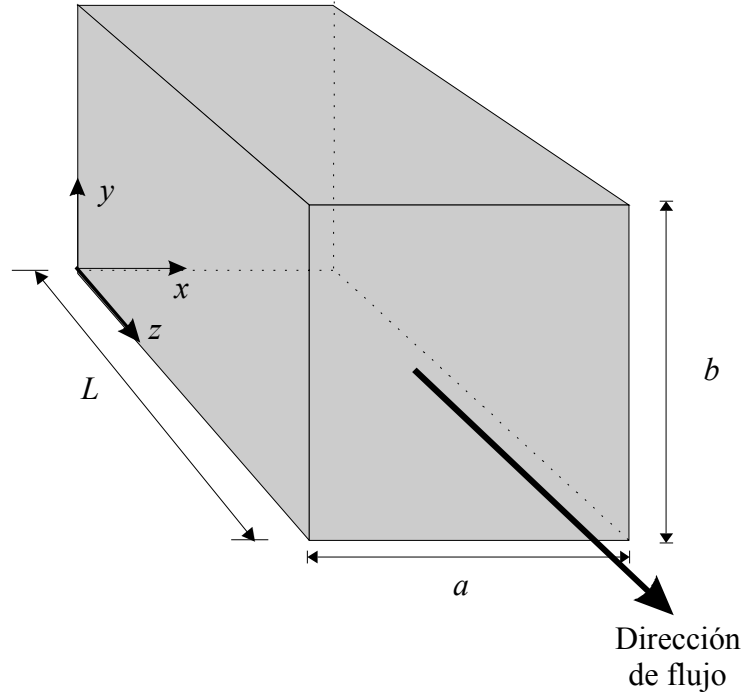


Figura 15. Flujo de un fluido Newtoniano en un canal de sección transversal rectangular cuyas paredes permanecen estáticas.

A pesar de que tanto las condiciones de frontera como la inicial son homogéneas no será posible aplicar el método de separación de variables directamente, porque la ecuación diferencial es no homogénea. Por ello se propone la siguiente superposición del problema

$$u = u_s(X, Y) + \tilde{u}(X, Y, \tau) \quad (11.11)$$

Esto con la idea de generar un problema para $\tilde{u}(X, Y, \tau)$ que sea resuelto directamente por la aplicación del método de separación de variables. Por esto, a la ecuación diferencial de $u_s(X, Y)$ se le asigna el término no homogéneo, de tal manera que su ecuación diferencial es

$$\frac{\partial^2 u_s}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u_s}{\partial Y^2} = -\phi \quad (11.12)$$

y está sujeta a

$$u_s = 0 \quad \text{en} \quad X = 0, 1 \quad (11.13)$$

$$u_s = 0 \quad \text{en} \quad Y = 0, \zeta \quad (11.14)$$

Para satisfacer tanto el problema original, como la superposición propuesta, se reemplaza $u(X, Y, \tau)$ con (11.11) en (11.7)-(11.10), y se aplica (11.12)-(11.14) para obtener el problema de $\tilde{u}(X, Y, \tau)$ definido por

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial Y^2} \quad (11.15)$$

con las siguientes condiciones de frontera e inicial

$$\tilde{u} = 0 \quad \text{en} \quad X = 0, 1 \quad (11.16)$$

$$\tilde{u} = 0 \quad \text{en} \quad Y = 0, \zeta \quad (11.17)$$

$$\tilde{u} = -u_s(X, Y) \quad \text{para} \quad \tau = 0 \quad (11.18)$$

No debe haber mayor complicación para obtener la solución de este problema, sin embargo es necesario encontrar primero $u_s(X, Y)$, ya que participa en la condición inicial.

Solución del problema de $u_s(X, Y)$ dado por las ecs. (11.12)-(11.14)

Aunque esta parte de la solución es independiente del tiempo, debido al término no homogéneo en la ec. (11.12), no es posible resolverla directamente con el método de separación de variables. Por ello, con objeto de generar un nuevo problema en términos de una ecuación diferencial homogénea, se propone la superposición dada por

$$u_s(X, Y) = \psi(X, Y) - \phi \frac{1}{4} (X^2 + Y^2) \quad (11.19)$$

La segunda contribución de $u_s(X, Y)$ no es única ya que puede ser cualquier función $\mathcal{F}(X, Y)$, que haga que la ecuación diferencial de $\psi(X, Y)$ sea homogénea. En esta solución se escogió que

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial X^2} = -\frac{\phi}{2}, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial Y^2} = -\frac{\phi}{2}$$

Algunos detalles de la solución del problema de $u_s(X, Y)$ se encuentran en la última página de esta sección. La substitución de la ec. (11.19) en (11.15)-(11.18) lleva al siguiente problema de valor en la frontera para ψ

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = 0 \quad (11.20)$$

$$\text{en } X = 0 \quad \psi = \frac{\phi}{4} Y^2 \quad (11.21)$$

$$\text{en } X = 1 \quad \psi = \frac{\phi}{4} (1 + Y^2) \quad (11.22)$$

$$\text{en } Y = 0 \quad \psi = \frac{\phi}{4} X^2 \quad (11.23)$$

$$\text{en } Y = \zeta \quad \psi = \frac{\phi}{4} (\zeta^2 + X^2) \quad (11.24)$$

Se obtuvo lo deseado, o sea un problema en términos de una ecuación diferencial homogénea. Sin embargo, como consecuencia las condiciones de frontera son no homogéneas, pero este tipo de problemas ya fue resuelto anteriormente por la descomposición en dos problemas. Así, el problema para ψ puede resolverse usando la siguiente superposición

$$\psi = \psi_1(X, Y) + \psi_2(X, Y) \quad (11.25)$$

En donde ψ_1 y ψ_2 están dados por las soluciones de los siguientes problemas

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial Y^2} = 0 \quad (11.26)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial Y^2} = 0 \quad (11.30)$$

$$\text{en } X = 0 \quad \psi_1 = \frac{\phi}{4} Y^2 \quad (11.27)$$

$$\text{en } X = 0, 1 \quad \psi_2 = 0 \quad (11.31)$$

$$\text{en } X = 1 \quad \psi_1 = \frac{\phi}{4} (1 + Y^2) \quad (11.28)$$

$$\text{en } Y = 0 \quad \psi_2 = \frac{\phi}{4} X^2 \quad (11.32)$$

$$\text{en } Y = 0, \zeta \quad \psi_1 = 0 \quad (11.29)$$

$$\text{en } Y = \zeta \quad \psi_2 = \frac{\phi}{4} (X^2 + \zeta^2) \quad (11.33)$$

Al haber revisado las secciones anteriores de este capítulo no será demasiado complicado demostrar que las soluciones para $\psi_1(X, Y)$ y $\psi_2(X, Y)$ son de la forma

$$\psi_1(X, Y) = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k(Y) \left[c_k \sinh\left(\frac{k\pi}{\zeta} X\right) + d_k \cosh\left(\frac{k\pi}{\zeta} X\right) \right] \quad (11.34)$$

$$\psi_2(X, Y) = \sum_{p=1}^{\infty} \varphi_p(X) \left[C_p \sinh(p\pi Y) + D_p \cosh(p\pi Y) \right] \quad (11.35)$$

en donde las funciones propias están dadas por

$$\varphi_n(X) = \sin(n\pi X) \quad (11.36)$$

$$\chi_m(Y) = \sin\left(\frac{m\pi}{\zeta} Y\right) \quad (11.37)$$

Procederemos a evaluar las constantes de integración en las ecuaciones (11.34) y (11.35). Al usar la ecuación (11.27) con la (11.34) se obtiene

$$\text{En } X = 0 \quad \frac{\phi}{4} Y^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k(Y) d_k$$

Usando la ortogonalidad de $\chi_k(Y)$ se obtiene

$$d_k = \frac{\frac{\phi}{4} \int_0^\zeta Y^2 \chi_k(Y) dY}{\int_0^\zeta \chi_k^2(Y) dY} \quad (11.38)$$

El uso de la ecuación (11.28) junto con la (11.47) lleva a

$$\text{en } X = 1 \quad \frac{\phi}{4} (1 + Y^2) = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k(Y) \left[c_k \sinh\left(\frac{k\pi}{\zeta}\right) + d_k \cosh\left(\frac{k\pi}{\zeta}\right) \right] \quad (11.39)$$

Usando nuevamente la ortogonalidad de $\chi_k(Y)$, y la definición de d_k dada por la ec. (11.38) se obtiene

$$c_k = \frac{1}{\sinh\left(\frac{k\pi}{\zeta}\right)} \left\{ \frac{\frac{\phi}{4} \int_0^\zeta \chi_k(Y) dY}{\int_0^\zeta \chi_k^2(Y) dY} + d_k \left[1 - \cosh\left(\frac{k\pi}{\zeta}\right) \right] \right\} \quad (11.40)$$

En forma similar se obtienen las constantes en (11.35) mediante el uso de las condiciones de frontera dadas por las ecuaciones (11.32) y (11.33). Los resultados son

$$D_p = \frac{\frac{\phi}{4} \int_0^1 X^2 \varphi_p(X) dX}{\int_0^1 \varphi_p^2(X) dX} \quad (11.41)$$

y

$$C_p = \frac{1}{\sinh(p\pi\zeta)} \left\{ \frac{\zeta^2 \frac{\phi}{4} \int_0^1 \varphi_p(X) dX}{\int_0^1 \varphi_p^2(X) dX} + D_p [1 - \cosh(p\pi\zeta)] \right\} \quad (11.42)$$

Para la evaluación de la solución no es conveniente manejar $\psi_1(X, Y)$ y $\psi_2(X, Y)$ en la forma dada por las ecs. (11.34) y (11.35). Por ello se involucran (11.40) y (11.42) con (11.34) y (11.35) respectivamente para obtener

$$\psi_1(X, Y) = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k(Y) \left[a_k \frac{\sinh(k\pi(1-X)/\zeta)}{\sinh(k\pi/\zeta)} + b_k \frac{\sinh(k\pi X/\zeta)}{\sinh(k\pi/\zeta)} \right] \quad (11.43)$$

$$\psi_2(X, Y) = \sum_{p=1}^{\infty} \varphi_p(X) \left[A_p \frac{\sinh(p\pi(\zeta-Y))}{\sinh(p\pi\zeta)} + B_p \frac{\sinh(p\pi Y)}{\sinh(p\pi\zeta)} \right] \quad (11.44)$$

En estas ecuaciones para las constantes A_p , B_p , a_k y b_k se usan las definiciones siguientes

$$a_k = \frac{\frac{\phi}{4} \int_0^\zeta Y^2 \chi_k(Y) dY}{\int_0^\zeta \chi_k^2(Y) dY}, \quad b_k = a_k + \frac{\frac{\phi}{4} \int_0^\zeta \chi_k(Y) dY}{\int_0^\zeta \chi_k^2(Y) dY} \quad (11.45a,b)$$

$$A_p = \frac{\frac{\phi}{4} \int_0^1 X^2 \varphi_p(X) dX}{\int_0^1 \varphi_p^2(X) dX}, \quad B_p = A_p + \frac{\zeta^2 \frac{\phi}{4} \int_0^1 \varphi_p(X) dX}{\int_0^1 \varphi_p^2(X) dX} \quad (11.46a,b)$$

Solución del problema de $\tilde{u}(X, Y, \tau)$ dado por las ecs. (11.15)-(11.18)

Para la solución de $\tilde{u}$ se propone la siguiente fórmula de separación de variables

$$\tilde{u}(X, Y, \tau) = \tilde{u}_1(X, \tau) \tilde{u}_2(Y, \tau) \quad (11.47)$$

La substitución de la ecuación (11.47) en (11.15) da como resultado

$$\tilde{u}_1 \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tau} + \tilde{u}_2 \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tau} = \tilde{u}_2 \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial X^2} + \tilde{u}_1 \frac{\partial^2 \tilde{u}_2}{\partial Y^2}$$

que puede escribirse

$$\text{ó} \quad \tilde{u}_1 \left(\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \tilde{u}_2}{\partial Y^2} \right) + \tilde{u}_2 \left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial X^2} \right) = 0 \quad (11.48)$$

$\tilde{u}_1$ y $\tilde{u}_2$ son linealmente independientes entre ellas, por lo que de las ecs. (11.48) y de las condiciones de frontera homogéneas dadas por (11.16) y (11.17) se obtienen los siguientes problemas

$$\text{Para } \tilde{u}_1: \quad \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial X^2} = 0 \quad (11.49)$$

$$\tilde{u}_1 = 0 \quad \text{en} \quad X = 0, 1 \quad (11.50)$$

$$\text{y para } \tilde{u}_2: \quad \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \tilde{u}_2}{\partial Y^2} = 0 \quad (11.51)$$

$$\tilde{u}_2 = 0 \quad \text{en} \quad Y = 0, \zeta \quad (11.52)$$

No es muy difícil encontrar que las soluciones son de la forma

$$\tilde{u}_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n^2 \tau} \varphi_n(X) \quad (11.53)$$

$$\tilde{u}_2 = \sum_{m=1}^{\infty} b_m e^{-\kappa_m^2 \tau} \chi_m(Y) \quad (11.54)$$

en donde

$$\lambda_n = n\pi \quad y \quad \kappa_m = \frac{m\pi}{\zeta}$$

Es crucial notar que las funciones propias $\chi_k(Y)$ y $\varphi_p(X)$ son las mismas dadas por las ecs. (11.36) y (11.37), y que aparecen en las soluciones de $\psi_1(X, Y)$ y $\psi_2(X, Y)$.

Al sustituir (11.53) y (11.54) en (11.47) se obtiene $\tilde{u}$ como

$$\tilde{u}(X, Y, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} e^{-(\lambda_n^2 + \kappa_m^2) \tau} \varphi_n(X) \chi_m(Y) \quad (11.55)$$

Nótese que a través de $\varphi_n(X)$, $\tilde{u}(X, Y, \tau)$ satisface las condiciones homogéneas en $X = 0, 1$ dadas por la ec. (11.16), y satisface a través de $\chi_m(Y)$ las condiciones homogéneas en $Y = 0, \zeta$ dadas por la ec. (11.17). Falta aún determinar la constante C_{nm} , para esto se utilizará la condición inicial dada por la ec. (11.18), o sea

$$\text{Cuando} \quad \tau = 0 \quad \tilde{u} = -u_s(X, Y) = -\psi(X, Y) + \phi \frac{1}{2} (X^2 + Y^2)$$

Esta ecuación, al usar la ec. (11.55), toma la forma

$$-u_s(X, Y) = -\psi(X, Y) + \phi \frac{1}{2} (X^2 + Y^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} \varphi_n(X) \chi_m(Y) \quad (11.56)$$

Las funciones $\varphi_n(X)$ y $\chi_m(Y)$ se originaron de problemas de Sturm Liouville por lo tanto es posible usar su propiedad de ortogonalidad para obtener de (11.56)

$$C_{nm} = \frac{\frac{\phi}{4} \int_0^1 \left[\int_0^{\zeta} (X^2 + Y^2) \chi_m(Y) dY \right] \varphi_n(X) dX}{\int_0^1 \varphi_n^2(X) dX \int_0^{\zeta} \chi_m^2(Y) dY} - \frac{\int_0^1 \left[\int_0^{\zeta} (\psi_1 + \psi_2) \chi_m(Y) dY \right] \varphi_n(X) dX}{\int_0^1 \varphi_n^2(X) dX \int_0^{\zeta} \chi_m^2(Y) dY} \quad (11.57)$$

La substitución de $\psi_1(X, Y)$ y $\psi_2(X, Y)$ por las ecuaciones (11.43) y (11.44) da como resultado

$$\begin{aligned}
C_{nm} = & \frac{\frac{\phi}{4} \int_0^1 X^2 \varphi_n(X) dX \int_0^\zeta \chi_m(Y) dY}{\int_0^1 \varphi_n^2(X) dX \int_0^\zeta \chi_m^2(Y) dY} + \frac{\frac{\phi}{4} \int_0^1 \varphi_n(X) dX \int_0^\zeta Y^2 \chi_m(Y) dY}{\int_0^1 \varphi_n^2(X) dX \int_0^\zeta \chi_m^2(Y) dY} \\
& - \frac{1}{\int_0^1 \varphi_n^2(X) dX} \int_0^1 \varphi_n(X) \left[a_k \frac{\sinh(k\pi(1-X)/\zeta)}{\sinh(k\pi/\zeta)} + b_k \frac{\sinh(k\pi X/\zeta)}{\sinh(k\pi/\zeta)} \right] dX \\
& - \frac{1}{\int_0^\zeta \chi_m^2(Y) dY} \int_0^\zeta \chi_n(Y) \left[A_p \frac{\sinh(p\pi(\zeta-Y))}{\sinh(p\pi\zeta)} + B_p \frac{\sinh(p\pi Y)}{\sinh(p\pi\zeta)} \right] dY \quad (11.58)
\end{aligned}$$

Después de efectuar las dos últimas integrales se obtiene la constante C_{nm} en términos de cantidades definidas antes por las ecs. (11.45) y (11.46)

$$\begin{aligned}
C_{nm} = & \frac{4}{\phi} A_n (b_m - a_m) + \frac{4}{\phi \zeta^2} a_m (B_n - A_n) \\
& - \frac{2\zeta^2}{n\pi(1+\zeta^2)} \left[-a_n + b_n (-1)^{n+1} \right] - \frac{2}{n\pi(1+\zeta^2)} \left[A_m + B_m (-1)^{m+1} \right] \quad (11.59)
\end{aligned}$$

Las constantes A_m , B_m , a_n y b_n después de efectuar las integrales indicadas por las ecuaciones (11.45) y (11.46) son

$$a_m = \frac{\phi}{2\zeta} \left\{ 2 \left(\frac{\zeta}{m\pi} \right)^3 \left[(-1)^m - 1 \right] - \frac{\zeta^3}{m\pi} (-1)^m \right\} \quad (11.60)$$

$$b_m - a_m = \frac{\phi}{2m\pi} \left[1 - (-1)^m \right] \quad (11.61)$$

$$A_n = \frac{\phi}{2} \left\{ 2 \left(\frac{1}{n\pi} \right)^3 \left[(-1)^n - 1 \right] - \frac{1}{n\pi} (-1)^n \right\} \quad (11.62)$$

$$B_n - A_n = \frac{\zeta^2 \phi}{2n\pi} \left[1 - (-1)^n \right] \quad (11.63)$$

En este punto se puede considerar que la solución del problema finalmente se ha terminado y está dada por

$$\begin{aligned}
u(X, Y, \tau) = & \psi_1(X, Y) + \psi_2(X, Y) \\
& - \frac{\phi}{4} (X^2 + Y^2) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} e^{-(\lambda_n^2 + \kappa_m^2)\tau} \varphi_n(X) \chi_m(Y) \quad (11.64)
\end{aligned}$$

en donde

$$\lambda_n = n\pi \quad \kappa_m = \frac{m\pi}{\zeta} \quad (11.65)$$

$$\varphi_n(X) = \sin(\lambda_n X) \quad (11.66)$$

$$\chi_m(Y) = \sin(\kappa_m Y)$$

En la ec. (11.64) C_{nm} está dada por la ec. (11.59). Las contribuciones a la parte estacionaria $\psi_1(X,Y)$ y $\psi_2(X,Y)$ están dadas por las ecs. (11.34) y (11.35). Las constantes A_m , B_m , a_n y b_n que aparecen tanto en C_{nm} como en $\psi_1(X,Y)$ y $\psi_2(X,Y)$, están dadas por las ecs. (11.60)-(11.63). La fórmula aunque larga no es difícil de seguir para su evaluación. Sin embargo, debe reconocerse que el método requiere tres fórmulas de superposición y que ello como consecuencia aumenta el álgebra significativamente, esta es la razón para introducir el método alternativo de solución que se presenta en la sección siguiente.

Evaluación de la solución

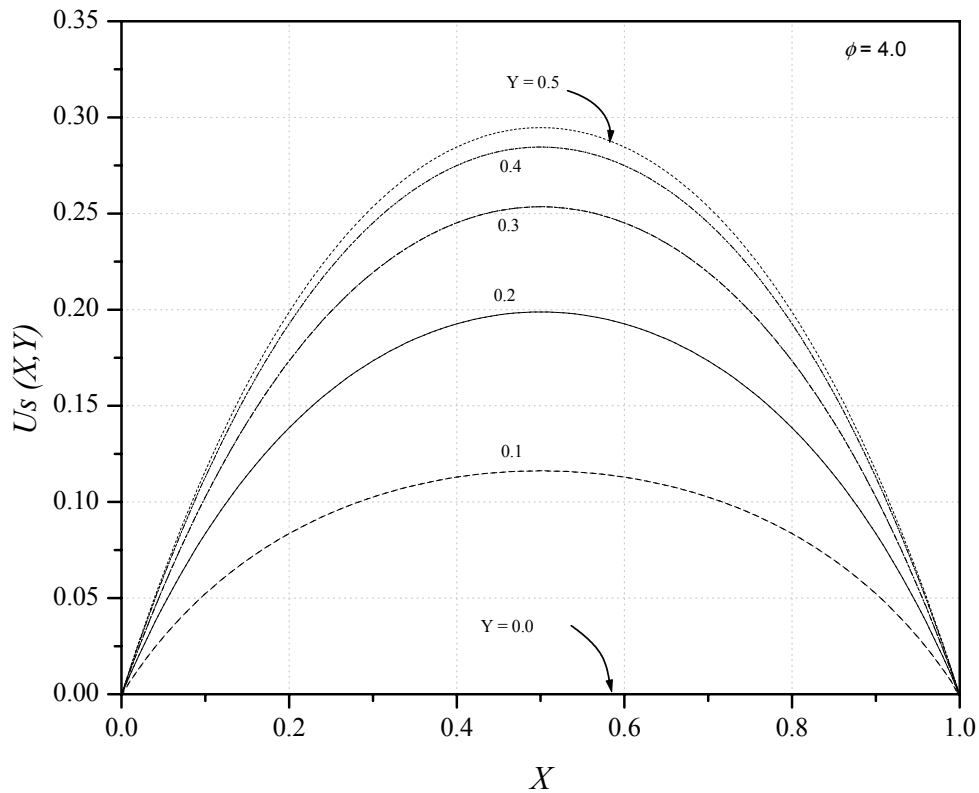


Figura 16. perfiles de velocidad en el canal, aquí se usó $\phi=4.0$ y $\zeta=1.0$ y 9000 términos de la serie.

Detalles para encontrar $u_s(X, Y)$ definido por la ec. (11.12)

La solución del problema dado por las ecs. (11.12)-(11.14) se inicia con la superposición siguiente

$$u_s(X, Y) = \psi(X, Y) + f(X, Y) \quad (11.67)$$

Al sustituirla en la ec. (11.12) se obtiene

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} = -\phi \quad (11.68)$$

Se requiere una ecuación diferencial homogénea para f , o sea la ecuación (11.20). Esto obliga a que la ecuación diferencial para $f(X, Y)$ sea

$$\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} = -\phi \quad (11.69)$$

Con la idea de resolver fácilmente la ecuación diferencial (11.69) la función f puede ser cualquiera que la satisfaga. Por ello se propone

$$\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} = -\frac{1}{2}\phi \quad \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} = -\frac{1}{2}\phi \quad (11.70a,b)$$

De las que integrando se obtiene

$$f(X, Y) = -\frac{1}{4}\phi X^2 + g(Y)X + G(Y) \quad (11.71a)$$

$$f(X, Y) = -\frac{1}{4}\phi Y^2 + h(X)Y + H(X) \quad (11.71b)$$

Como ambas deben que ser idénticas, se puede seleccionar

$$G(Y) = -\frac{1}{4}\phi Y^2 \quad g(Y) = 0 \quad (11.73ab)$$

$$H(X) = -\frac{1}{4}\phi X^2 \quad h(X) = 0 \quad (11.74a,b)$$

y así

$$f(X, Y) = -\frac{1}{4}\phi(X^2 + Y^2) \quad (11.75)$$

Como no se han establecido condiciones de frontera para $f(X, Y)$ y es obligatorio satisfacer las correspondientes a $u_s(X, Y)$, las condiciones para $\psi(X, Y)$ necesariamente son no homogénea. Ellas están dadas por las ecs. (11.21)-(11.24).

12. Solución de problemas con condiciones de frontera no homogéneas dependientes del tiempo.

En la Sección 10 se resolvió un problema muy parecido pero con condiciones de frontera independientes del tiempo, ahora revisaremos un caso en el que las nohomogéneas en las condiciones de frontera se deben a alguna dependencia en el tiempo. Para ello consideraremos la situación mostrada en la siguiente figura:

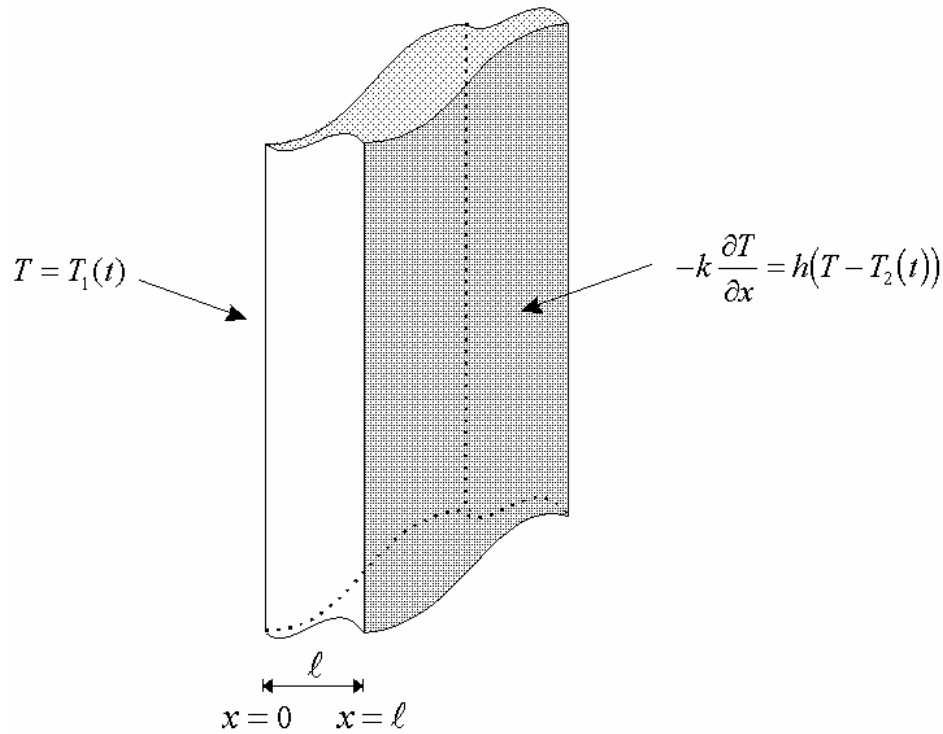


Figura 17. Placa sólida que separa a dos fluidos cuya temperatura cambia con el tiempo de acuerdo a funciones conocidas.

La conducción de calor transitoria en la placa está dada por

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad 0 < x < \ell \quad (12.1)$$

Se supondrán las siguientes condiciones de frontera e inicial

$$\text{en } x=0 \quad T = T_1(t) \quad (12.2)$$

$$\text{en } x=\ell \quad -k \frac{\partial T}{\partial x} = h(T - T_2(t)) \quad (12.3)$$

$$\text{cuando } t=0 \quad T=T_0 \quad (12.4)$$

Introduciendo las siguientes variables adimensionales en las ecs. (12.1)-(12.4)

$$u = \frac{T}{T_0}, \quad X = \frac{x}{\ell}, \quad \tau = \frac{t\alpha}{\ell^2}$$

se obtiene

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} \quad (12.5)$$

$$\text{en } X=0 \quad u = \phi_1(\tau) \quad (12.6)$$

$$\text{en } X=1 \quad \frac{\partial u}{\partial X} + N_{Bi} u = N_{Bi} \phi_2(\tau) \quad (12.7)$$

$$\text{cuando } \tau = 0 \quad u=1 \quad (12.8)$$

En la ec. (12.6) se introdujo la siguiente temperatura adimensional

$$\phi_1(\tau) = \frac{T_1(t)}{T_0} \quad (12.9)$$

y en la ec. (12.7) se usaron el número de Biot y la temperatura adimensional dadas por

$$N_{Bi} = \frac{h \ell}{k} \quad (12.10)$$

$$\phi_2(\tau) = \frac{T_2(t)}{T_0} \quad (12.11)$$

Se usará la siguiente de superposición para $u(X, \tau)$

$$u(X, \tau) = f(X, \tau) + \tilde{u}(X, \tau) \quad (12.12)$$

La función $f(X, \tau)$ será obligada a satisfacer las condiciones no homogéneas, y así $\tilde{u}(X, \tau)$ tendrá condiciones homogéneas. Una posibilidad es usar

$$f(X, \tau) = a_1(\tau)(1 - X) + a_2(\tau)X \quad (12.13)$$

en donde $a_1(\tau)$ y $a_2(\tau)$ se pueden determinar de

$$f = \phi_1(\tau) \quad \text{en } X = 0 \quad (12.14)$$

$$\frac{\partial f}{\partial X} + N_{Bi} f = N_{Bi} \phi_2(\tau) \quad \text{en } X=1 \quad (12.15)$$

Esto es, hemos asignado a $f(X, \tau)$ la parte no homogénea de las condiciones de frontera de $u(X, \tau)$ dadas por las ecs. (12.6) y (12.7). Al aplicar (12.14) y (12.15) a la ec. (12.13) se obtiene

$$a_1(\tau) = \phi_1(\tau) \quad (12.16)$$

$$y \quad a_2(\tau) = \frac{\phi_1(\tau) + N_{Bi} \phi_2(\tau)}{1 + N_{Bi}} \quad (12.17)$$

Por lo que $f(X, \tau)$ está dada por

$$f(X, \tau) = \phi_1(\tau)(1 - X) + \frac{\phi_1(\tau) + N_{Bi} \phi_2(\tau)}{1 + N_{Bi}} X \quad (12.18)$$

Con esta función, se puede obtener el problema para $\tilde{u}(X, \tau)$. Las ecs. (12.12) y (12.18) permiten obtener

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} = \phi_1'(\tau)(1 - X) + \frac{\phi_1'(\tau) + N_{Bi} \phi_2'(\tau)}{1 + N_{Bi}} X + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} \quad (12.19a)$$

$$y \quad \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} \quad (12.19b)$$

La ec. (12.19a) se simplifica con la introducción de la definición

$$-\Phi(X, \tau) = \phi_1'(\tau)(1 - X) + \frac{\phi_1'(\tau) + N_{Bi} \phi_2'(\tau)}{1 + N_{Bi}} X \quad (12.20)$$

Al sustituir (12.19) y (12.20) en (12.5) y usar las condiciones (12.14) y (12.15) en (12.6) y (12.7) se obtiene el siguiente problema para $\tilde{u}(X, \tau)$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} + \Phi(X, \tau) \quad (12.21)$$

$$\text{en } X = 0 \quad \tilde{u} = 0 \quad (12.22)$$

$$\text{en } X = 1 \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + N_{Bi} \tilde{u} = 0 \quad (12.23)$$

$$\text{para } \tau = 0 \quad \tilde{u} = 1 - f(X, 0) \quad (12.24)$$

Este problema con una ecuación diferencial no homogénea y condiciones de frontera homogéneas puede ser resuelto utilizando el método que se presentó en el ejemplo anterior. Para ello primero se encontrarán las funciones propias correspondientes al siguiente problema homogéneo

$$\frac{\partial u_H}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u_H}{\partial X^2} \quad (12.25)$$

$$\text{en } X = 0 \quad u_H = 0 \quad (12.26)$$

$$\text{en } X = 1 \quad \frac{\partial u_H}{\partial X} + N_{Bi} u_H = 0 \quad (12.27)$$

Ahora se deben buscar las funciones propias que satisfacen la ecuación diferencial y las condiciones homogéneas (12.26) y (12.27), por lo que se propone

$$u_H = \Theta(\tau)\varphi(X)$$

Al sustituir esta en la ec. (12.25) da como resultado

$$\frac{1}{\Theta} \frac{d\Theta}{d\tau} = \frac{1}{\varphi} \frac{d^2\varphi}{dX^2} = -\lambda^2$$

Al resolver para φ , se encuentra

$$\varphi(X) = A \sin(\lambda X) + B \cos(\lambda X)$$

Las condiciones de frontera (12.26) y (12.27) permiten encontrar

$$\varphi(0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d\varphi(1)}{dX} + N_{Bi} \varphi(1) = 0$$

Usando la primera de las condiciones se encuentra $B = 0$. Este resultado junto con la condición en $X = 1$ nos lleva a la condición para encontrar los valores propios

$$\tan(\lambda) = -\frac{\lambda}{N_{Bi}} \quad (12.28)$$

En la Sección 7 discutimos como encontrar los valores propios λ_n a partir de la ec. (12.28).

Las funciones propias son

$$\varphi_n(x) = \sin(\lambda_n) \quad (12.29)$$

Se debe tener en mente que

$$\frac{d^2\varphi_n}{dX^2} = -\lambda_n^2 \varphi_n \quad (12.30)$$

A continuación se proponen

$$\tilde{u}(X, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\tau) \varphi_n(X) \quad (12.31)$$

y

$$\Phi(X, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\tau) \varphi_n(x) \quad (12.32)$$

Para esta última expresión la ortogonalidad de $\varphi_n(X)$ permite encontrar

$$c_n(\tau) = \frac{\int_0^1 \Phi(X, \tau) \varphi_n dx}{\int_0^1 \varphi_n^2 dx} \quad (12.33)$$

La substitución de (12.31) y (12.32) en (12.21) da como resultado

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \frac{da_n}{d\tau} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{d^2 \varphi_n}{dX^2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\tau) \varphi_n$$

ó

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \left[\frac{da_n}{d\tau} + \lambda_n^2 a_n - c_n(\tau) \right] = 0$$

Por lo tanto

$$\frac{da_n}{d\tau} + \lambda_n^2 a_n = c_n(\tau) \quad (12.34)$$

La condición inicial para $a_n(\tau)$ se obtiene de la ecuación (12.24) que lleva a

$$1 - f(X, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0) \varphi_n(X)$$

y usando la ortogonalidad de las funciones propias se obtiene

$$a_n(0) = \frac{\int_0^1 [1 - f(X, 0)] \varphi_n dX}{\int_0^1 \varphi_n^2(X) dX} \quad (12.35)$$

La solución de (12.34) es [Apéndice D]

$$a_n(\tau) = a_n(0) e^{-\lambda_n^2 \tau} + e^{-\lambda_n^2 \tau} \int_0^{\tau} e^{+\lambda_n^2 \zeta} c_n(\zeta) d\zeta \quad (12.36)$$

Entonces se ha encontrado la solución completa para el problema descrito por las ecuaciones (12.1)-(12.4).

En principio cualquier tipo de función $f(X, \tau)$ se puede usar con el propósito de resolver el problema. Existen otros métodos para la solución de problemas no homogéneos como el método de funciones de Green y el método integral de superposición. El método que se ha revisado aquí es el más simple.

A continuación se muestra la evaluación de la solución ecuaciones (12.18) y (12.31) para tres diferentes casos

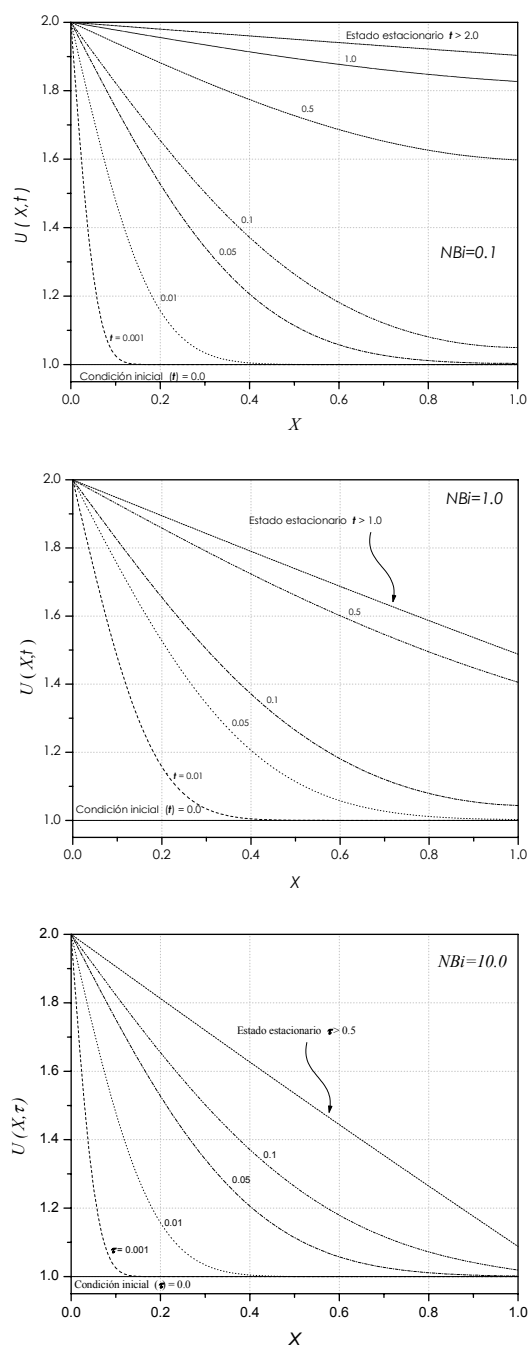


Figura 18. Perfiles de temperatura en la placa, para diferentes números de Biot, en el caso en que las condiciones de frontera son independientes del tiempo e iguales a 2.0 y 1.0 respectivamente. Se utilizaron 190 términos de la serie

Aquí se muestra la evaluación de la solución para un segundo caso

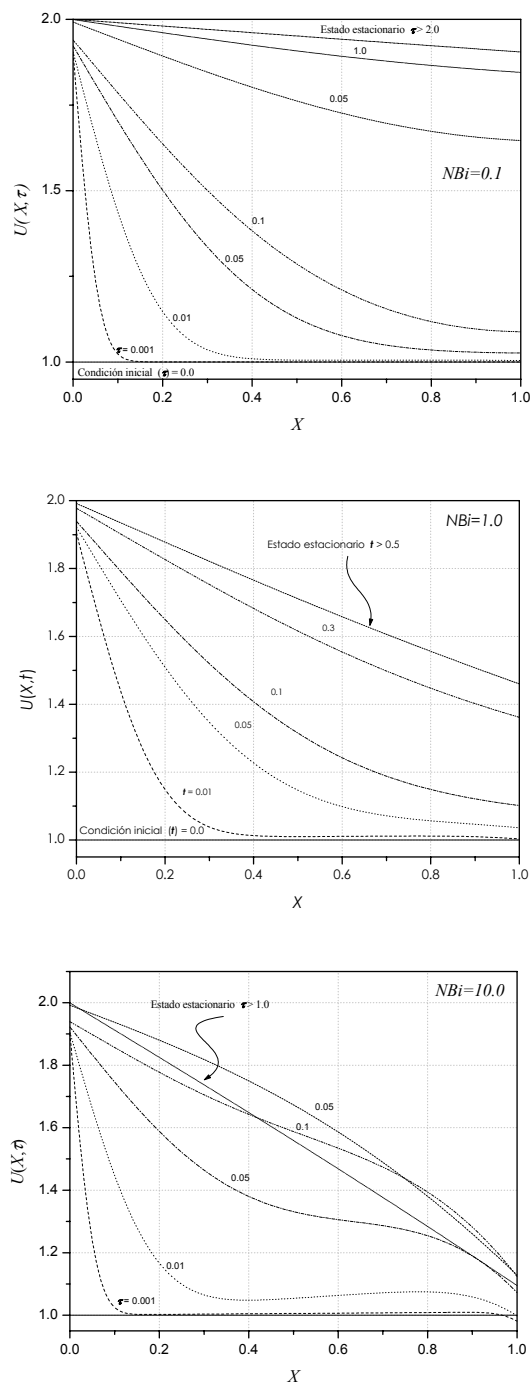


Figura 19. Perfiles de temperatura en la placa, para diferentes números de Biot, en el caso en que las condiciones dependientes del tiempo son del tipo exponencial, aquí μ_1 y $\mu_2 = 5.0$ y σ_1 y $\sigma_2 = 0.5$. Se utilizaron 190 términos de la serie.

Finalmente se analiza un tercer caso

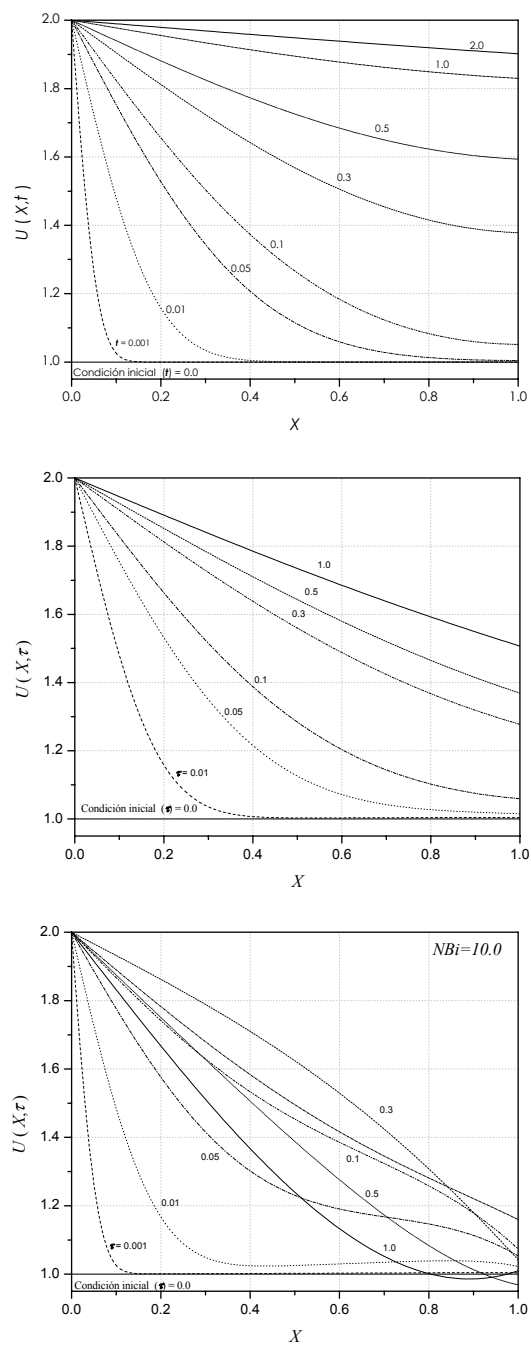


Figura 20. Perfiles de temperatura en la placa, para diferentes números de Biot, en el caso en que una de las condiciones de frontera es constante e igual a 2.0 y la otra depende del tiempo a través de una función periódica, aquí σ_1 y $\sigma_2 = 0.5$ y $\omega_2 = 5.0$. Se utilizaron 190 términos de la serie.

Comentarios sobre el procedimiento para encontrar la solución de este problema con condiciones de frontera dependientes del tiempo.

Nótese que se introdujo la función $f(X, \tau)$ cuyo papel, muy importante, fue hacerse cargo de las condiciones de frontera no homogéneas y por ello se pagó como precio el tener que resolver una ecuación no homogénea para $\tilde{u}(X, \tau)$. Esto fue posible porque se disponía de condiciones de frontera homogéneas y se usó el que cualquier función, aún una desconocida puede expandirse en series de funciones propias.

Debe notarse también que estrictamente no es posible usar una superposición como la de la Sección 10, porque en ese caso la solución en estado estacionario $u_s(X)$ no puede encargarse de las condiciones de frontera no homogéneas ya que ellas dependen del tiempo. Sin embargo, si puede proponerse una superposición

$$u(X, \tau) = u_{qs}(X, \tau) + \tilde{u}(X, \tau) \quad (12.37)$$

En donde $u_{qs}(X, \tau)$ se encargará de las condiciones de frontera no homogéneas y satisface la ecuación diferencial correspondiente al estado estacionario, o sea $u_{qs}(X, \tau)$ está dado por

$$\frac{\partial^2 u_{qs}}{\partial X^2} = 0 \quad (12.38)$$

$$u_{qs} = \phi_1(\tau) \quad \text{en } X=0 \quad (12.39)$$

$$\frac{\partial u_{qs}}{\partial X} + N_{Bi} u_{qs} = N_{Bi} \phi_2(\tau) \quad \text{en } X=1 \quad (12.40)$$

Y por lo tanto $\tilde{u}(X, \tau)$ está dado por

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2} - \frac{\partial u_{qs}}{\partial \tau} \quad (12.41)$$

con condiciones de frontera homogéneas dadas por las ecs. (12.23) y (12.22). Al resolver la ecuación (12.38) sujeta a las condiciones de frontera (12.39) y (12.40) se encontrará que $u_{qs}(X, \tau)$ es la misma expresión que se encontró para $f(X, \tau)$ y así llegaremos al mismo problema para $\tilde{u}$ ya resuelto anteriormente. Sin embargo, habremos encontrado una forma sistemática para determinar la función “mágica” $f(X, \tau)$, que no es otra que la solución del problema bajo la suposición del falso estado estacionario.

13. Método para la solución de problemas nohomogéneos basado en la expansión en series de funciones ortogonales

Se presentará este método como una alternativa a la metodología presentada en la Sección 11 para la solución de problemas bidimensionales transitorios y no homogéneos. El punto de partida será la versión adimensional del problema de flujo en un canal, por ello la ecuación diferencial y las condiciones de frontera son:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \phi + \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \quad (13.1)$$

$$\text{en } X = 0, 1 \quad u = 0 \quad (13.2)$$

$$\text{en } Y = 0, \zeta \quad u = 0 \quad (13.3)$$

$$\text{para } \tau = 0 \quad u = 0 \quad (13.4)$$

Para la solución del problema primero se busca un problema homogéneo de forma análoga al problema homogéneo, esto con la idea de encontrar funciones propias que satisfagan las condiciones de frontera homogéneas del problema original. Entonces se propone el problema siguiente

$$\frac{\partial u_H}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u_H}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u_H}{\partial Y^2} \quad (13.5)$$

$$u_H = 0 \quad \text{en} \quad X = 0, 1 \quad (13.6)$$

$$u_H = 0 \quad \text{en} \quad Y = 0, \zeta \quad (13.7)$$

La solución del problema anterior tiene la forma

$$u_H = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} e^{-(\lambda_n^2 + \kappa_m^2)\tau} \varphi_n(X) \chi_m(Y) \quad (13.8)$$

en donde

$$\begin{aligned} \varphi_n(X) &= \text{sen}(n\pi X) \\ \chi_m(Y) &= \text{sen}\left(\frac{m\pi}{\zeta} Y\right) \\ \lambda_n &= n\pi \quad \text{y} \quad \kappa_m = \frac{m\pi}{\zeta} \end{aligned}$$

Se debe insistir en que u_H no es la solución deseada, y que solo sirvió de base para encontrar las funciones propias que satisfacen las condiciones de frontera del problema original y que son homogéneas. Sobre la base de esto se propone para $u(X, Y, \tau)$ una solución de la forma

$$u(X, Y, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}(\tau) \varphi_n(X) \chi_m(Y) \quad (13.9)$$

Se insiste en que en esta expresión $\varphi_n(X)$ y $\chi_m(Y)$ hacen que $u(X, Y, \tau)$ satisfaga las condiciones de frontera dadas por las ecuaciones (13.2) y (13.3). Nótese que los coeficientes A_{nm} deben ser función del tiempo y que no han sido aún determinados. Para ello se obligará a la ec. (13.9) a satisfacer la ecuación diferencial original [ec. (13.1)]. Por esto se substituirá la ec. (13.9) en la ec. (13.1), pero antes es conveniente expandir el término nohomogéneo de la ecuación (13.1) usando las funciones propias $\varphi_n(X)$ y $\chi_m(Y)$, de tal manera que

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm} \varphi_n(X) \chi_m(Y) \quad (13.10)$$

Como las funciones $\varphi_n(X)$ y $\chi_m(Y)$ son ortogonales, los coeficientes c_{nm} se pueden encontrar a partir de la ec. (13.9) y son

$$c_{nm} = \frac{\phi \int_0^1 \left[\int_0^{\zeta} \chi_m(Y) dY \right] \varphi_n(X) dX}{\int_0^1 \varphi_n^2(X) dX \int_0^{\zeta} \chi_m^2(Y) dY} \quad (13.11)$$

El método también es aplicable al caso en el que la función ϕ sea función de X , Y y τ , en ese caso

$$c_{nm} = c_{nm}(\tau)$$

La substitución de las ecuaciones (13.9) y (13.11) en (13.1) da como resultado:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{dA_{nm}(\tau)}{d\tau} \varphi_n(X) \chi_m(Y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm} \varphi_n(X) \chi_m(Y)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}(\tau) \chi_m(Y) \frac{d^2 \varphi_n(X)}{dX^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}(\tau) \chi_m(Y) \frac{d^2 \chi_m(Y)}{dY^2} \quad (13.12)$$

Recordando que las funciones ortogonales $\varphi_n(X)$ y $\chi_m(Y)$ son soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\frac{d^2 \varphi_n}{dX^2} = -\lambda_n^2 \varphi_n \quad (13.13)$$

y

$$\frac{d^2 \chi_m}{dY^2} = -\kappa_m^2 \chi_m \quad (13.14)$$

Substituyendo estas ecuaciones en la ecuación (13.12) para eliminar las derivadas espaciales se obtiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{dA_{nm}}{d\tau} - c_{nm} + (\lambda_n^2 + \kappa_m^2) A_{nm} \right] \varphi_n \chi_m = 0 \quad (13.15)$$

De donde debido a la independencia lineal de las funciones propias se obtiene

$$\frac{dA_{nm}}{d\tau} + (\lambda_n^2 + \kappa_m^2) A_{nm} = c_{nm} \quad (13.16)$$

Es necesario especificar una condición inicial para A_{nm} , y ella se puede obtener del hecho que la ec. (13.11) debe satisfacer la condición dada por la ec. (13.4), o sea

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}(0) \varphi_n(X) \chi_m(Y) \quad (13.17)$$

y de aquí

$$A_{nm}(0) = 0 \quad (13.18)$$

Nótese que el método no está limitado al caso en que la condición inicial es cero, ya que podría tenerse la condición inicial

$$\text{En } \tau = 0, \quad u(X, Y, 0) = F(X, Y) \quad (13.19)$$

y por ello

$$F(X, Y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}(0) \varphi_n(X) \chi_m(Y) \quad (13.20)$$

Entonces utilizando la ortogonalidad de $\varphi_n(X)$ y $\chi_m(Y)$, de la ec. (13.20) la condición inicial para resolver la ecuación (13.16) sería

$$A_{nm}(0) = \frac{\int_0^1 \left[\int_0^\zeta F(X, Y) \chi_m(Y) dY \right] \varphi_n(X) dX}{\int_0^1 \varphi_n^2(X) dX \int_0^1 \chi_m^2(Y) dY} \quad (13.21)$$

La solución de la ecuación diferencial lineal de primer orden, dada por la ec. (13.16), sujeta a la condición expresado por la ecuación (13.21) es [Apéndice D]

$$A_{nm}(\tau) = A_{nm}(0) e^{-(\lambda_n^2 + k_m^2)\tau} + e^{-(\lambda_n^2 + k_m^2)\tau} \int_0^\tau c_{nm} e^{+(\lambda_n^2 + k_m^2)\xi} d\xi \quad (13.22)$$

Que para el caso del problema del movimiento de un fluido a partir del reposo y en el que se aplica la ec. (13.18) se reduce a

$$A_{nm}(\tau) = \frac{c_{nm}}{\lambda_n^2 + k_m^2} \left[1 - e^{-(\lambda_n^2 + k_m^2)\tau} \right] \quad (13.23)$$

Nótese que la rapidez de este método con respecto al propuesto en la Sección 10 es contrastante. La solución, una vez se substituye (13.22) en la ec. (13.9), toma la forma

$$u(X, Y, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_{nm}}{\lambda_n^2 + k_m^2} \varphi_n(X) \chi_m(Y) \left[1 - e^{-(\lambda_n^2 + k_m^2)\tau} \right] \quad (13.24)$$

Además de lo directo del método, y como consecuencia, la expresión que da el resultado es mucho más compacta. Nótese que de la ec. (13.24) es fácil obtener la distribución de velocidad en estado estacionario, esto porque el término no homogéneo y las condiciones de frontera son independientes del tiempo. Así

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} u(X, Y, \tau) = u_s(X, Y) \quad (13.25)$$

que al aplicarla a la ec. (13.24) da

$$u_s(X, Y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_{nm}}{\lambda_n^2 + k_m^2} \varphi_n(X) \chi_m(Y) \quad (13.26)$$

Para evaluar la solución es necesario obtener específicamente la constante dada por la ec. (13.11), que se puede escribir como

$$c_{nm} = \frac{16}{\phi \zeta^2} \left(\frac{\zeta^2 \frac{\phi}{4} \int_0^1 \varphi_n(X) dX}{\int_0^1 \varphi_n^2(X) dX} \right) \left(\frac{\frac{\phi}{4} \int_0^\zeta \chi_m(Y) dY}{\int_0^\zeta \chi_m^2(Y) dY} \right) \quad (13.27)$$

que utilizando los resultados dados en las ecs. (10.45) y (10.46) de la sección anterior toma la forma

$$c_{nm} = \frac{16}{\phi \zeta^2} (B_n - A_n)(b_m - a_m) \quad (13.28)$$

$$\text{ó} \quad c_{nm} = \frac{4\phi}{nm\pi} [1 - (-1)^n] [1 - (-1)^m] \quad (13.29)$$

Evaluación de la solución

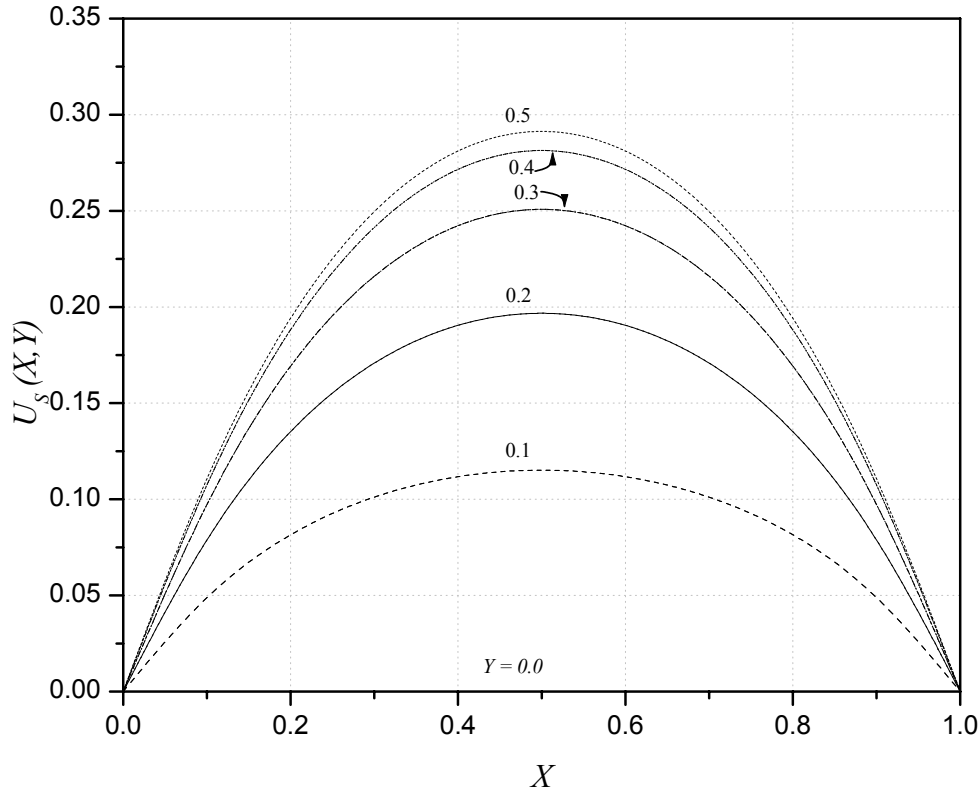


Figura 21. Perfiles de velocidad en el canal, se utilizaron los parámetros $\phi=4.0$ y $\zeta=1.0$, con 30 términos.

A continuación se muestra la evaluación de la solución transitoria

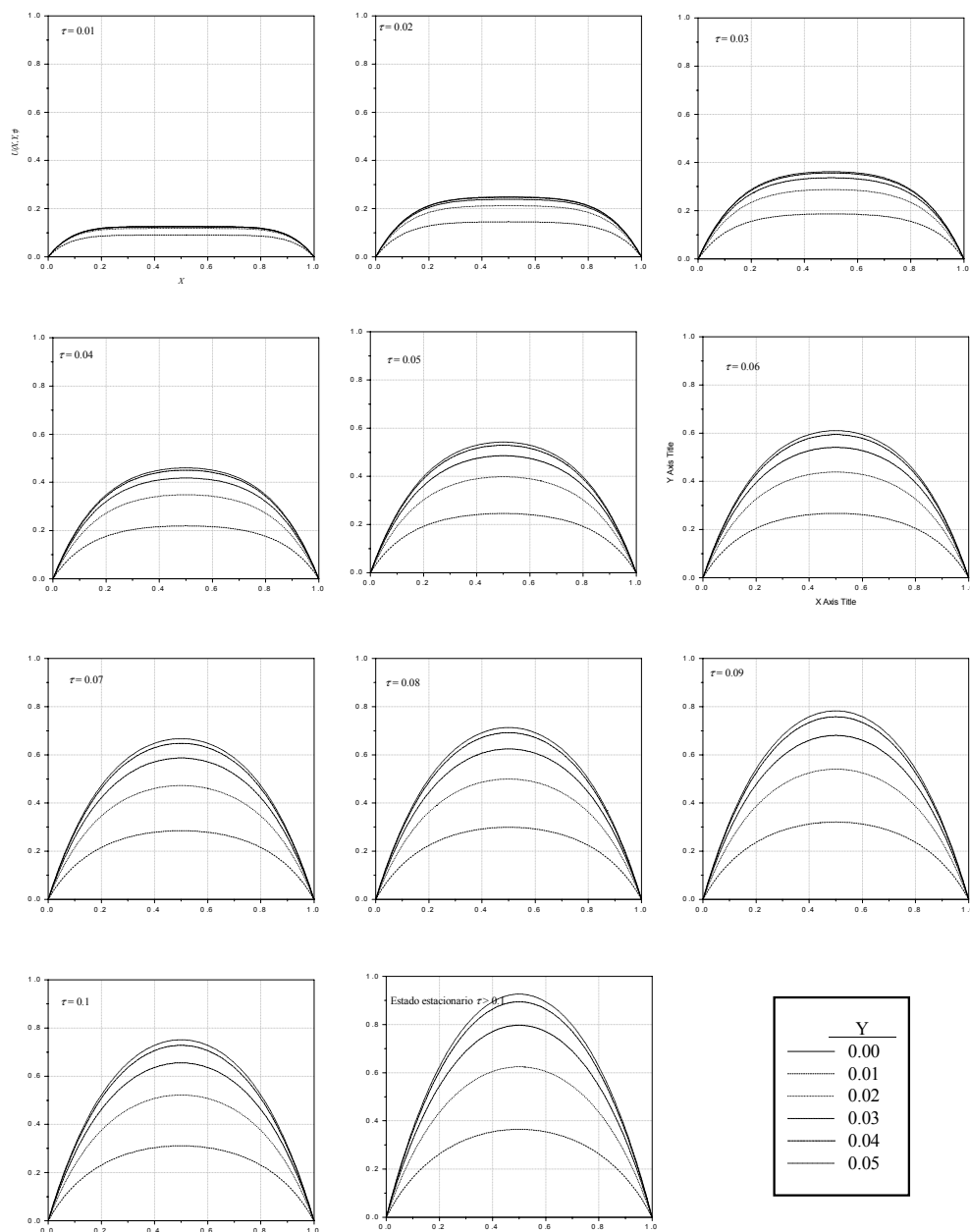


Figura 22. Perfiles de velocidad en el canal, que muestran la evolución del perfil en el tiempo, los parámetros utilizados son los mismos del problema anterior, con la excepción de que aquí se utilizaron únicamente 30 términos de serie.

14. Sobre la metodología de la solución de ecuaciones diferenciales parciales parabólicas con el método de separación de variables y sus variaciones.

Haremos un resumen de los puntos más importantes para resolver los problemas relacionados a ecuaciones diferenciales parciales parabólicas. Directamente relacionado al problema de la Sección 10 estableceremos que las

Condiciones para resolver un problema de valor inicial con el método de separación de variables con una ecuación diferencial parcial unidimensional:

- a) La ecuación debe ser homogénea: ecuación de difusión.
- b) Las dos condiciones de frontera deben ser homogéneas.

El planteamiento del problema de valor inicial para $u(X, \tau)$, dado por las ecuaciones (10.6)-(10.9) no satisface las condiciones acabadas de señalar. Por ello se introdujo la superposición

$$u(X, \tau) = u_s(X) + \tilde{u}(X, \tau) \quad (14.1)$$

De tal manera que $u_s(X)$ acarreo con ella las condiciones de frontera no homogéneas, generando condiciones de frontera homogéneas para la ecuación diferencial parcial parabólica homogénea de $\tilde{u}(X, \tau)$. El problema de $\tilde{u}(X, \tau)$ satisface las condiciones necesarias para ser resuelto por el método de separación de variables. Debemos señalar que, ya que la ecuación diferencial es homogénea así como las condiciones de frontera, la única razón de que la solución no sea la trivial es la condición inicial.

Nótese que el adicionar a la ecuación diferencial un término no homogéneo constante o aún dependiente de la posición no impediría que la superposición en términos de $u_s(X)$ generara un problema de $\tilde{u}(X, \tau)$, con las condiciones necesarias para ser resuelto por el método de separación de variables. Esto siempre y cuando el término no homogéneo sea acarreado por el problema de $u_s(X)$. Esto es ejemplificado en el problema propuesto 10.

En donde se solicita la solución de la versión unidimensional del problema revisado en la Sección 11 de este capítulo.

Al revisar la solución de tal ejemplo deben quedar claro las siguientes

Condiciones para resolver un problema de valor inicial con el método de separación de variables con una ecuación diferencial parcial bi-dimensional:

- a) La ecuación debe ser homogénea: ecuación de difusión.
- b) Las cuatro condiciones de frontera deben ser homogéneas.

Por ello en este caso se recurrió a la superposición

$$u = u_s(X, Y) + \tilde{u}(X, Y, \tau) \quad (14.2)$$

Con el objeto de generar un problema para $\tilde{u}(X, Y, \tau)$ que satisfaga las condiciones señaladas en el recuadro anterior. Sin embargo, en contraste con el caso unidimensional el problema de $u_s(X, Y)$ es ahora más complicado pues su ecuación gobernante es elíptica, bidimensional y a pesar de que sus cuatro condiciones de frontera son homogéneas no puede ser resuelto por el método de separación de variables pues la ecuación diferencial parcial es no homogénea. Por ello fue necesario introducir la superposición

$$u_s(X, Y) = \psi(X, Y) - \phi \frac{1}{4}(X^2 + Y^2) \quad (14.3)$$

Que permitió encontrar una ecuación diferencial homogénea elíptica para $\psi(X, Y)$ pero al precio de tener las cuatro condiciones de frontera no homogéneas. Este problema lo pudimos resolver usando la nueva superposición

$$\psi(X, Y) = \psi_1(X, Y) + \psi_2(X, Y) \quad (14.4)$$

Que generó problemas para $\psi_1(X, Y)$ y $\psi_2(X, Y)$ que satisfacen las condiciones señaladas antes para la solución de problemas por el método de separación de variables con ecuaciones diferenciales elípticas bidimensionales. Un procedimiento similar se puede seguir para la versión tridimensional del problema dado en la Sección 11 siempre y cuando el término no homogéneo sea independiente del tiempo. Al respecto de esta situación estableceremos sobre las ecuaciones que pueden ser resueltas directamente por el método de separación de variables que las

Condiciones para resolver un problema de valor inicial con el método de separación de variables con una ecuación diferencial parcial tri-dimensional:

- a) La ecuación debe ser homogénea: ecuación de difusión.
- b) Las seis condiciones de frontera deben ser homogéneas.

Esto quedará más claro al resolver los problemas propuestos 7 y 26.

Lo realizado en las secciones 12 y 13 puede ser resumido muy rápidamente con las siguientes

Condiciones para resolver un problema de valor inicial con una ecuación diferencial parcial tri-dimensional no homogénea por el método de expansión en series de funciones propias:

- a) Las seis condiciones de frontera deben ser homogéneas.

Debe quedar claro que el término no homogéneo puede ser dependiente de la posición y del tiempo y que la condición inicial no tiene una restricción especial. Claro que para llegar a las condiciones del recuadro anterior tal vez sea necesaria una superposición del tipo

$$u(X, Y, Z, \tau) = u_{qs}(X, Y, Z, \tau) + \tilde{u}(X, Y, Z, \tau) \quad (14.5)$$

En donde $u_{qs}(X, Y, Z, \tau)$ se encargará de las condiciones de frontera nohomogéneas generando condiciones de frontera homogéneas para $\tilde{u}(X, Y, Z, \tau)$. Tal vez el término no homogéneo de la ecuación diferencial parabólica de $\tilde{u}$ se complique un poco más, pero esto no representa un problema mayor. En realidad el precio a pagar está en que será necesario resolver una ecuación diferencial parcial elíptica tridimensional homogénea para $u_{qs}(X, Y, Z, \tau)$; aunque esto será engorroso es posible siguiendo lo establecido anteriormente. Debe quedar claro que los casos unidimensional y bidimensional son simplificaciones del problema presente. Así, si uno maneja los conceptos de expansión en series de una función cualquiera en términos de funciones propias, para la solución de

ecuaciones diferenciales parciales parabólicas en dominios finitos, en realidad, lo único que debe recordarse es lo resumido en el último recuadro. Claro que hay un buen número de ideas cruciales en ello y por eso es conveniente revisar todos los puntos presentados.

El método de expansión en series de funciones propias puede también usarse para la solución de ecuaciones ordinarias y ecuaciones diferenciales parciales elípticas. Estas ideas quedarán más claras si se resuelven los problemas propuestos 18 al 22 y el 25.

Por último se mencionará que el método de separación de variables puede aplicarse también para a la solución de problemas en términos de ecuaciones hiperbólicas como las de los ejercicios 17 y 27 a 30.

Como se verá en el capítulo siguiente todas la ideas de superposición y solución en series pueden ser extendidas a problemas planteados en otros sistemas de coordenadas.

Problemas propuestos

En los problemas que incluyen programas de cómputo debe entregarse un reporte escrito que incluya el programa, los resultados y una discusión.

Problema 1

En los siguientes problemas de Sturm-Liouville definidos con la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda^2 y = 0, \quad 0 < x < 1$$

y cada una de las siguientes combinaciones de condiciones de frontera

- a) $y(a) = y(b) = 0$
- b) $y(a) = y'(b) = 0$
- c) $y'(a) = y'(b) = 0$
- d) $y'(a) = \beta_1 y(a) \quad y' - y'(b) = \beta_2 y(b)$

- i) Encuentre la función propia, la condición de los valores propios, los valores propios y la condición de ortogonalidad.
- ii) Para el caso en que $a = 0$ y $b = 1$, muestre gráficamente las funciones correspondientes al primer, quinto, vigésimo y quincuagésimo valor propio.
Para el inciso (d) desarrolle el algebra en forma general, pero los cálculos hágalos solo para cuando $\beta_1 = 0.01$ y $\beta_2 = 1.0$.

Problema 2

Utilice las funciones propias encontradas en los problemas de Sturm-Liouville del ejercicio anterior para expandir las funciones $f(x)$ dadas más abajo, de tal manera que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n y_n(x)$$

- i). Encuentre los coeficientes C_n .
- ii). Compare gráficamente la función dada con los valores obtenidos de la expansión para el caso en que $a = 0$ y $b = 1$; use 1, 5, 20, 50, 100 y 200 términos. Considere las funciones
 - a). $f(x) = 1$
 - b). $f(x) = x^2$
 - c). $f(x) = 1 - x^3$
 - d). $f(x) = \sin(2x)$
 - e). $f(x) = \sin(2\pi x)$

Problema 3

Utilice las funciones propias encontradas en los problemas de Sturm-Liouville del ejercicio 1, para expandir las funciones $f(x, y)$ dadas más abajo, de tal manera que

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(y) y_n(x)$$

- i). Encuentre los coeficientes $C_n(y)$.
- ii). Compare gráficamente la función dada con los valores obtenidos de la expansión para el caso en que $a = 0$ y $b = 1$; use 1, 5, 20, 50, 100 y 200 términos. Considere las funciones
 - a). $f(x) = 1 + y$
 - b). $f(x) = y + x^2$
 - c). $f(x) = \sin(2xy)$
 - d). $f(x) = y^2 \sin(2\pi x)$

Problema 4

Demuestre que el problema homogéneo dado por la ecuación diferencial

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - \lambda^2 y = 0, \quad 0 < x < 1$$

Sujeta a las condiciones de frontera

$$y(0) = y(1) = 0$$

$$y'(0) = y'(1) = 0$$

da como resultado una función propia y_n . Encuentre la función propia, los valores propios y la condición de ortogonalidad.

Problema 5

Resuelva el siguiente problema de valor en la frontera

Ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \quad \text{en} \quad \begin{matrix} 0 \leq x \leq \ell \\ 0 \leq y \leq \ell \end{matrix} \quad (1)$$

Condiciones de frontera:

$$\text{En } x = 0, T = T_0 \quad (2)$$

$$\text{En } x = \ell, -k \frac{\partial T}{\partial x} = h(T - T_0) \quad (3)$$

$$\text{En } y = 0, T = T_2 \quad (4)$$

$$\text{En } y = \ell, T = T_1 \quad (5)$$

Problema 6

Resuelva el siguiente problema de valor en la frontera

Ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \text{ en } \begin{matrix} 0 \leq x \leq \ell \\ 0 \leq y \leq \ell \end{matrix} \quad (1)$$

Condiciones de frontera:

$$\text{En } x = 0, T = T_0 \quad (2)$$

$$\text{En } x = \ell, -k \frac{\partial T}{\partial x} = h(T - T_1) \quad (3)$$

$$\text{En } y = 0, T = T_2 \quad (4)$$

$$\text{En } y = \ell, T = T_1 \quad (5)$$

Problema 7

Resuelva el siguiente problema adimensional que describe la conducción de calor tridimensional

Ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} = 0, \text{ en } \begin{matrix} 0 \leq X \leq 1 \\ 0 \leq Y \leq R \\ 0 \leq Z \leq P \end{matrix} \quad (1)$$

Condiciones de frontera:

$$\text{En } X = 0, u = 0 \quad (2)$$

$$\text{En } X = 1, u = 0 \quad (3)$$

$$\text{En } Y = 0, u = \zeta_1 \quad (4)$$

$$\text{En } Y = R, u = \zeta_2 \quad (5)$$

$$\text{En } Z = 0, \frac{\partial u}{\partial Z} = 0 \quad (6)$$

$$\text{En } Z = P, \frac{\partial u}{\partial Z} = 0 \quad (7)$$

Defina claramente los valores propios, y evalúe las constantes de integración (No las deje expresadas en términos de integrales, evalúelas).

Problema 8

El siguiente problema de valor en la frontera es un modelo para una partícula catalítica con sección transversal cuadrada y reacción irreversible de primer orden. El módulo de Thiele se representa con ϕ .

Ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial Y^2} = \phi^2 C, \text{ en } \begin{matrix} 0 \leq X \leq 1 \\ 0 \leq Y \leq 1 \end{matrix} \quad (1)$$

Condiciones de frontera:

$$\text{En } X = 1, C = 1 \quad (2)$$

$$\text{En } X = 0, C = 1 \quad (3)$$

$$\text{En } Y = 1, C = 1 \quad (4)$$

$$\text{En } Y = 0, C = 1 \quad (5)$$

Resuelva el problema por el método de separación de variables.

Problema 9

Escriba programas en FORTRAN para evaluar las soluciones obtenidas para los problemas 5, 6, 7 y 8.

Problema 10

Resuelva el siguiente problema

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + X(1 - X) \quad (1)$$

$$\text{en } X = 0 \quad u = 0 \quad (2)$$

$$\text{en } X = 1 \quad u = 1 \quad (3)$$

$$\text{cuando } \tau = 0 \quad u = 0 \quad (4)$$

Obtenga expresiones explícitas para los coeficientes en las expansiones.

Problema 11

Resuelva el problema anterior, pero reemplazando la condición de frontera dada por la ec. (2) de tal manera que se tenga

$$\text{en } X = 0 \quad u = \frac{\tau}{1 + \tau} \quad (2)$$

Problema 12

Resuelva el siguiente problema

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \quad (1)$$

$$\text{en } X = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial X} = 0 \quad (2)$$

$$\text{en } X = 1 \quad u = 0 \quad (3)$$

$$\text{en } Y = 0 \quad u = 1 \quad (4)$$

$$\text{en } Y = 1 \quad u = 0 \quad (5)$$

$$\text{cuando } \tau = 0 \quad u = 0 \quad (6)$$

Obtenga expresiones explícitas para los coeficientes en las expansiones.

Problema 13

Resuelva el problema definido por las mismas condiciones de frontera e inicial del anterior, pero ahora con la ecuación diferencial no homogénea

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + X(1 - X) + Y(1 - Y) \quad (1)$$

Problema 14

Resuelva el siguiente problema

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} \quad (1)$$

Sujeto a las siguientes condiciones de frontera

$$\text{En } X = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial X} = Bi(u - 1) \quad (2)$$

$$\text{En } X = 1 \quad -\frac{\partial u}{\partial X} = Bi u \quad (3)$$

y a la condición inicial

$$\text{cuando } \tau = 0 \quad u = 1 \quad (4)$$

Problema 15

Resuelva el siguiente problema

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} \quad (1)$$

$$\text{En } X = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial X} = Bi_0 (u - \phi_1(\tau)) \quad (2)$$

$$\text{En } X = 1 \quad -\frac{\partial u}{\partial X} = Bi_1 (u - \phi_2(\tau)) \quad (3)$$

Note que el problema toma la forma del problema del texto bajo ciertas condiciones ¿cuáles?

Problema 16

Escriba programas en FORTRAN para evaluar las soluciones obtenidas para los problemas 10 a 15.

Problema 17

Este problema está relacionado con la predicción de la distribución de la onda de presión que se genera en el líquido de densidad ρ que circula por un tubo de sección uniforme y que se encuentra antes de la válvula que súbitamente se cierra. Un modelo que describe el frente de presión $p(x, t)$ que viaja a la velocidad c en una sección de tubo $x \in [0, L]$ está dado por la siguiente ecuación diferencial de onda (Ref Jenson and Jeffreys pag. 562)

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad \begin{array}{l} 0 < x < L \\ t \geq 0 \end{array}$$

Sujeta a las condiciones de frontera e inicial siguientes

$$\text{En } x = 0 \quad p = p_0, \quad \text{para } t \geq 0$$

$$\text{En } x = L \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \text{para } t \geq 0$$

$$\text{Cuando } t = 0 \quad p = p_0, \quad \text{para } 0 \leq x \leq L$$

$$\text{Cuando } t = L/c \quad \frac{\partial p}{\partial t} = 0, \quad \text{para } 0 \leq x \leq L$$

Utilizando el método de separación de variables encuentre la distribución de la onda de presión. Dé una explicación física de las condiciones de frontera y temporales.

Problema 18

Con el propósito de explorar los alcances del método de expansión por series, resuelva por ese método los siguiente problemas

$$a) \quad \frac{d^2 y}{d x^2} - \Phi^2 y = 0$$

Sujeta a las siguientes condiciones de frontera

$$\text{En } x = 0 \quad y = y_0$$

$$\text{En } x = 1 \quad y = y_1$$

$$b) \quad \frac{d^2 y}{d x^2} - \Phi^2 y = G(x)$$

Sujeta a las siguientes condiciones de frontera

$$\text{En } x = 0 \quad y = y_0$$

$$\text{En } x = 1 \quad \frac{d y}{d x} = q$$

En estos problemas Φ^2 , y_0 , y_1 y q representan constantes.

Problema 19

Con el método de expansión en series, resuelva el problema dado por

Ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} = 0, \text{ en } \begin{matrix} 0 \leq X \leq 1 \\ 0 \leq Y \leq 1 \end{matrix} \quad (1)$$

Condiciones de frontera:

$$\text{En } X = 0, U = 0 \quad (2)$$

$$\text{En } X = 1, -\frac{\partial U}{\partial X} = Bi U \quad (3)$$

$$\text{En } y = 0, U = \zeta \quad (4)$$

$$\text{En } Y = 1, U = 1 \quad (5)$$

Problema 20

Con el método de expansión en series, resuelva el problema dado por

Ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} = 0, \text{ en } \begin{matrix} 0 \leq X \leq 1 \\ 0 \leq Y \leq 1 \end{matrix} \quad (1)$$

Condiciones de frontera:

$$\text{En } X = 0, U = 1 \quad (2)$$

$$\text{En } X = 1, U = 0 \quad (3)$$

$$\text{En } Y = 0, U = 1 \quad (4)$$

$$\text{En } Y = 1, U = 0 \quad (5)$$

Problema 21

Resuelve el siguiente problema de conducción de calor

Ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = 0 \quad \text{para} \quad \begin{array}{l} 0 \leq X \leq 1 \\ 0 \leq Y \leq r \end{array}$$

Condiciones de frontera

$$\text{En } X = 0 \quad u = 0, \quad \text{para } 0 \leq Y \leq r$$

$$\text{En } X = 1 \quad u = 1, \quad \text{para } 0 \leq Y \leq r$$

$$\text{En } Y = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial Y} = N_{Bi} (u - H_1(X)), \quad \text{para } 0 \leq X \leq 1$$

$$\text{En } Y = r \quad -\frac{\partial u}{\partial Y} = N_{Bi} (u - H_2(X)), \quad \text{para } 0 \leq X \leq 1$$

Problema 22

Resuelve el siguiente problema de conducción de calor con una fuente de generación uniforme y constante S . (Sugiero usar las ideas mostradas en la solución del estado estacionario del ejemplo en la página 142)

Ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = S \quad \text{para} \quad \begin{array}{l} 0 \leq X \leq 1 \\ 0 \leq Y \leq r \end{array}$$

Condiciones de frontera

$$\text{En } X = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial X} = N_{Bi} (u - G_1(Y)), \quad \text{para } 0 \leq Y \leq r$$

$$\text{En } X = 1 \quad -\frac{\partial u}{\partial X} = N_{Bi} (u - G_2(Y)), \quad \text{para } 0 \leq Y \leq r$$

$$\text{En } Y = 0 \quad u = 0, \quad \text{para } 0 \leq X \leq 1$$

$$\text{En } Y = r \quad u = 1, \quad \text{para } 0 \leq X \leq 1$$

Problema 23

Resuelve el siguiente problema que describe el movimiento desde el reposo de un fluido Newtoniano en un conducto rectangular de sección $H \times W$ en donde se desprecian los efectos en la dirección y , ya que $W \gg H$

Ecuación diferencial adimensional

$$\frac{\partial U_z}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 U_z}{\partial X^2} + \phi \quad \text{para } -1 \leq X \leq +1 \quad (1)$$

Condiciones de frontera

$$\text{En } X = \pm 1 \quad U_z = \sin(\omega\tau), \quad \text{para } \tau \geq 0 \quad (2)$$

$$\text{Cuando } \tau = 0 \quad U_z = 0, \quad \text{para } -1 \leq X \leq +1 \quad (3)$$

Se ha usado

$$X = \frac{x}{\frac{1}{2}H} \quad U_z = \frac{u_z}{\langle u_z^{ss} \rangle}$$

En donde $\langle u_z^{ss} \rangle$ es la velocidad promedio al estado estacionario cuando las paredes en $X = \pm 1$ se mantienen inmóviles y ω es una constante que indica que tan rápido oscilan las paredes superior e inferior.

En la ecuación diferencial ϕ es el término de caída de presión adimensional, y permanece constante.

Problema 24

Resuelve el problema dado por la ecuación diferencial siguiente

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \quad \text{para } 0 \leq y \leq H \quad (1)$$

Y sujeta a las condiciones de frontera

$$\text{En } y = 0 \quad u_z = V[1 - \exp(-\alpha t)], \quad \text{para } t \geq 0 \quad (2)$$

$$\text{En } y = H \quad u_z = 0, \quad \text{para } t \geq 0 \quad (3)$$

$$\text{Cuando } \tau = 0 \quad u_z = 0, \quad \text{para } 0 \leq Y \leq H \quad (4)$$

Antes de proceder a la solución escribe la versión adimensional usando las variables

$$Y = \frac{y}{H} \quad U = \frac{u_z}{V} \quad \tau = ?$$

Las ecuaciones (1)-(4) describen el movimiento, desde el reposo, de un fluido Newtoniano entre dos placas paralelas separadas una distancia H . El movimiento del fluido se debe a que mientras la placa inferior se mantiene en reposo la placa superior se mueve a partir del instante $t = 0$ hasta alcanzar la velocidad constante V de acuerdo a la expresión mostrada

arriba. Se recuerda que la densidad ρ , la viscosidad μ y α son constantes. ¿Qué unidades debe tener α para que haya consistencia dimensional?

Problema 25

Utilice el método de separación de variables o alguna de sus variaciones para resolver el problema dado por la ecuación diferencial de cuarto orden

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial X^4} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial Y^4} = -\omega(X, Y) \quad \text{para} \quad \begin{matrix} 0 < X < 1 \\ 0 < Y < 1 \end{matrix} \quad (1)$$

Y que está sujeta a las condiciones de frontera

$$\psi(0, Y) = 0, \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial X} \right|_{X=0} = 0, \quad 0 \leq Y < 1 \quad (2)$$

$$\psi(1, Y) = 0, \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial X} \right|_{X=1} = 0, \quad 0 \leq Y < 1 \quad (3)$$

$$\psi(X, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial Y} \right|_{Y=0} = 0, \quad 0 \leq X < 1 \quad (4)$$

$$\psi(X, 1) = 0, \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial Y} \right|_{Y=1} = 0, \quad 0 \leq X < 1 \quad (5)$$

Considere inicialmente que $\omega(X, Y)$ puede ser cualquier función, y después obtenga las constantes en la expansión en series para el caso en que $\omega(X, Y) = X^2 + Y^2$.

Problema 26

El problema general de difusión con una fuente no homogénea está definido por la ecuación diferencial parabólica

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \nabla^2 U - \Phi(\mathbf{r}, \tau) \quad \text{en } \Omega$$

sujeta a las condiciones de frontera

$$\text{En } \Gamma \quad -\mathbf{n} \cdot \nabla U = Bi [U - U_\infty(\mathbf{r}, \tau)]$$

e inicial

$$\text{Cuando } \tau = 0 \quad U = F(\mathbf{r})$$

En donde el número de Biot, Bi es constante y $\Phi(\mathbf{r}, \tau)$, $U_\infty(\mathbf{r}, \tau)$ y $F(\mathbf{r})$ son funciones arbitrarias conocidas.

a) Escriba la forma que toma el problema en una región de dimensiones $1 \times b \times c$.

- b) Resuelva el problema usando expansión en series de funciones ortogonales. No desarrolle los detalles, solo resuelva el problema en forma simbólica definiendo los problemas de Sturm-Liouville involucrados.
- c) Encuentre todos los detalles posibles de la solución.

Problema 27

En algunas ocasiones el flux difusivo de masa o energía no es correctamente representado por la ley de Fick o Fourier y entonces debe incluirse un término de retraso con un tiempo de relajación t_r , como hace la ecuación de Cattaneo para el transporte difusivo de la sustancia A

$$t_r \frac{\partial \mathbf{J}_A}{\partial t} + \mathbf{J}_A = -D_A \nabla C_A$$

Esta junto con la ecuación de conservación apropiada de la sustancia A nos dará la ecuación diferencial que gobierna la concentración de A , C_A . Cuando no hay reacción química homogénea la ecuación de conservación es

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_A$$

- a) Demuestre que para el caso unidimensional la ecuación de conservación toma la forma

$$t_r \frac{\partial^2 C_A}{\partial t^2} + \frac{\partial C_A}{\partial t} = D_A \frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2}$$

- b) Resuelva el problema por separación de variables o alguna de sus variaciones sujeta a las siguientes condiciones de frontera e iniciales

$$\text{En } x = 0 \quad \frac{\partial C_A}{\partial x} = 0$$

$$\text{En } x = \ell \quad C_A = C_{A0}$$

$$\text{Cuando } t = 0 \quad C_A = 0$$

$$\text{Cuando } t = 0 \quad \frac{\partial C_A}{\partial t} = 0$$

- c) Compare los resultados con los obtenidos para difusión puramente Fickiana.

Problema 28

Resuelva el problema anterior reemplazando la condición de frontera en $x = \ell$ por

$$\text{a) En } x = \ell \quad C_A = C_{A0}(t)$$

b) Cuando $t = 0$ $C_A = F(x)$

Problema 29

Considere una situación similar a la descrita en el problema 27, pero ahora debe incluirse la existencia de reacción química homogénea de tal manera que la ecuación de conservación es

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_A - k C_A$$

a) Demuestre que para el caso unidimensional la ecuación de conservación toma la forma

$$t_r \frac{\partial^2 C_A}{\partial t^2} + (t_r + 1) \frac{\partial C_A}{\partial t} = D_A \frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} - k C_A$$

b) Resuelva el problema por separación de variables o alguna de sus variaciones sujeta a las condiciones de frontera e iniciales dadas en el problema 27.

c) Compare los resultados con los obtenidos para difusión y reacción puramente Fickiana.

Problema 30

Deseamos considerar el caso en que la ecuación gobernante es la de difusión pasiva

$$t_r \frac{\partial^2 C_A}{\partial t^2} + \frac{\partial C_A}{\partial t} = D_A \frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2}$$

Las condiciones de frontera en inicial son casi las mismas que las dadas en el problema 27. pero en este caso en $x = 0$, la condición de no flujo es reemplazada por la correspondiente a una reacción heterogénea de primer orden dada por

$$\text{En } x = 0 \quad -\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}_A = k_s C_A$$

a) Demuestre que para este caso la condición de frontera anterior toma la forma siguiente

$$\text{En } x = 0 \quad D_A \frac{\partial C_A}{\partial x} = t_r k_s \frac{\partial C_A}{\partial t} + k_s C_A$$

b) Resuelva el problema por separación de variables o alguna de sus variaciones.

Problema 31

Resuelva el problema 27 reemplazando la condición de frontera en $x = \ell$, por la mostrada a continuación

$$\text{En } x = \ell \quad -\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}_A = k (C_A - C_{A\infty})$$

En donde $C_{A\infty}$ y k son constantes conocidas.

Problema 31

Este problema ilustra que los conceptos de problema de Sturm-Liouville, función propia, valores propios y ortogonalidad no están restringidos a problemas en dominios con coeficientes constantes. En el problema siguiente se considera la difusión en un sistema de capa dos capas con propiedades de transporte diferente. El problema está definido por las dos siguientes ecuaciones diferenciales

$$\frac{\partial U_{(1)}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 U_{(1)}}{\partial X^2}, \quad \text{for } 0 < X < X_1 \quad (1)$$

$$\frac{\partial U_{(2)}}{\partial \tau} = \gamma_{(2)} \frac{\partial^2 U_{(2)}}{\partial X^2}, \quad \text{for } X_1 < X < 1 \quad (2)$$

Sujetas a las condiciones de frontera:

$$\text{En } X = 0 \quad + \frac{\partial U_{(1)}}{\partial X} = \alpha_o (U_{(1)} - U_{(1)\infty}), \quad \text{para } \tau > 0 \quad (3)$$

$$\text{En } X = 1 \quad - \frac{\partial U_{(2)}}{\partial X} = \alpha_N (U_{(2)} - U_{(2)\infty}), \quad \text{para } \tau > 0 \quad (4)$$

$$\text{En } X = X_1 \quad U_{(1)} = U_{(2)}, \quad \text{para } \tau > 0 \quad (5)$$

$$\text{En } X = X_1 \quad - \frac{\partial U_{(1)}}{\partial X} = -\beta_1 \frac{\partial U_{(2)}}{\partial X}, \quad \text{para } \tau > 0 \quad (6)$$

Y a las condiciones iniciales:

Cuando $\tau = 0$

$$U_{(1)} = F_{(1)}(X) \quad \text{para } 0 < X < X_1 \quad (7)$$

$$U_{(2)} = F_{(2)}(X) \quad \text{para } X_1 < X < 1 \quad (8)$$

Se desea encontrar los perfiles de concentración $U_{(1)}(X, \tau)$ y $U_{(2)}(X, \tau)$. Nótese que $\gamma_{(2)}$, α_o , α_N y β_1 son constantes. La solución debe consierar los dos casos siguientes:

a) Las temperaturas $U_{(1)\infty}$ y $U_{(2)\infty}$ permanecen constantes.

b) Las temperaturas $U_{(1)\infty}$ y $U_{(2)\infty}$ son funciones arbitrarias del tiempo.

La solución del problema debe incluir la justificación del modelo a partir de las ecuaciones dimensionales. Además deben identificarse claramente el problema de Sturm-Liouville, las funciones propias, los valores propios y la condición de ortogonalidad. El problema ha sido resuleto en detalle y está reportado en los dos trabajos siguientes Sales Cruz et al (2001) y Sales Cruz(2001).

IV. Solución de ecuaciones diferenciales en coordenadas cilíndricas y esféricas

0. Algunos comentarios sobre el material incluido en este capítulo

En este capítulo se extiende el uso del método de separación de variables a la solución de problemas con ecuaciones diferenciales parciales en sistemas de coordenadas cilíndricas y a problemas representados en sistemas de coordenadas esféricas. Para los problemas en coordenadas cilíndricas y algunos en esféricas es entonces necesario resolver la ecuación diferencial de Bessel y esto nos lleva a la revisión del método de Frobenius para la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden con coeficientes variables.

Es necesario y revisar también las propiedades de las funciones de Bessel, esto implica identidades, fórmulas de derivación e integración. Se revisan además la solución de algunos problemas de difusión en geometrías cilíndricas. Por su directa relación a algunos problemas en coordenadas esféricas se reporta la solución de una ecuación diferencial de segundo orden cuya solución contiene funciones Bessel.

Finalmente se utiliza el método de Frobenius para resolver la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas en donde la solución depende de las tres coordenadas. Esto llevará al estudio de los polinomios de Legendre.

Se insistirá a lo largo de los ejemplos presentados que las bases de la solución de los problemas en estos sistemas de coordenadas ya fueron revisadas en el Capítulo III y que en realidad lo único novedoso es el tener que recurrir a las nuevas presentaciones de problemas de Sturm-Liouville, en particular el que contiene funciones de Bessel y en el que se generan polinomios de Legendre.

Se sugieren más de 40 problemas, algunos de ellos son muy laboriosos, pero debería al menos explorarse la aplicación de los conceptos presentados para la solución de ellos. Trabajando en la solución los problemas 37 a 40 se podrá revisar un método aproximado para la solución de problemas de difusión y reacción con cinéticas no lineales.

Sobre las referencias

El estudio del método de solución de los problemas presentados en este capítulo puede ser profundizado en los textos de Arfken [1], Greenberg [4] y Hildebrand [5]. Si se desea conocer más sobre el comportamiento de las funciones Bessel y los polinomios de Legendre un texto recomendable es el de Levedev [7].

1. El método de Frobenius para la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden con coeficientes variables.

Las funciones Bessel surgen generalmente en la solución de problemas de valor en la frontera en coordenadas cilíndricas, mientras que en algunos casos en coordenadas esféricas se encuentran polinomios de Legendre. Estos dos tipos de funciones se generan en la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias por expansión en series, esta forma de solución se conoce como método de Frobenius. La ecuación diferencial lineal de segundo orden es

$$y'' + P(x) y' + Q(x) y = 0 \quad (1.1)$$

La ecuación es homogénea y ordinaria, y se buscarán para ella soluciones de la siguiente forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (x-a)^n (x-a)^r \quad (1.2)$$

en donde n y r son constantes. Cuando $r = 0$, la ec. (1.2) es la expansión de $y(x)$ en series de Taylor

$$y(x) = y(a) + y'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} y''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!} y'''(a)(x-a)^3 + \dots \quad (1.3)$$

El análisis depende en gran parte del comportamiento que tengan $P(x)$ y $Q(x)$ en la vecindad del punto que se usará para hacer la expansión en series. En otras palabras es necesario determinar en qué puntos la solución es válida, para ello debemos considerar lo siguiente:

- a) Se dice que las funciones son analíticas en $x = a$, si $P(x)$ y $Q(x)$ se pueden expandir en series de Taylor en este punto. Si esto es cierto $x = a$ es un punto ordinario, de otra manera es un punto singular. Cuando $P(x)$ y $Q(x)$ son una relación de polinomios, los puntos singulares son las raíces del denominador.
- b) Si en $x = a$ hay un punto singular pero $(x-a)P(x)$ y $(x-a)^2 Q(x)$ son analíticas, entonces $x = a$ es un punto singular regular. Si un punto singular no es regular, se dice que es irregular.

Para proceder con el desarrollo del método de Frobenius es importante tener presentes las siguientes consideraciones:

1. Si $x = a$ es un punto ordinario entonces, la solución de (1.1) es analítica así que

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (x-a)^n \quad (1.4)$$

es adecuada.

2. En un punto singular, existe al menos una solución de la forma

$$y(x) = (x-a)^r \sum_{n=0}^{\infty} A_n (x-a)^n \quad (1.5)$$

en donde r es una constante.

3. En un punto singular irregular no existen soluciones en términos de potencias de $(x-a)$.

Se desea encontrar soluciones expandidas alrededor de los puntos singulares, no en ellos, de esta forma la función podrá ser evaluada alrededor de las singularidades. Si $x=a$ es un punto singular regular es conveniente trasladar ahí el origen de un nuevo sistema de coordenadas de tal forma que la singularidad se encontrará en $x=0$. Si este es el caso $x P(x)$ y $x^2 Q(x)$ son analíticas y pueden expandirse en series de Taylor alrededor de $x=0$, o sea

$$x P(x) = B_1 + B_2 x + B_3 x^2 + \dots \quad (1.6)$$

$$x^2 Q(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots \quad (1.7)$$

La ecuación (1.1) se puede escribir como

$$x^2 y'' + x^2 P(x) y' + x^2 Q(x) y = 0 \quad (1.8)$$

Ahora considérese una solución de la forma

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \quad (1.9)$$

Cuyas derivadas son

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (n+r) x^{n+r-1} \quad (1.10)$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2} \quad (1.11)$$

La substitución de (1.9 a (1.11) en (1.8) da

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=0}^{\infty} A_n (n+r) (B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \dots) x^{n+r} \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} A_n (C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots) x^{n+r} = 0
\end{aligned} \tag{1.12}$$

que puede reescribirse como

$$\begin{aligned}
& \{A_0 r(r-1) + A_0 r B_0 + A_0 C_0\} x^r + \\
& \{[A_1 r(r+1) + A_1(r+1) B_0 + A_1 C_0] + A_0 r B_1 + A_0 C_1\} x^{r+1} + \\
& \{[A_2(r+2)(r+1) + A_2(r+2) B_0 + A_2 C_0] \\
& \quad [A_1(r+1) B_1 + A_1 C_1] + [A_0 r B_2 + A_0 C_2]\} x^{r+2} + \dots = 0
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Como x^r , es linealmente independiente del resto de las otras potencias de x los coeficientes en la anterior sumatoria deben satisfacer las siguientes expresiones

$$A_0 [r(r-1) + r B_0 + C_0] = 0 \tag{1.14}$$

$$A_1 [r(r+1) + (r+1) B_0 + C_0] + A_0 [r B_1 + C_1] = 0 \tag{1.15}$$

$$\begin{aligned}
& A_2 [(r+2)(r+1) + (r+2) B_0 + C_0] \\
& + A_1 [(r+1) B_1 + C_1] + A_0 [r B_2 + C_2] = 0
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Nótese que $A_0 \neq 0$, porque de otra forma $A_1, A_2, \dots = 0$, así que

$$r(r-1) + r B_0 + C_0 = 0 \tag{1.17}$$

Esta es la ecuación indicial, sus raíces son los exponentes que se usarán en la solución en series para la ecuación diferencial ordinaria. Hay una solución para cada raíz r_1 y r_2 . El resto de las ecuaciones relacionan A_1 a A_0 , A_2 a A_0 , etc., estas se llaman fórmulas de recurrencia.

Si $r_1 = r_2$, se obtiene solo una de las soluciones.

si $r_1 - r_2 \neq$ entero, se obtienen dos soluciones $y_1(x)$ y $y_2(x)$.

si $r_1 - r_2 =$ entero, la raíz más grande dará una solución y la raíz pequeña "puede" dar otra solución.

Si se escribe la ecuación indicial como

$$f(r) = r(r-1) + r B_0 + C_0 = 0 \tag{1.18}$$

Entonces las fórmulas de recurrencia son

$$A_1 f(r+1) = -A_0 g_0$$

$$A_2 f(r+2) = -A_1 g_1 - A_0 g_2$$

Nótese que si k es un entero puede obtenerse $f(r+k) = 0$, y entonces A_k no podrá ser evaluada. Esto lo veremos en detalle a continuación

Análisis de cuantas soluciones son posibles una vez encontradas r_1 y r_2 .

Escribiendo

$$f(r) = r(r-1) + r B_0 + C_0 = 0$$

ó en términos de r_1 y r_2 que son las raíces de $f(r)$

$$f(r) = (r-r_1)(r-r_2)$$

Por lo tanto

$$f(r+k) = (r+k-r_1)(r+k-r_2)$$

y

$$f(r_1+k) = k(k+r_1-r_2)$$

$$f(r_2+k) = k(k+r_2-r_1)$$

Si $r_1 - r_2 > 0$ la función $f(r_2+k) = 0$ cuando $k = -(r_2 - r_1)$. Por lo tanto cuando $r_1 - r_2 = k$ (entero positivo solo la solución correspondiente a la raíz mayor r_1 está garantizada. Sin embargo, una vez la raíz r_1 se ha encontrado es posible obtener la segunda solución por el método de variación de parámetros. Un ejemplo es la solución de la ecuación de Bessel que se revisará a continuación.

En esta sección hemos delineado el desarrollo del método de Frobenius para una ecuación general en donde $x P(x)$ y $x^2 Q(x)$ pueden ser expandidos en series de Taylor. Debe quedar claro que la solución depende de la forma que tengan los coeficientes de tales términos. Esto lo veremos claramente en la siguiente sección al tratar el caso de la ecuación diferencial de Bessel. Debemos puntualizar que aunque el método de Frobenius pueda no ser necesario, también dará los resultados conocidos para ecuaciones tales como

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + \lambda^2 y_1 = 0$$

y

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} - \lambda^2 y_2 = 0$$

Se sugiere proceder a encontrar la solución de ambas ecuaciones utilizando el método de Frobenius para demostrar que

$$y_1(x) = A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x)$$

$$y_2(x) = A' \sinh(\lambda x) + B' \cosh(\lambda x)$$

2. La ecuación de Bessel

Considérese la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad (2.1)$$

Cuando se resuelve por separación de variables se propone

$$u = F(\xi) G(Z) \Theta(\theta) \quad (2.2)$$

Con la substitución de la ec. (2.1) en la (2.2) se encuentra

$$\frac{1}{F} \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{dF}{d\xi} \right) + \frac{1}{\xi^2} \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = -\frac{1}{G} \frac{d^2 G}{dZ^2} = -\lambda^2 \quad (2.3)$$

y posteriormente

$$\frac{1}{F} \xi \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{dF}{d\xi} \right) + \lambda^2 \xi^2 = -\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = \nu^2 \quad (2.4)$$

De esta se obtiene

$$\xi \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{dF}{d\xi} \right) + (\lambda^2 \xi^2 - \nu^2) F = 0 \quad (2.5)$$

ó

$$\xi^2 \frac{d^2 F}{d\xi^2} + \xi \frac{dF}{d\xi} + (\lambda^2 \xi^2 - \nu^2) F = 0 \quad (2.6)$$

Utilizando la nomenclatura $F = y(x)$ y $\xi = x$, la ec. (2.6) toma la forma

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (\lambda^2 x^2 - \nu^2) y(x) = 0 \quad (2.6)$$

Ahora se introduce el cambio de variable

$$t = \lambda x \quad (2.7)$$

y con ella la ec. (2.6) toma la forma siguiente

$$t^2 y''(t) + t y'(t) + (t^2 - \nu^2) y(t) = 0 \quad (2.8)$$

Esta se denomina la ecuación de Bessel de orden ν , y sus soluciones se conocen como funciones Bessel, también de orden ν . Para encontrarlas por el método de Frobenius, la ec. (2.8) se rearregla a la forma

$$y''(t) + \frac{1}{t} y'(t) + \frac{t^2 - \nu^2}{t^2} y(t) = 0 \quad (2.9)$$

Aquí podemos identificar

$$P(t) = \frac{1}{t} \quad Q(t) = \frac{t^2 - \nu^2}{t^2} \quad (2.10)$$

Nótese que $t = 0$ es un punto singular. Sin embargo

$$t P(t) = 1 \quad (2.11)$$

$$y \quad t^2 Q(t) = t^2 - \nu^2 \quad (2.12)$$

son analíticas, por lo tanto $t = 0$ es un punto singular regular. Por ello se puede utilizar el método de Frobenius para resolver la ec. (2.9). Se propone

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r} \quad (2.13)$$

De esta se pueden obtener las derivadas

$$y'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n t^{n+r-1} \quad (2.14)$$

$$y''(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n t^{n+r-2} \quad (2.15)$$

La substitución de las ecs. (2.13)-(2.15) en la ec. (2.9) da:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n t^{n+r} \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n t^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r+2} - \nu^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r} = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

El cambio de índice dado por $n = p + 2$ transforma la ec. (2.16) a

$$\sum_{p=-2}^{\infty} a_{p+2} \left[(p+r+2)(p+r+1) + (p+r+2) - \nu^2 \right] t^{p+r+2} + \sum_{p=0}^{\infty} a_p t^{p+r+2} = 0 \quad (2.17)$$

Esta puede escribirse ahora como

$$\begin{aligned} & a_0 \left[r(r-1) + r - \nu^2 \right] t^r + a_1 \left[(r+1)r + (r+1) - \nu^2 \right] t^{r+1} \\ & + \sum_{p=0}^{\infty} \left\{ a_{p+2} \left[(p+r+2)^2 - \nu^2 \right] + a_p \right\} t^{p+r+2} = 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Igualando el primer coeficiente a cero se encuentra

$$r^2 - \nu^2 = 0 \quad (2.19)$$

que es conocida como la ecuación indicial. Las dos raíces de ella son $r_1 = \nu$ y $r_2 = -\nu$. Por lo tanto, como se analizó en la sección anterior, si ν es entero, ó divisible entre dos se pueden esperar problemas para encontrar una segunda solución de la forma de la ec. (2.13) porque $r_1 - r_2 = 2\nu$. También si $\nu = 0$ se encontrará solo una solución por este método.

Pero de cualquier manera se tiene la raíz $r_1 = \nu$ que es la mayor y permitirá encontrar una de las soluciones.

Así que tomando $r_1 = \nu$ y substituyéndola en el segundo término de la ec. (2.18) se obtiene

$$a_1[(r+1)^2 - \nu^2] = 0$$

$$a_1[2\nu+1] = 0$$

$$y \quad a_{p+2}[(p+r+2)^2 - \nu^2] + a_p = 0 \quad (2.20)$$

que es válida para cualquier valor de ν , y por lo tanto $a_1 = 0$. A continuación se encuentra desde la ec. (2.20) y haciendo $r = \nu$

$$a_{p+2} = -\frac{a_p}{(p+r+2)^2 - \nu^2}, \quad p \geq 0 \quad (2.21)$$

o usando $n = p + 2$

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+2)^2 - \nu^2} = -\frac{a_{n-2}}{n^2 + 2n\nu} = -\frac{a_{n-2}}{n(n+2\nu)} \quad (2.22)$$

Ahora usando esta ecuación se obtiene

$$a_2 = -\frac{a_0}{2(2+2\nu)}$$

$$a_3 = 0$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{4(4+2\nu)} = \frac{a_0}{2 \cdot 4(2+2\nu)(4+2\nu)} = \frac{a_0}{2^4 \cdot 2(1+\nu)(2+\nu)}$$

$$a_5 = 0$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{6(6+2\nu)} = -\frac{a_0}{2^6 \cdot 6(1+\nu)(2+\nu)(3+\nu)}$$

$$a_7 = 0$$

$$a_8 = -\frac{a_6}{8(8+2\nu)} = \frac{a_0}{2^8 \cdot 24(1+\nu)(2+\nu)(3+\nu)(4+\nu)}$$

.

.

.

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} \cdot (m!)(\nu+m)(\nu+m-1)\dots(\nu+1)} \quad (2.23)$$

Nótese que todos los coeficientes con subíndice non son cero, esto porque $a_1 = 0$.

Así que una de las soluciones es

$$y_1(t) = a_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m t^{\nu+2m}}{2^{2m} (m!)(\nu+m)(\nu+m-1)\dots(\nu+1)} \quad (2.24)$$

Además

$$(\nu + m)! = (\nu + m)(\nu + m - 1) \dots (\nu + 1)\nu! \quad (2.25)$$

y por lo tanto la ec. (2.24) es

$$y_1(t) = a_0 2^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \nu!}{m!(\nu + m)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{\nu+2m} \quad (2.26)$$

Para propósitos de tabulación $2^\nu \nu!$ se incorpora en la constante a_0 y entonces la sumatoria se denomina $J_\nu(t)$ que es la función Bessel de primera clase de orden ν :

$$J_\nu(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(\nu + m)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{\nu+2m} \quad (2.27)$$

Estas funciones son finitas, y de naturaleza oscilatoria con amortiguamiento. Estas características se muestran para las funciones $J_0(x)$, $J_1(x)$ y $J_2(x)$ en la figura siguiente:

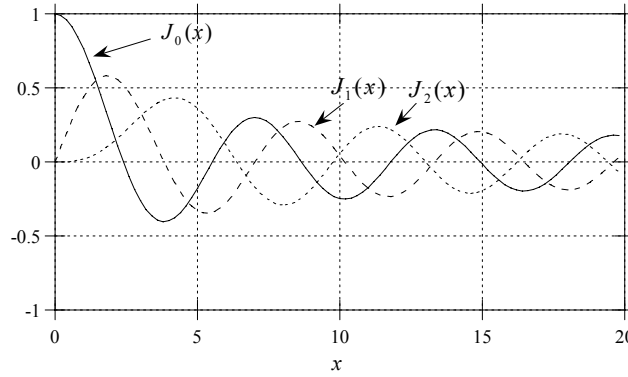


Figura 1. Funciones de Bessel de primera clase de cero, primer y segundo orden.

El problema ahora es encontrar la segunda solución para la ec. (2.9). Con este objetivo hacemos ahora $\nu = -\nu$ en la fórmula de recurrencia dada por ec. (2.22)

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n-2\nu)}, \quad n \geq 2 \quad (2.28)$$

Ahora usando esta ecuación se obtiene

$$a_2 = -\frac{a_0}{2(2-2\nu)}, \quad \text{problema si } \nu=1 \quad (2.29)$$

$$a_3 = -\frac{a_1}{3(3-2\nu)} = 0, \text{ porque } a_1 = 0 \quad (2.30)$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{4(4-2\nu)}, \text{ problema si } \nu=2 \quad (2.31)$$

$$a_5 = 0 \quad (2.32)$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{6(6+2\nu)}, \text{ problema si } \nu=3 \quad (2.33)$$

Por lo tanto no hay soluciones de la forma (2.13) si $r = -\text{entero}$. Pero las hay si $r = -\text{fracción}$; por ejemplo $\nu = 1/2, 3/2, 5/2$ etc.

Las ecuaciones (2.29) a (2.33) implican

$$a_2 = -\frac{a_0}{2(1-\nu)},$$

$$a_4 = \frac{a_0}{2^4 \cdot 2(1-\nu)(2-\nu)}$$

$$a_6 = -\frac{a_0}{2^6 \cdot 6(1-\nu)(2-\nu)(3-\nu)}$$

$$a_8 = \frac{a_0}{2^8 \cdot 24(1-\nu)(2-\nu)(3-\nu)(4-\nu)}$$

Entonces la solución es

$$J_{-\nu}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m-\nu)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m-\nu} \quad (2.34)$$

Y nótese que no es finita cuando $t \rightarrow 0$. Esta ecuación se pudo haber obtenido directamente desde la ec. (2.27) reemplazando ν por $-\nu$.

De las ecuaciones (2.27) y ((2.36) se puede demostrar que

$$J_{1/2}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \sin(t) \quad (2.35)$$

$$J_{-1/2}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos(t) \quad (2.36)$$

Nótese que debido a (2.34) la ec. (2.36) no está definida en $t = 0$. Con mucho más esfuerzo se puede generalizar que

$$J_{n+1/2}(t) = \frac{2n+1}{t} J_{n-1/2}(t) - J_{n-3/2}(t) \quad (2.37)$$

Esta última es útil para, usando las ecs. (2.35) y (2.36), encontrar las funciones Bessel de orden $\nu = 3/2, 5/2, 7/2, \dots$ etc. Se puede pensar que $J_\nu(t)$ y $J_{-\nu}(t)$ son lo análogos a $\sin(t)$ y $\cos(t)$ para el caso de coordenadas cilíndricas. Las $J_\nu(t)$ son funciones oscilatorias y finitas en $t = 0$ (Como se mostró en la Figura 1 y se muestra en la Figura 2a). Las $J_{-\nu}(t)$, cuando existen, son también oscilatorias pero no están definidas en $t = 0$ (Figura 2b). Las Figuras 1 y 2 muestran, que cuando el argumento crece la amplitud de todas las funciones Bessel $J_\nu(t)$ se amortigua y tiende a cero en el caso de orden fraccionario.

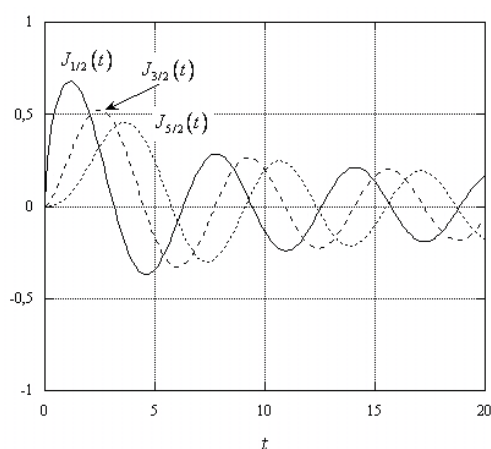


Figura 2a. Funciones de Bessel de primera clase de orden $J_{1/2}(t)$, $J_{3/2}(t)$, $J_{5/2}(t)$.

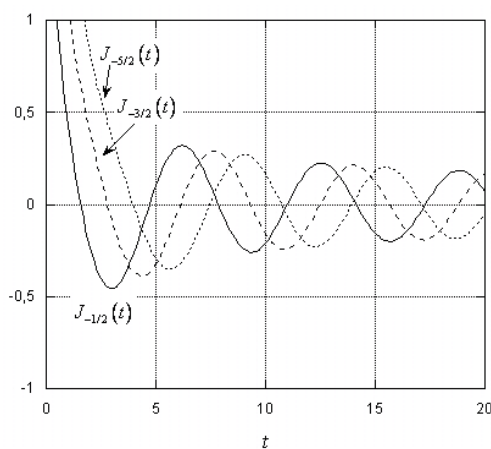


Figura 2b. Funciones de Bessel de primera clase de orden $J_{-1/2}(t)$, $J_{-3/2}(t)$ y $J_{-5/2}(t)$.

3. Solución de la ecuación de Bessel para el caso en que $r_1 = r_2 = 0$ ó $r_2 = -\text{entero}$.

En la sección anterior se encontró para la ecuación

$$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + t \frac{dy}{dt} + (t^2 - \nu^2) y = 0 \quad (3.1)$$

la siguiente solución

$$y_1 = J_\nu(t) \quad (3.2)$$

para $r_1 = \nu$. Ahora se obtendrá la segunda solución por el método de variación de parámetros. Supóngase que

$$y_2(t) = A(t) J_\nu(t) \quad (3.3)$$

$$y_2'(t) = A(t) J_\nu'(t) + A'(t) J_\nu(t) \quad (3.4)$$

$$y_2''(t) = A(t) J_\nu''(t) + A'(t) J_\nu'(t) + A''(t) J_\nu(t) + A'(t) J_\nu'(t) \quad (3.5)$$

la substitución de (3.3), (3.4) y (3.5) en (3.1) da

$$t^2 A'' J_\nu + 2t^2 A' J_\nu' + t^2 A J_\nu'' + t A J_\nu' + t A' J_\nu + A(t^2 - \nu^2) J_\nu = 0 \quad (3.6)$$

que se puede escribir como

$$t^2 A'' J_\nu + 2t^2 A' J_\nu' + t A' J_\nu + A \left[t^2 J_\nu'' + t J_\nu' + (t^2 - \nu^2) J_\nu \right] = 0$$

y, como J_ν satisface la ecuación (3.1), se simplifica a la siguiente

$$t^2 J_\nu'' + t J_\nu' + (t^2 - \nu^2) J_\nu = 0$$

$$t A'' J_\nu + 2t A' J_\nu' + A' J_\nu = 0 \quad (3.7)$$

Introduciendo la definición

$$p(t) = A' \quad (3.8)$$

la ec. (3.7) se puede escribir como

$$t \frac{dp}{dt} J_\nu + 2t p J_\nu' + p J_\nu = 0 \quad (3.9)$$

Además

$$t \frac{d(p J_\nu^2)}{dt} = t \frac{dp}{dt} J_\nu^2 + 2t p J_\nu' J_\nu \quad (3.9a)$$

Ahora se puede multiplicar la ec. (3.9) por J_ν y usar la ec. (3.9a) para obtener

$$t \frac{d(p J_\nu^2)}{dt} + p J_\nu^2 = 0 \quad (3.10)$$

ó

$$\frac{d}{dt} (t p J_\nu^2) = 0 \quad (3.11)$$

Que se puede integrar para obtener

$$t p J_v^2 = a_0$$

Introduciendo la definición de $p(t)$ dada por la ec. (3.8) se obtiene

$$\frac{dA}{dt} = \frac{a_0}{t J_v^2} \quad (3.12)$$

y de esta

$$A(t) = \int \frac{a_0}{t J_v^2(t)} \quad (3.13)$$

que al substituirse en la ec. (3.3) da como resultado

$$y_2(t) = J_v(t) \int \frac{a_0}{\zeta J_v^2(\zeta)} \quad (3.14)$$

Además de la ec. (2.27) se sabe que

$$J_v(t) = t^\nu \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^{2m} \quad (3.15)$$

La substitución de la ec. (3.15) en la (3.14) da

$$y_2(t) = J_v(t) \int \frac{d\zeta}{\zeta} \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^{n+\nu} \right)^{-2} \quad (3.16)$$

Se puede demostrar usando expansión en series de Taylor o por división directa que la ec. (3.16) toma la forma

$$y_2(t) = J_v(t) \int \frac{d\zeta}{\zeta} (c_0 + c_m \zeta^{n+\nu} + \dots)$$

ó

$$y_2(t) = J_v(t) \ln t + t^{-\nu} \sum_{m=0}^{\infty} d_m t^m \quad (3.17)$$

Este resultado se puede generalizar para encontrar a partir de una solución $y_1(t)$, obtenida por el método de Frobenius con la raíz r_1 , la segunda solución $y_2(t)$ correspondiente a la raíz r_2 y de la forma

$$y_2(t) = y_1(t) \ln t + t^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \quad (3.18)$$

Esta ecuación se ha escrito suponiendo que $t=0$ es el punto singular regular. Los coeficientes c_n se encuentran por substitución de la ec. (3.18) en la ec. diferencial ordinaria [ec. (3.1)] para encontrar una fórmula de recurrencia. Cuando $\nu = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$ la segunda solución $y_2(t)$ se denomina la función Bessel de segunda clase de orden ν con la nomenclatura $Y_\nu(t)$. Todas las funciones $Y_\nu(t)$ son infinitas en $t=0$.

Ahora podemos establecer que la solución de la ec. (3.1) es

$$y(t) = C_1 J_\nu(t) + C_2 J_{-\nu}(t), \quad \text{para } \nu \neq \text{entero} \quad (3.19)$$

$$y(t) = C_1 J_\nu(t) + C_2 Y_\nu(t), \quad \text{para } \nu = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.20)$$

Las $J_\nu(t)$ y las $Y_\nu(t)$ son oscilatorias para todo t . Sin embargo las $J_\nu(t)$ son finitas en todo el dominio y las $Y_\nu(t)$, como las $J_\nu(t)$ con $\nu \neq \text{entero}$, tienden a infinito cuando $t \rightarrow 0$. Esto se ejemplifica para J_0 y Y_0 en la siguiente figura.

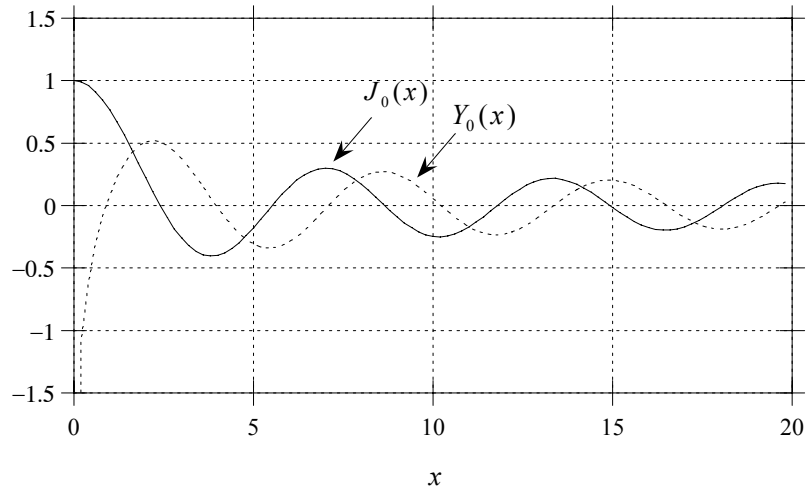


Figura 3. Funciones Bessel de primera y segunda clase de orden cero.

4. Funciones modificadas de Bessel

Hay otras ecuaciones diferenciales que tienen soluciones relacionadas a las funciones Bessel. Por ejemplo las soluciones de la siguiente ecuación diferencial con coeficientes variables, que es muy parecida a la de Bessel,

$$t^2 y''(t) + t y'(t) - (t^2 + \nu^2) y(t) = 0 \quad (4.1)$$

y que por ello se conoce como la ecuación modificada de Bessel.

Realizando el siguiente cambio de variable

$$it = u \quad \text{en donde } i = \sqrt{-1} \quad (4.2)$$

Por lo que las derivadas en términos de t son

$$y' = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{du} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dt} = i \frac{dy}{du} \quad (4.3)$$

$$y'' = \frac{d}{dt} \left(i \frac{dy}{du} \right) = \frac{du}{dt} \frac{d}{du} \left(i \frac{dy}{du} \right) = -\frac{d^2 y}{du^2} \quad (4.4)$$

Con estas la ec. (4.1) toma la siguiente forma

$$u^2 \frac{d^2 y}{du^2} + u \frac{dy}{du} + (u^2 - \nu^2) y(u) = 0 \quad (4.5)$$

Las soluciones de esta ecuación son las mismas que la de la ec. (3.1). Por ello

$$y(u) = C_1 J_\nu(u) + C_2 J_{-\nu}(u), \quad \text{para } \nu \neq \text{entero} \quad (4.6)$$

$$y(u) = C_1 J_\nu(u) + C_2 Y_\nu(u), \quad \text{para } \nu = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.7)$$

Se debe recordar que el argumento de estas funciones, en términos de la variable independiente original, es imaginario y por ello se introducen las siguientes definiciones relacionadas a las funciones de Bessel de 1ra. y 2da. Clase:

Función modificada de Bessel de 1ra. clase

$$I_\nu(t) = i^{-\nu} J_\nu(it) \quad (4.8)$$

Función modificada de Bessel de 2da. clase

$$K_n(t) = \frac{\pi}{2} i^{n+1} [J_n(it) + i Y_n(it)] \quad (4.9)$$

Las definiciones (4.8) y (4.9) permiten escribir la solución de la ec. (4.1) en la forma

$$y(t) = C_1 I_\nu(t) + C_2 I_{-\nu}(t), \quad \text{para } \nu \neq \text{entero} \quad (4.10)$$

$$y(t) = C_1 I_\nu(t) + C_2 K_\nu(t), \quad \text{para } \nu = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.11)$$

Las funciones modificadas de Bessel son de carácter monotónico y no oscilatorio. Las funciones $K_\nu(t)$ y $I_{-\nu}(t)$ tienden a infinito en $t=0$. En la siguiente figura se comparan las funciones modificadas de Bessel de 1ra. y 2da. Clase:

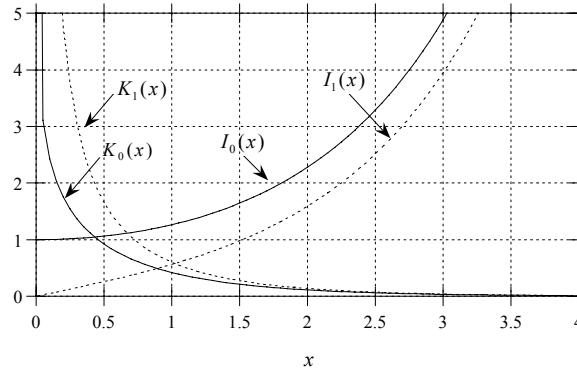


Figura 4. Funciones modificadas de Bessel de 1ra. y 2da. clase de 1er. y 2do. orden.

Algunas relaciones útiles de ellas son

$$I_{1/2}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \sinh(t) \quad (4.12)$$

$$I_{-1/2}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cosh(t) \quad (4.13)$$

$$I_{n+1/2}(t) = I_{n-3/2}(t) - \frac{2n-1}{t} I_{n-1/2}(t) \quad (4.14)$$

Las funciones $I_\nu(t)$ y $K_\nu(t)$ están relacionadas a las $J_\nu(t)$ y $Y_\nu(t)$ en forma similar a como están relacionados el $\sinh(t)$ y el $\cosh(t)$ al $\cos(t)$ y $\sin(t)$.

Algunos aspectos de la relación entre las funciones $J_\nu(t)$ y las $Y_\nu(t)$ quedarán más claros si se plantea la analogía entre las funciones trigonométricas y las hiperbólicas cuando a partir de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + \lambda^2 y_1 = 0 \quad (4.15)$$

Cuya solución es

$$y_1(x) = A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x)$$

Con el cambio de variable $\lambda = \sqrt{-1} \mu = i \mu$ se obtiene de la ec. (4.15)

$$y_1(x) = A \operatorname{sen}(i \mu x) + B \cos(i \mu x)$$

Usando las identidades $\operatorname{sen}(i \mu x) = i \sinh(\mu x)$ y $\cos(i \mu x) = \cosh(\mu x)$, se obtiene

$$y_1(x) = A i \sinh(\mu x) + B \cosh(\mu x)$$

ó

$$y_2(x) = A' \sinh(\mu x) + B' \cosh(\mu x)$$

Que sabemos es la solución de

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} - \mu^2 y_2 = 0$$

Esta ecuación diferencial también se puede obtener de la ec. (4.15) al realizar el cambio de variable $\lambda = \sqrt{-1} \mu = i \mu$. Este procedimiento es análogo a lo realizado para obtener las soluciones de la ecuación modificada de Bessel a partir de las soluciones de la ecuación de Bessel, y el tipo de relación que hay entre las funciones de Bessel y las modificadas es el mismo que hay entre las funciones trigonométricas y las hiperbólicas.

5. Ecuación diferencial con soluciones que contienen funciones de Bessel

Será útil recordar que existe la siguiente ecuación

$$x^2 y''(x) + x(a + 2bx^p)y'(x) + [c + dx^{2q} + b(a + p - 1)x^p + b^2x^{2p}]y(x) = 0 \quad (5.1)$$

que tiene solución de la forma

$$y(x) = x^\alpha e^{-\beta x^p} Z_\nu(\lambda x^q) \quad (5.2)$$

En donde

$$\left. \begin{aligned} Z_\nu &= C_1 J_\nu(\lambda x^q) + C_2 J_{-\nu}(\lambda x^q), & \text{para } \nu \neq \text{entero} \\ Z_\nu &= C_1 J_\nu(\lambda x^q) + C_2 Y_\nu(\lambda x^q), & \text{para } \nu = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} d > 0 \quad (5.3)$$

$$\left. \begin{aligned} Z_\nu &= C_1 I_\nu(\lambda x^q) + C_2 I_{-\nu}(\lambda x^q), & \text{para } \nu \neq \text{entero} \\ Z_\nu &= C_1 I_\nu(\lambda x^q) + C_2 K_\nu(\lambda x^q), & \text{para } \nu = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} d < 0 \quad (5.4)$$

$$\alpha = (1 - a) / 2 \quad (5.5)$$

$$\beta = b / p \quad (5.6)$$

$$\lambda = \sqrt{|d|} / q \quad (5.7)$$

$$\nu = \frac{1}{2q} \sqrt{(1 - a)^2 - 4c} \quad (5.8)$$

Estas relaciones permiten encontrar la solución de un gran número de ecuaciones diferenciales ordinarias. Los detalles de la deducción de la ecs. (5.2)-(5.8) pueden encontrarse en el libro de Hildebrand (1976, pag. 152).

Un caso en el que las fórmulas anteriores son útiles, es cuando se desea resolver ecuaciones diferenciales parciales en coordenadas esféricas. Por ejemplo es posible transformar la ecuación diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^2 \frac{\partial u}{\partial \xi} \right)$$

A la siguiente que aprendimos a resolver en el Capítulo III

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}$$

En donde $u(\xi, \tau) = \frac{w(\xi, \tau)}{\xi}$. Esta transformación es una consecuencia de las ecs. (5.1) a (5.8).

6. Ortogonalidad de las funciones Bessel

La ortogonalidad de las funciones Bessel se puede demostrar fácilmente si se empieza con

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (\lambda^2 x^2 - \nu^2) y(x) = 0 \quad (6.1)$$

Dividendo entre x

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + \left(\lambda^2 x - \frac{\nu^2}{x} \right) y(x) = 0 \quad (6.2)$$

Y rearreglando a

$$\frac{d}{dx} \left[x \frac{dy}{dx} \right] + \left(-\frac{\nu^2}{x} + \lambda^2 x \right) y = 0 \quad (6.3)$$

Recordando lo revisado sobre la teoría de Sturm-Liouville para la ecuación

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy_n}{dx} \right] + [q(x) + \lambda_n w(x)] y_n = 0 \quad (6.4)$$

con condiciones de frontera

$$\begin{aligned} a_1 y_n(a) - a_2 y_n'(a) &= 0 \\ b_1 y_n(b) - b_2 y_n'(b) &= 0 \end{aligned} \quad (6.5)$$

Se demostró que

$$\int_a^b w(x) y_n(x) y_m(x) dx = 0, \text{ para } n \neq m \quad (6.6)$$

Comparando las ecuaciones (6.3) y (6.4)

$$\begin{aligned} w(x) &= x & p(x) &= x \\ q(x) &= -\nu^2 / x & \lambda_n &= \lambda^2 \end{aligned}$$

Como consecuencia de esto las funciones de Bessel son ortogonales si se usa como función de ponderación $w(x) = x$. Así

$$\int_a^b x y_\nu(x, \lambda_n) y_\nu(x, \lambda_m) dx = 0, \text{ para } n \neq m \quad (6.8)$$

Y este resultado permitirá evaluar los coeficientes de expansiones en términos de funciones Bessel en un gran número de problemas.

Es importante darse cuenta que lo que se ha demostrado en esta sección es que las ecuaciones diferenciales de Bessel junto con condiciones de frontera homogéneas definen problemas de Sturm-Liouville y por lo tanto las soluciones de ellos tienen las propiedades de las funciones propias.

Ejemplo 1

Considérese el siguiente problema en coordenadas cilíndricas con referencia a la figura siguiente:

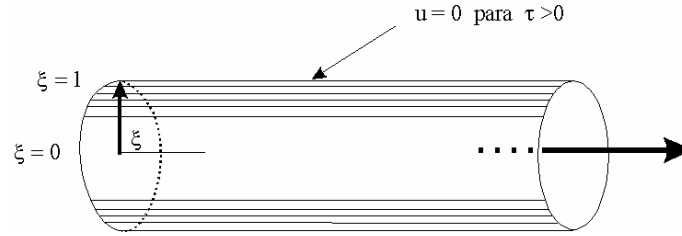


Figura 5. Cilindro sólido que inicialmente se encuentra a la temperatura $u = \mathcal{F}(\xi)$, y que a partir del instante $\tau = 0$ su superficie se mantiene a $u = 1$.

Para las condiciones descritas en el título de la figura no hay dependencia axial ni angular, por lo cual la conducción de calor en el cilindro está gobernada por la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \quad (\text{E.1.1})$$

sujeta a las condiciones de frontera e inicial dadas por

$$u = 0 \quad \text{en} \quad \xi = 1 \quad (\text{E.1.2})$$

$$u \quad \text{es finito en} \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (\text{E.1.3})$$

$$\text{Cuando } \tau = 0 \quad u = \mathcal{F}(\xi) \quad (\text{E.1.4})$$

Este problema es de valor inicial, pues la ecuación diferencial es parabólica, aunque en coordenadas cilíndricas; por ello debemos preguntarnos si el problema satisface las condiciones para ser resuelto por el método de separación de variables. Aparentemente no, pues solo se tiene una condición de frontera, la cual es homogénea, la segunda condición no es de frontera solo establece que la solución, como en cualquier problema físico, debe ser finito en todo el dominio de solución. Este tipo de condición, cuando el dominio incluye $\xi = 0$ en los sistemas de coordenadas cilíndricas o esféricas, es equivalente a una homogénea, ya que como veremos nos permite obtener una de las constantes de integración

del problema de Sturm-Liouville que se formará con la ecuación diferencial de Bessel y la condición de frontera en la superficie. Esto quedará más claro si se analiza la solución del problema en estado estacionario dado por

$$0 = \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d u_s}{d\xi} \right) \quad (\text{E.1.5})$$

Sujeta a las condiciones de frontera dadas por

$$u_s = 0 \quad \text{en} \quad \xi = 1 \quad (\text{E.1.6})$$

$$u_s \text{ es finito en } 0 \leq \xi \leq 1 \quad (\text{E.1.7})$$

Al integrar la ec. (E.1.4) se obtiene

$$\xi \frac{d u_s}{d\xi} = C_1$$

Una integración más da

$$u_s = C_1 \ln \xi + C_2 \quad (\text{E.1.8})$$

Nótese que como $\lim_{\xi \rightarrow 0} (\ln \xi) \rightarrow -\infty$ lo que llevaría a tener un valor de la temperatura adimensional sin sentido físico, contradiciendo la condición (E.1.6). Debe también notarse que si $C_1 \neq 0$ la derivada de u_s no tiene sentido físico en $\xi = 0$. Por ello $C_1 = 0$ y la solución será la trivial $u_s = 0$, pues el problema dado por las ecuaciones (E.1.4)-(E.1.6) es homogéneo. En el problema dado por las ecs. (E.1.1)-(E.1.4) la ecuación (E.1.3) se comportará de manera similar a (E.1.7) en el problema de u_s .

Una vez aceptando que la condición establecida por la ec. (E.1.3) es equivalente a una condición de frontera homogénea se puede proceder a la solución del problema por el método de separación de variables. Por ello se propone

$$u = F(\xi) \Theta(\tau) \quad (\text{E.1.9})$$

La substitución de esta en la ec. (E.1.1) nos permite encontrar

$$\frac{1}{\Theta} \frac{d \Theta}{d \tau} = -\lambda^2 \quad (\text{E.1.10})$$

y

$$\frac{1}{F} \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d F}{d\xi} \right) = -\lambda^2 \quad (\text{E.1.11})$$

La solución de (E.1.10) es

$$\Theta = A e^{-\lambda^2 \tau} \quad (\text{E.1.12})$$

la ec. (E.1.11) es la ecuación de Bessel de orden cero

$$\xi^2 F'' + \xi F' + \lambda^2 \xi^2 F = 0 \quad (\text{E.1.13})$$

La solución de (E.1.9) es

$$F(\xi) = C_1 J_0(\lambda \xi) + C_2 Y_0(\lambda \xi) \quad (\text{E.1.14})$$

Usando la ec. (E.1.3) se encuentra $C_2 = 0$ porque $Y_0(\lambda \xi) \rightarrow \infty$ cuando $\xi \rightarrow 0$. O sea

$$F(\xi) = C_1 J_0(\lambda \xi) \quad (\text{E.1.15})$$

Ahora usando la condición de frontera homogénea dada por la ec. (E.1.2)

$$F(1) = 0 = J_0(\lambda_n) \quad \text{para } n = 1, 2, \dots, \infty \quad (\text{E.1.16})$$

que es la condición para los valores propios. Nótese que las primeras seis raíces de $J_0(\lambda)$ se pueden encontrar de forma aproximada de la Figura 1. Las funciones propias están dadas por

$$F_n(\xi) = J_0(\lambda_n \xi) \quad (\text{E.1.17})$$

Por lo que la solución a (E.1.1) es de la forma

$$u(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n^2 \tau} J_0(\lambda_n \xi) \quad (\text{E.1.18})$$

Usando la condición inicial

$$\mathcal{F}(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0(\lambda_n \xi) \quad (\text{E.1.19})$$

Y ahora la propiedad de ortogonalidad de $J_0(\lambda_n \xi)$

$$C_n = \frac{\int_0^1 \xi \mathcal{F}(\xi) J_0(\lambda_n \xi) d\xi}{\int_0^1 \xi [J_0(\lambda_n \xi)]^2 d\xi} \quad (\text{E.1.20})$$

Así la solución del problema se ha encontrado formalmente, aunque faltan todos los detalles algebraicos para determinar C_n .

A continuación se muestran los resultados de la evaluación de la solución ec. (E.1.18) para el caso en que la condición inicial está dada por $\mathcal{F}(\xi) = 1.0$. Para su evaluación fue necesario realizar las dos integrales en la constante dada por la ec. (E.1.20) y se obtiene

$$C_n = \frac{2}{\lambda_n J_1(\lambda_n)} \quad (\text{E.1.21})$$

Y por ello para este caso la temperatura está dada por

$$u(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 J_0(\lambda_n \xi)}{\lambda_n J_1(\lambda_n)} \exp(-\lambda_n^2 \tau) \quad (\text{E.1.18})$$

Algunas herramientas y artificios para facilitar la integración se revisarán más adelante en este capítulo.

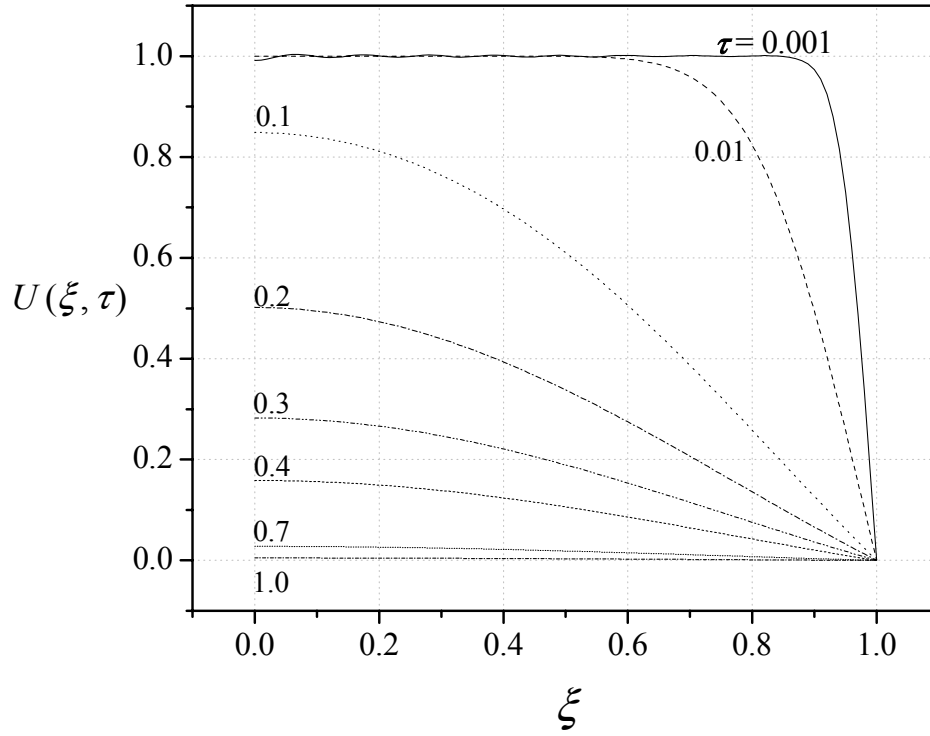


Figura 6. Perfiles de temperatura en la barra sólida para el caso en que $\mathcal{F}(\xi) = 1.0$, aquí se utilizaron 30 términos de la serie.

Ejemplo 2

Considérese ahora un problema similar al tratado en el ejemplo 1, pero esta vez la condición inicial tiene dependencia angular pues está dada por $\mathcal{F}(\xi, \theta)$. Por ello la ecuación diferencial es

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \quad (\text{E.2.1})$$

Sujeta a las condiciones de frontera e inicial

$$u = 0 \quad \text{en} \quad \xi = 1, \quad \text{para} \quad \tau > 0 \quad (\text{E.2.2})$$

$$u \quad \text{es finito en} \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (\text{E.2.3})$$

$$\text{Cuando } \tau = 0 \quad u = \mathcal{F}(\xi, \theta) \quad (\text{E.2.4})$$

Nótese que las condiciones de frontera en la superficie y la restricción física sobre la solución sugieren que en la dirección radial se encontrará un problema de Sturm-Liouville. Además, debido a la naturaleza de la geometría se tendrá que cumplir la siguiente condición de periodicidad

$$\begin{aligned} u(\xi, \theta, \tau) &= u(\xi, \theta + 2\pi, \tau) \\ u(\xi, \theta, \tau) &= M(\xi, \tau)G(\theta) = M(\xi, \tau)G(\theta + 2\pi) \end{aligned} \quad (\text{E.2.5})$$

Así las condiciones periódicas de la contribución angular hacen que el problema que incluye la ecuación diferencial parabólica homogénea pueda en principio ser resuelto por el método de separación de variables. Esto porque es factible encontrar un problema de Sturm-Liouville para cada una de las variables espaciales ξ y θ .

Se prosigue a buscar una solución de la forma

$$u(\xi, \theta, \tau) = T(\tau)F(\xi)G(\theta) \quad (\text{E.2.6})$$

La substitución de la ec. (E.2.6) en (E.2.1) da

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{d\tau} = \frac{1}{F} \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{dF}{d\xi} \right) + \frac{1}{\xi^2} \frac{1}{G} \frac{d^2 G}{d\theta^2} = -\lambda^2 \quad (\text{E.2.3})$$

Por lo tanto

$$T = Ce^{-\lambda^2 \tau} \quad (\text{E.2.8})$$

y

$$\frac{1}{F} \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{dF}{d\xi} \right) + \lambda^2 = -\frac{1}{\xi^2} \frac{1}{G} \frac{d^2 G}{d\theta^2}$$

que da

$$\frac{\xi}{F} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{dF}{d\xi} \right) + \lambda^2 \xi^2 = -\frac{1}{G} \frac{d^2 G}{d\theta^2} = \nu^2 \quad (\text{E.2.9})$$

Aquí el signo de la segunda constante de separación se selecciona para obtener funciones periódicas para G . De (E.2.9) se obtienen las siguientes ecuaciones

$$G'' + \nu^2 G = 0 \quad (\text{E.2.10})$$

Y la ecuación de Bessel de orden " ν "

$$\xi^2 F'' + \xi F' + (\lambda^2 \xi^2 - \nu^2) F = 0 \quad (\text{E.2.11})$$

Tanto la ec. (E.2.10) como la (E.2.11) son del tipo que junto con las condiciones de frontera homogéneas o apropiadas forman un problema de Sturm-Liouville. La solución de (E.2.10) es

$$G(\theta) = A \sin(\theta \nu) + B \cos(\theta \nu). \quad (\text{E.2.12})$$

Y puesto que

$$G(\theta) = G(\theta + 2\pi)$$

Se puede demostrar, usando la periodicidad del Seno y el Coseno, que la ec. (E.2.12) es periódica, para cualquier valor de las constantes A y B , solo si

$$\nu = 0, 1, 2, 3, \dots$$

El que la constante de separación ν solo tome valores enteros hace que la solución de (E.2.11) sea

$$F(\xi) = C_1 J_\nu(\lambda \xi) + C_2 Y_\nu(\lambda \xi) \quad (\text{E.2.13})$$

donde $C_2 = 0$ porque $|Y_\nu| \rightarrow \infty$ cuando $\xi \rightarrow 0$

$$F(\xi) = C_1 J_\nu(\lambda \xi) \quad (\text{E.2.14})$$

Utilizando ahora la condición de frontera dada por la ec. (E.2.2)

$$F(\xi) = 0 = J_\nu(\lambda_{\nu n}) \quad (\text{E.2.15})$$

que es la condición de los valores propios

$$\lambda_{\nu n}, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots \text{ para cada función } \nu$$

así que la solución es

$$u(\xi, \theta, \tau) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_{\nu n}^2 \tau} J_\nu(\lambda_{\nu n} \xi) [A_{\nu n} \sin(\theta \nu) + B_{\nu n} \cos(\theta \nu)]. \quad (\text{E.2.16})$$

Se sabe que

$$\int_0^{2\pi} \sin(\alpha \theta) \cos(\beta \theta) d\theta = 0, \quad \text{para } \alpha \neq \beta \text{ y } \alpha = \beta \quad (\text{E.2.17})$$

Utilizando la condición inicial dada por (E.2.4) en (E.2.16)

$$\mathcal{F}(\xi, \theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_{\nu}(\lambda_{\nu n} \xi) \left[A_{\nu n} \sin(\theta \nu) + B_{\nu n} \cos(\theta \nu) \right] \quad (\text{E.2.18})$$

de donde

$$A_{\nu n} = \frac{\int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 \xi F(\xi, \theta) J_{\nu}(\lambda_{\nu n} \xi) d\xi \right] \sin(\theta \nu) d\theta}{\left(\int_0^1 \xi \left[J_{\nu}(\lambda_{\nu n} \xi) \right]^2 d\xi \right) \left(\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta \nu) d\theta \right)} \quad (\text{E.2.19})$$

De la misma forma

$$B_{\nu n} = \frac{\int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 \xi \mathcal{F}(\xi, \theta) J_{\nu}(\lambda_{\nu n} \xi) d\xi \right] \cos(\theta \nu) d\theta}{\left(\int_0^1 \xi \left[J_{\nu}(\lambda_{\nu n} \xi) \right]^2 d\xi \right) \left(\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta \nu) d\theta \right)} \quad (\text{E.2.20})$$

Se ha encontrado la solución formalmente pero para evaluar $u(\xi, \theta, \tau)$ dada por la ec. (E.2.16) es necesario conocer los valores propios $\lambda_{\nu n}$. Ellos pueden ser obtenidos aproximadamente de la Figura 1 para $J_0(\lambda_{0n})$ para $n = 1$ a 6 , para $J_1(\lambda_{1n})$ para $n = 1$ a 7 , y para $J_2(\lambda_{2n})$ para $n = 1$ a 7 . Para $\nu \geq 3$ se necesitan las gráficas de las funciones correspondientes. Si se dispone de una forma de calcular las funciones Bessel $J_0(x)$ y $J_1(x)$ las de orden superior entero pueden ser calculadas por una identidad que se revisará más adelante. Además es necesario realizar las integrales en las ecs. (E.2.19) y (E.2.20).

Ejemplo 3:

Considérese el problema adimensional descrito en la figura siguiente

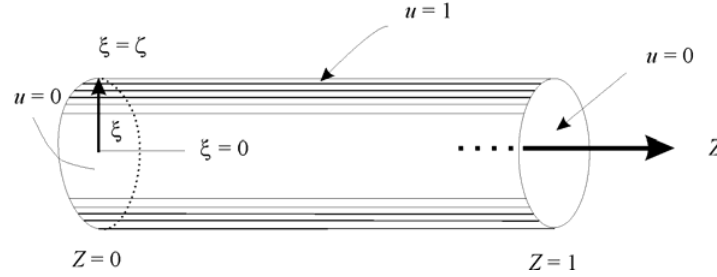


Figura 7. Cilindro cuyos extremos se mantienen a la temperatura $u = 0$ y su superficie a $u = 1$.

Como no se establece una condición inicial suponemos que el sólido se encuentra en estado estacionario. Tal situación de conducción de calor está gobernada por

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} = 0, \quad \text{para} \quad \begin{matrix} 0 \leq \xi \leq \zeta \\ 0 \leq Z \leq 1 \end{matrix} \quad (\text{E.3.1})$$

Sujeta a las siguientes condiciones de frontera

$$u = 0 \quad \text{en} \quad Z = 0 \quad (\text{E.3.2})$$

$$u = 0 \quad \text{en} \quad Z = 1 \quad (\text{E.3.3})$$

$$u = 1 \quad \text{en} \quad \xi = \zeta \quad (\text{E.3.4})$$

$$\text{Además} \quad u \text{ es finita en } 0 \leq \xi \leq \zeta, \quad 0 \leq Z \leq 1 \quad (\text{E.3.5})$$

La ecuación diferencial es elíptica, bidimensional y homogénea. Además se tienen dos condiciones de frontera homogéneas en la dirección axial: el problema es separable en la dirección axial, pero no en la radial. Así es factible resolver el problema por aplicación directa del método de separación de variables. Se prosigue a proponer

$$u(\xi, Z) = F(\xi) G(Z) \quad (\text{E.3.6})$$

La substitución de la ec. (E.3.6) en la ec. (E.3.1) nos lleva a

$$\frac{1}{F} \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{dF}{d\xi} \right) + \frac{1}{G} \frac{d^2 G}{dZ^2} = -\lambda^2 \quad (\text{E.3.7})$$

La solución de la parte axial es

$$G(Z) = A \operatorname{sen}(\lambda Z) + B \operatorname{cos}(\lambda Z) \quad (\text{E.3.8})$$

Con

$$G(0) = 0, \quad G(1) = 0 \quad (\text{E.3.9})$$

De donde

$$G_n(Z) = \text{sen}(\lambda_n Z) \quad (\text{E.3.10})$$

$$\lambda_n = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \infty \quad (\text{E.3.11})$$

La parte radial está dada por la ecuación modificada de Bessel de orden cero

$$\xi^2 F'' + \xi F' - \lambda^2 \xi^2 F = 0 \quad (\text{E.3.12})$$

cuya solución es

$$F(\xi) = C_1 I_0(\lambda \xi) + C_2 K_0(\lambda \xi) \quad (\text{E.3.13})$$

$C_2 = 0$ porque $K_0 \rightarrow \infty$ cuando $\xi \rightarrow 0$. Así la solución para u es de la forma

$$u(\xi, Z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n I_0(n\pi \xi) \text{sen}(n\pi Z) \quad (\text{E.3.14})$$

Utilizando ahora la condición de frontera en $\xi = \zeta$

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n I_0(n\pi \zeta) \text{sen}(n\pi Z) \quad (\text{E.3.15})$$

De esta con la ortogonalidad de $\text{sen}(n\pi Z)$ se pueden evaluar las constantes de integración

$$C_n = \frac{\int_0^1 \text{sen}(n\pi Z) dZ}{I_0(n\pi \zeta) \int_0^1 \text{sen}^2(n\pi Z) dZ} \quad (\text{E.3.16})$$

En este caso las integrales pueden ser determinar fácilmente, ya que en realidad se han encontrado antes en este texto. Así

$$C_n = \frac{2[1 - (-1)^n]}{n\pi I_0(n\pi \zeta)} \quad (\text{E.3.16})$$

A continuación, en la Figura 8, se muestra la evaluación de la solución ecuación (E3.14)

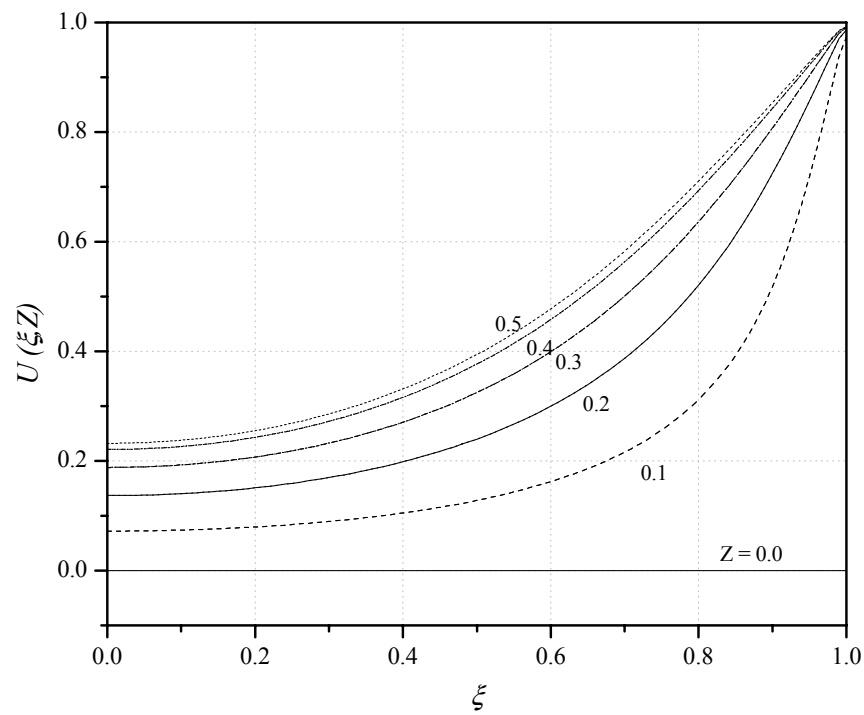


Figura 8. perfiles de concentración en la barra sólida para diferentes posiciones axiales se evalúa el caso en que $\zeta=1.0$, aquí se utilizaron 80 términos de la serie.

Ejemplo 4

Considérese el problema adimensional de conducción transitoria de calor en una esfera que tiene una temperatura inicial dada por la función radial $\mathcal{F}(\xi)$. Después se sumerge en un fluido perfectamente mezclado que se mantiene a una temperatura constante. Se desea considerar la resistencia externa a la transferencia de calor del seno del fluido a la superficie de la esfera. Dadas las condiciones inicial y de mezclado del fluido no hay razón para esperar dependencia angular en la temperatura de la esfera. Bajo estas condiciones el problema está dado por la ecuación siguiente:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^2 \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \quad (\text{E.4.1})$$

Que debe ser resuelta sujeta a las condiciones inicial y de frontera siguientes:

$$\text{Cuando } \tau = 0 \quad u = \mathcal{F}(\xi), \quad \text{para } 0 \leq \xi \leq 1 \quad (\text{E.4.2})$$

$$u \text{ es finito en } 0 \leq \xi \leq 1 \quad (\text{E.4.3})$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + N_{Bi} u = 0 \quad \text{en } \xi = 1, \text{ cuando } \tau > 0 \quad (\text{E.4.4})$$

Debemos darnos cuenta, que al tener una ecuación diferencial parabólica homogénea y lo equivalente a dos condiciones de frontera homogéneas en la dirección radial, el problema de valor inicial es factible de solución por aplicación directa del método de separación de variables. Entonces, para la solución se propone la separación de variables siguiente

$$u = F(\xi) T(\tau) \quad (\text{E.4.5})$$

A partir de (E.4.1) encontramos

$$\xi^2 F'' + 2\xi F' + \lambda^2 \xi^2 F = 0 \quad (\text{E.4.6})$$

Esta última ecuación es muy parecida a la ecuación de Bessel excepto por el 2 en el segundo término. Revisando nuestras notas concluimos que esta ecuación cae en la categoría descrita en la Sección 5 de este capítulo sobre las funciones Bessel.

Comparando la ec. (E.4.6) con la ec. (5.1) de este capítulo, se encuentra

$$a = 2, \quad b = 0, \quad c = 0 \quad d = \lambda^2, \quad q = 1$$

lo cual da

$$\alpha = (1 - a) / 2 = -1 / 2$$

$$\beta = b / p = 0$$

$$\lambda = \sqrt{|d|} / q = \lambda$$

$$\nu = \frac{1}{2q} \sqrt{(1-a)^2 - 4c} = \frac{1}{2(1)} \sqrt{(1-2)^2 - 4(0)} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto la solución es

$$F(\xi) = \xi^{-1/2} [C_1 J_{1/2}(\lambda \xi) + C_2 J_{-1/2}(\lambda \xi)] \quad (\text{E.4.7})$$

Como $|J_{-1/2}(\lambda \xi)| \rightarrow \infty$ cuando $\xi \rightarrow 0$ la ec. (E.4.7) se reduce a

$$F(\xi) = C_1 \xi^{-1/2} J_{1/2}(\lambda \xi) \quad (\text{E.4.8})$$

Pero ya anteriormente vimos que esta función de Bessel está dada por

$$J_{1/2}(\lambda \xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda \xi}} \operatorname{sen}(\lambda \xi) \quad (\text{E.4.9})$$

Así que

$$F(\xi) = C_1 \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda}} \frac{\operatorname{sen}(\lambda \xi)}{\xi} \quad (\text{E.4.10})$$

De la condición de frontera dada por la ec. (E.4.4) se encuentra que

$$\frac{dF}{d\xi} + N_{Bi} F = 0 \quad \text{en } \xi = 1 \quad (\text{E.4.11})$$

Así

$$C_1 \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda}} \{ \lambda \cos(\lambda) - \operatorname{sen}(\lambda) \} + C_1 N_{Bi} \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda}} \operatorname{sen}(\lambda) = 0$$

De esta se obtiene la condición para los valores propios

$$\tan(\lambda_n) = -\frac{\lambda_n}{N_{Bi} - 1} \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots, \infty \quad (\text{E.4.12})$$

Podemos entonces escribir la solución del problema como

$$\begin{aligned} u(\xi, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} C'_n e^{-\lambda_n^2 \tau} \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda}} \frac{\operatorname{sen}(\lambda \xi)}{\xi} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n^2 \tau} \xi^{-1/2} J_{1/2}(\lambda \xi) \end{aligned} \quad (\text{E.4.13})$$

Ahora se debe encontrar la función de ponderación para la condición de ortogonalidad. Para ello escribimos la ec. (E.4.6) como

y

$$\frac{d}{d\xi}(\xi^2 F') + \lambda^2 \xi^2 F = 0$$

Comparando con la ecuación diferencial general del problema de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + [q(x) + \lambda w(x)] y = 0$$

Concluimos que $w = \xi^2$, y por lo tanto

$$\int_0^1 \xi^2 F_n(\xi) F_m(\xi) d\xi = 0, \text{ para } n \neq m \quad (\text{E.4.14})$$

$$\int_0^1 \xi^2 [\xi^{-1/2} J_{1/2}(\lambda_n \xi)] [\xi^{-1/2} J_{1/2}(\lambda_m \xi)] d\xi = 0, \text{ para } n \neq m \quad (\text{E.4.15})$$

ó

$$\int_0^1 \xi J_{1/2}(\lambda_n \xi) J_{1/2}(\lambda_m \xi) d\xi = 0, \text{ para } n \neq m \quad (\text{E.4.16})$$

Usando la condición inicial en la ec. (E.4.13)

$$\mathcal{F}(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \xi^{-1/2} J_{1/2}(\lambda_n \xi)$$

Aplicando en esta ecuación la condición de ortogonalidad se obtiene

$$C_n = \frac{\int_0^1 \xi^{3/2} \mathcal{F}(\xi) J_{1/2}(\lambda_n \xi) d\xi}{\int_0^1 \xi [J_{1/2}(\lambda_n \xi)]^2 d\xi} \quad (\text{E.4.17})$$

Nótese que las ecs. (E.4.8) y (E.4.9) sugieren que $u(\xi, \tau) = v(\xi, \tau) / \xi$. Si esta nueva variable es utilizada en las ecuaciones (E.4.1)-(E.4.4) se obtendrá

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \quad (\text{E.4.18})$$

Con las condiciones de frontera e inicial

$$\text{Cuando } \tau = 0 \quad v = \xi F(\xi) \quad (\text{E.4.19})$$

$$\text{en } \xi = 0 \quad v = 0 \quad (\text{E.4.20})$$

$$\text{en } \xi = 1 \quad \frac{\partial v}{\partial \xi} + (N_{Bi} - 1)v = 0 \quad (\text{E.4.21})$$

Este planteamiento es equivalente a un problema en coordenadas cartesianas. Su solución da un resultado para $u(\xi, \tau)$ idéntico al encontrado anteriormente. Será muy útil recordar esta transformación.

A continuación se muestra la evaluación de la solución ecuación (E.4.13). Para tal evaluación fue necesario obtener las integrales en las ec. (E.4.17) cuando $\mathcal{F}(\xi) = 1.0$.

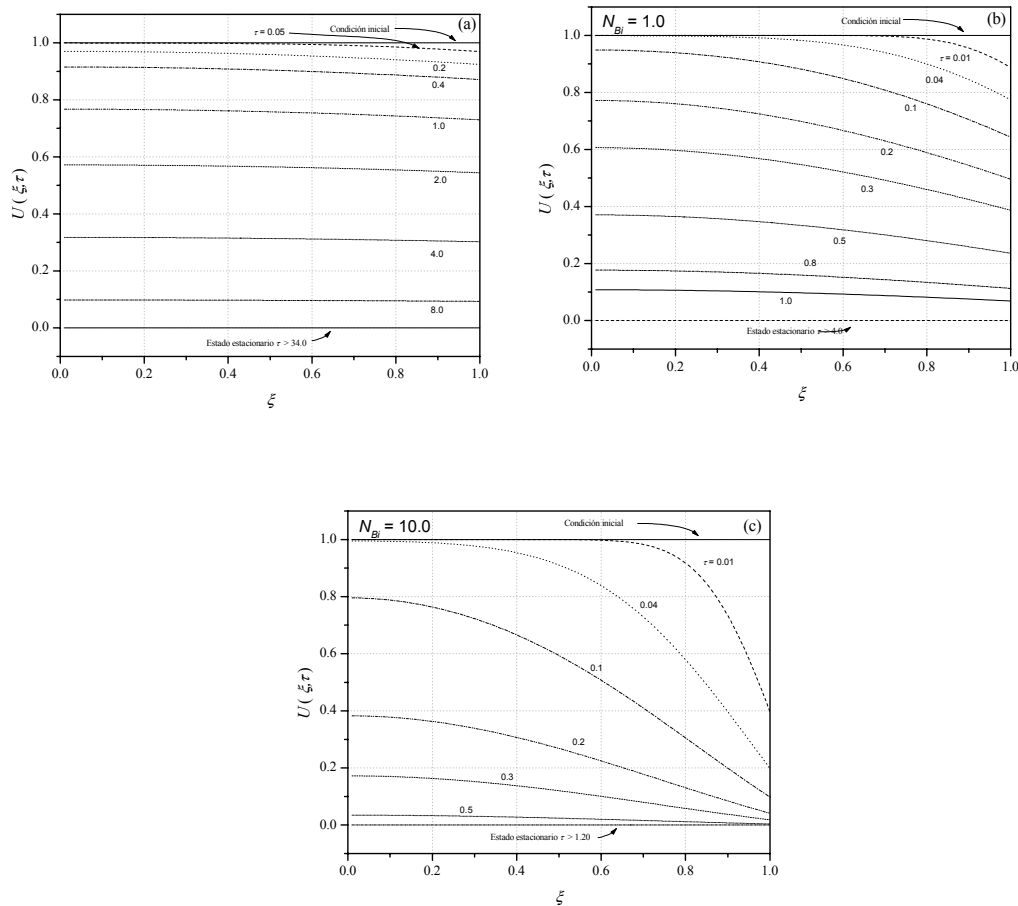


Figura 9. perfiles de temperatura en la esfera para diferentes números de Biot. Aquí se evalúa el caso en que $\mathcal{F}(\xi) = 1.0$, se utilizaron 25 términos de la serie.

Ejemplo 5

Ahora, consideraremos una variación del problema anterior. En este caso se estudia la transferencia transitoria de calor en una esfera en que inicialmente su temperatura es la función radial $\mathcal{F}(\xi)$ y a tiempos mayores de cero la temperatura en su superficie está dada por una función temporal conocida $u_{\infty}(\tau)$. De esta forma no hay porque esperar dependencia angular. Bajo estas condiciones el problema está dado por la ecuación siguiente:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^2 \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \quad (\text{E.5.1})$$

Sujeta a las condiciones inicial y de frontera

$$\text{Cuando } \tau = 0 \quad u = \mathcal{F}(\xi), \text{ para } 0 \leq \xi \leq 1 \quad (\text{E.5.2})$$

$$u \text{ es finito en } 0 \leq \xi \leq 1 \quad (\text{E.5.3})$$

$$u = u_{\infty}(\tau) \text{ en } \xi = 1, \text{ cuando } \tau > 0 \quad (\text{E.5.4})$$

La condición de frontera no homogénea en $\xi = 1$ hace que el problema de valor inicial no pueda ser resuelto directamente por el método de separación de variables. Por ello recurrimos a la superposición que involucra la solución quasi-estacionaria $u_{qs}(\xi, \tau)$ y relacionada a la solución buscada $u(\xi, \tau)$ por

$$u(\xi, \tau) = u_{qs}(\xi, \tau) + \tilde{u}(\xi, \tau) \quad (\text{E.5.5})$$

La substitución de la ec. (E.5.5) en (E.5.1)

$$\frac{\partial u_{qs}}{\partial \tau} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^2 \frac{\partial u_{qs}}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} \right) \quad (\text{E.5.6})$$

Por conveniencia se seleccionan como ecuaciones gobernantes de

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^2 \frac{\partial u_{qs}}{\partial \xi} \right) = 0 \quad (\text{E.5.7})$$

Y

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial u_{qs}}{\partial \tau} \quad (\text{E.5.8})$$

Recordando que para poder resolver la ec. (E.5.8) sus dos condiciones de frontera deben ser homogéneas, a partir de las condiciones de frontera del problema original, las condiciones de frontera e inicial para la ec. (E.5.7) son

$$\text{Cuando } \tau = 0 \quad \tilde{u} = \mathcal{F}(\xi) - u_{qs}(\xi, 0), \text{ para } 0 \leq \xi \leq 1 \quad (\text{E.5.9})$$

$$\tilde{u} \text{ es finito en } 0 \leq \xi \leq 1 \quad (\text{E.5.10})$$

$$\tilde{u} = 0 \text{ en } \xi = 1, \text{ cuando } \tau > 0 \quad (\text{E.5.11})$$

Esto hace que la ecuación de u_{qs} deba ser resuelta sujeta a las condiciones de frontera

$$u_{qs} \text{ es finito en } 0 \leq \xi \leq 1 \quad (\text{E.5.12})$$

$$u_{qs} = u_{\infty}(\tau) \text{ en } \xi = 1, \text{ cuando } \tau > 0 \quad (\text{E.5.13})$$

Procediendo a encontrar u_{qs} , se integra la ec. (E.5.7) una vez para encontrar

$$\xi^2 \frac{\partial u_{qs}}{\partial \xi} = A_1(\tau) \quad (\text{E.5.14})$$

En $\xi = 0$ se tendría una indeterminación en la derivada por ello $A_1(\tau) = 0$. Integrando ahora (E.5.14) se obtiene que la parte quasi-estacionaria no depende de la posición, porque

$$u_{qs} = A_2(\tau) \quad (\text{E.5.15})$$

Al imponer la condición de frontera en la superficie, ec. (E.5.13), es claro que la parte quasi-estacionaria de la solución es

$$u_{qs}(\tau) = u_{\infty}(\tau) \quad (\text{E.5.15})$$

Usando la ec. (E.5.15) podemos ahora reescribir el problema de las fluctuaciones $\tilde{u}$, dado por las ecs. (E.5.8) y (E.5.9)- (E.5.11), como

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} \right) - \frac{d u_{qs}}{d \tau} \quad (\text{E.5.16})$$

$$\text{Cuando } \tau = 0 \quad \tilde{u} = \mathcal{F}(\xi) - u_{\infty}(\tau), \text{ para } 0 \leq \xi \leq 1 \quad (\text{E.5.17})$$

$$\tilde{u} \text{ es finito en } 0 \leq \xi \leq 1 \quad (\text{E.5.18})$$

$$\tilde{u} = 0 \text{ en } \xi = 1, \text{ cuando } \tau > 0 \quad (\text{E.5.19})$$

El problema, que incluye la ecuación diferencial parabólica no homogénea, es ahora factible de solución por el método de expansión en series de funciones propias. Con el objeto de encontrar el problema de Sturm-Liouville asociado se plantea la versión homogénea del problema que deseamos resolver. O sea

$$\frac{\partial u_H}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^2 \frac{\partial u_H}{\partial \xi} \right) \quad (\text{E.5.20})$$

$$u_H \text{ es finito en } 0 \leq \xi \leq 1 \quad (\text{E.5.21})$$

$$u_H = 0 \text{ en } \xi = 1, \text{ cuando } \tau > 0 \quad (\text{E.5.22})$$

Se puede aplicar primero la transformación $u_H = \frac{w}{\xi}$, para obtener

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \quad (\text{E.5.20})$$

$$w = 0 \text{ en } \xi = 0 \quad (\text{E.5.21})$$

$$w = 0 \text{ en } \xi = 1, \text{ cuando } \tau > 0 \quad (\text{E.5.22})$$

La condición en $\xi = 0$ el centro se obtiene al ver que estará indefinida en ese lugar si $w \neq 0$. El problema anterior ya lo hemos resuelto muchas veces así el problema de Sturm-Liouville asociado con las ecs. (E.5.20)-(E.5.22) es

$$\frac{d^2 f_n}{d \xi^2} = -\lambda_n f_n, \text{ en donde } \lambda_n = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{E.5.23})$$

$$f_n = 0 \text{ en } \xi = 0, 1 \quad (\text{E.5.24})$$

$$\int_0^1 f_n(\xi) f_m(\xi) d \xi = 0, \quad \text{si } n \neq m \quad (\text{E.5.25})$$

Una vez identificado el problema de Sturm-Liouville se procede a aplicar la transformación $\tilde{u}(\xi, \tau) = w(\xi, \tau) / \xi$ a las ecuaciones (E.5.16)-(E.5.19) para obtener

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \xi \frac{d u_{qs}}{d \tau} \quad (\text{E.5.26})$$

$$\text{Cuando } \tau = 0 \quad w = \xi \mathcal{F}(\xi) - \xi u_{\infty}(0^+), \text{ para } 0 \leq \xi \leq 1 \quad (\text{E.5.27})$$

$$w = 0 \text{ en } \xi = 0 \quad (\text{E.5.28})$$

$$w = 0 \text{ en } \xi = 1, \text{ cuando } \tau > 0 \quad (\text{E.5.29})$$

Este problema satisface las condiciones para ser resuelto por el método de expansión en series y el problema de Sturm-Liouville asociado es el dado por las ecs. (E.5.23)-(E.5.25). Por ello para la solución se propone

$$w(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\tau) f_n(\xi) \quad (\text{E.5.30})$$

Y para el término no homogéneo y conocido, ya que $u_{\infty}(\tau)$ es un dato, se propone

$$\Phi(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\tau) f_n(\xi) \quad (\text{E.5.31})$$

En donde se ha introducido la definición

$$\Phi(\xi, \tau) = -\xi \frac{d u_{qs}}{d \tau} \quad (\text{E.5.32})$$

Los coeficientes $c_n(\tau)$ de la expansión (E.5.31), pueden obtenerse al aplicar la ortogonalidad de las funciones propias, así

$$c_n(\tau) = \frac{\int_0^1 \Phi(\xi, \tau) f_n(\xi) d\xi}{\int_0^1 [f_n(\xi)]^2 d\xi} \quad (\text{E.5.33})$$

Debe hacerse notar que la expansión (E.5.30) satisface las condiciones de frontera, a través de las propiedades de las funciones propias, pero que los coeficientes $a_n(\tau)$ son desconocidos al momento. Con este propósito se substituye $w(\xi, \tau)$ por la expansión propuesta para que ella al encontrar satisfaga la ecuación diferencial. El resultado de usar las ecs. (E.5.31) y (E.5.32) en (E.5.26) es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d a_n}{d \tau} f_n(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{d^2 f_n}{d \xi^2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(\xi) \quad (\text{E.5.34})$$

El uso de la ecuación diferencial de f_n , ec. (E.5.23), y el agrupamiento bajo la misma sumatoria lleva a

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \left[\frac{d a_n}{d \tau} + a_n \lambda_n^2 - c_n \right] = 0 \quad (\text{E.5.35})$$

La independencia lineal de las funciones propias permite encontrar las ecuaciones diferenciales

$$\frac{d a_n}{d \tau} + a_n \lambda_n^2 - c_n = 0 \quad (\text{E.5.36})$$

La solución general de esta, como vimos antes en el Capítulo III, es

$$a_n(\tau) = a_n(0) e^{-\lambda_n^2 \tau} + e^{-\lambda_n^2 \tau} \int_0^{\tau} e^{+\lambda_n^2 \zeta} c_n(\zeta) d\zeta \quad (\text{E.5.37})$$

En donde $a_n(0)$ se encuentra de la condición inicial dada por la ecuación (E.5.27)

$$a_n(0) = \frac{\int_0^1 [\xi \mathcal{F}(\xi) - \xi u_{\infty}(0)] f_n(\xi) d\xi}{\int_0^1 [f_n(\xi)]^2 d\xi} \quad (\text{E.5.38})$$

Para estar en posibilidades de evaluar la solución a diferentes instantes y posiciones es necesario especificar las funciones en la condición inicial y de frontera, así entonces se podrán obtener expresiones específicas de $c_n(\tau)$, $a_n(0)$ y $a_n(\tau)$.

Por ejemplo para el caso en que $\mathcal{F}(\xi)=1$ y $u_{\infty}(\tau)=u_{\infty 0}(1-e^{-\alpha\tau})$ en donde son constantes. El término no homogéneo de la ecuación de $w(\xi, \tau)$ es

$$\Phi(\xi, \tau) = -\xi \frac{d u_{\infty}(\tau)}{d \tau} = -\xi \alpha u_{\infty 0} e^{-\alpha\tau}$$

Y los coeficientes faltantes de la solución son

$$c_n(\tau) = -\alpha u_{\infty 0} e^{-\alpha\tau} \frac{\int_0^1 \xi f_n(\xi) d\xi}{\int_0^1 [f_n(\xi)]^2 d\xi}$$

y

$$a_n(0) = \frac{\int_0^1 \xi f_n(\xi) d\xi}{\int_0^1 [f_n(\xi)]^2 d\xi}$$

ó

$$c_n(\tau) = -\alpha u_{\infty 0} e^{-\alpha\tau} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \quad (\text{E.5.39})$$

y

$$a_n(0) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \quad (\text{E.5.40})$$

Porque

$$\int_0^1 \xi f_n(\xi) d\xi = \left[\frac{\sin(n\pi\xi)}{(n\pi)^2} - \frac{\xi \cos(n\pi\xi)}{n\pi} \right]_0^1 = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \quad \text{y} \quad \int_0^1 [f_n(\xi)]^2 d\xi = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto $a_n(\tau)$ de la ec. (5.37) es

$$a_n(\tau) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \left[e^{-(n\pi)^2\tau} - \frac{\alpha u_{\infty 0}}{(n\pi)^2 - \alpha} \left(e^{-\alpha\tau} - e^{-(n\pi)^2\tau} \right) \right] \quad (\text{E.5.41})$$

Se está ahora en posibilidades de evaluar las temperatura para este caso.

Por otro lado, será interesante obtener la solución del problema, comenzando el proceso en las ecs. (E.5.16)-(E.5-19), y llegar al mismo resultado sin introducir el cambio de variable $u_H = w/\xi$, o sea recurriendo a las fórmulas de la Sección 5 como se hizo en el Ejemplo 4. Para esto se propone un ejercicio en la sección de problemas propuestos.

7. Integrales de funciones Bessel

Se ha visto que para obtener los coeficientes de las expansiones en series de funciones Bessel es necesario evaluar integrales de la forma

$$\int_a^b x [y_\nu(\lambda x)]^2 dx \quad (7.1)$$

en donde $y_\nu(x)$ es una solución de la ecuación diferencial de Bessel de orden " ν "

$$x^2 y_\nu'' + x y_\nu' + (\lambda^2 x^2 - \nu^2) y_\nu = 0, \quad a \leq x \leq b \quad (7.2)$$

Para obtener resultados explícitos de las integrales se escribirá la ecuación de Bessel en la forma del problema general de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx} \left[x \frac{dy_\nu}{dx} \right] + \left(\lambda^2 x - \frac{\nu^2}{x} \right) y_\nu = 0 \quad (7.3)$$

Después de multiplicar la ec. (7.3) por $2x \frac{dy_\nu}{dx}$ se obtiene

$$2x \frac{dy_\nu}{dx} \frac{d}{dx} \left[x \frac{dy_\nu}{dx} \right] + \left(\lambda^2 x - \frac{\nu^2}{x} \right) 2x \frac{dy_\nu}{dx} y_\nu = 0 \quad (7.4)$$

Que se puede escribir como

$$\frac{d}{dx} \left[x \frac{dy_\nu}{dx} \right]^2 + [\lambda^2 x^2 - \nu^2] \frac{dy_\nu^2}{dx} = 0 \quad (7.5)$$

La integración de esta ecuación en el dominio $[a, b]$ se expresa como

$$\int_a^b \frac{d}{dx} \left[x \frac{dy_\nu}{dx} \right]^2 dx + \int_a^b [\lambda^2 x^2 - \nu^2] \frac{dy_\nu^2}{dx} dx = 0 \quad (7.6)$$

De esta expresión se obtiene usando integración por partes

$$\left[x \frac{dy_\nu}{dx} \right]^2 \Big|_a^b + [\lambda^2 x^2 - \nu^2] y_\nu^2 \Big|_a^b - 2\lambda^2 \int_a^b x y_\nu^2 dx = 0 \quad (7.7)$$

Debemos notar que la integral de interés, la ec. (7.1), está incluida en la ec. (7.7). Introduciendo la definición

$$I_\nu \equiv \int_a^b x y_\nu^2 dx \quad (7.8)$$

y realizando la evaluación en los límites de integración de la ecuación (7.7) se obtiene

$$I_\nu = \frac{1}{2\lambda^2} \left\{ b^2 \left[\frac{d y_\nu}{d x} \Big|_b \right]^2 + [\lambda^2 b^2 - \nu^2] y_\nu^2(\lambda b) - a^2 \left[\frac{d y_\nu}{d x} \Big|_a \right]^2 - [\lambda^2 a^2 - \nu^2] y_\nu^2(\lambda a) \right\} \quad (7.9)$$

Esta no es una forma adecuada, porque en general se desconoce cuanto valen las derivadas. Sin embargo, se pueden involucrar las condiciones de frontera generales del problema de Sturm-Liouville dadas por

$$\begin{aligned} a_1 y_\nu(\lambda a) - a_2 y_\nu'(\lambda a) &= 0 \\ b_1 y_\nu(\lambda b) - b_2 y_\nu'(\lambda b) &= 0 \end{aligned} \quad (7.10)$$

Podemos entonces concluir que los valores de la integral (7.9) dependen de los coeficientes a_1 , a_2 , b_1 y b_2 .

Caso I

En este consideramos la forma más general del problema, o sea a_1 , a_2 , b_1 y b_2 son diferentes de cero. De las ecs. (7.10) se encuentran las derivadas

$$\begin{aligned} y_\nu'(\lambda a) &= \frac{a_1}{a_2} y_\nu(\lambda a) \\ y_\nu'(\lambda b) &= \frac{b_1}{b_2} y_\nu(\lambda b) \end{aligned} \quad (7.11)$$

Por lo tanto la ec. (7.9) toma la forma

$$I_\nu = \frac{1}{2\lambda^2} \left\{ \left[b^2 \left(\frac{b_1}{b_2} \right)^2 + (\lambda^2 b^2 - \nu^2) \right] y_\nu^2(\lambda b) - \left[a^2 \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^2 + (\lambda^2 a^2 - \nu^2) \right] y_\nu^2(\lambda a) \right\} \quad (7.12)$$

Debe notarse que esta ecuación también es útil para el caso en que a_1 y/o b_1 son cero.

Caso II

Para $a_2 = 0$ pero $a_1 \neq 0$, no se puede evaluar la derivada $d y_\nu(\lambda x) / d x$ a partir de la condición de frontera, pero se puede utilizar la siguiente relación válida para funciones Bessel (Levedev, 1972)

$$x \frac{d y_{\nu}(\lambda x)}{d x} = \nu y_{\nu}(\lambda x) \mp \lambda x y_{\nu+1}(\lambda x) \quad (7.13)$$

El signo $\mp$ depende de que función de Bessel se trate. Utilizando la ec. (7.13) y notando que si $a_2 = 0$ entonces $y_{\nu}(\lambda a) = 0$, se obtiene

$$a \frac{d y_{\nu}(\lambda a)}{d x} = \mp \lambda a y_{\nu+1}(\lambda a) \quad (7.14)$$

Por lo tanto la ec. (7.9) se reduce a

$$I_{\nu} = \frac{1}{2\lambda^2} \left\{ \left[b^2 \left(\frac{b_1}{b_2} \right)^2 + (\lambda^2 b^2 - \nu^2) \right] y_{\nu}^2(\lambda b) - \lambda^2 a^2 y_{\nu+1}^2(\lambda a) \right\} \quad (7.15)$$

Caso III

En este caso análogo al anterior, $b_2 = 0$ pero $b_1 \neq 0$, la ec. (7.12) puede escribirse en la forma

$$b \frac{d y_{\nu}(\lambda b)}{d x} = \mp \lambda b y_{\nu+1}(\lambda b) \quad (7.16)$$

Y como $y_{\nu}(\lambda b) = 0$, la ec. (7.9) se puede simplificar a

$$I_{\nu} = \frac{1}{2\lambda^2} \left\{ \lambda^2 b^2 y_{\nu+1}^2(\lambda b) - \left[a^2 \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^2 + (\lambda^2 a^2 - \nu^2) \right] y_{\nu}^2(\lambda a) \right\} \quad (7.17)$$

Caso IV

En esta situación, $a_2 = b_2 = 0$ y entonces $y_{\nu}(\lambda a) = y_{\nu}(\lambda b) = 0$. Por lo que usaremos simultáneamente las ecuaciones (7.14) y (7.16). Así la ec. (7.9) se reduce a

$$I_{\nu} = \frac{1}{2\lambda^2} \left\{ \lambda^2 b^2 y_{\nu+1}^2(\lambda b) - \lambda^2 a^2 y_{\nu+1}^2(\lambda a) \right\} \quad (7.18)$$

Como un caso especial podemos considerar aquel en el que $a = 0$, o sea cuando el dominio incluye el origen de las coordenadas cilíndricas o esféricas. En este caso no se dispone explícitamente de un valor de la función o sus derivadas. Sin embargo, dado que en $x = a = 0$ la función y sus derivadas deben ser finitas la ecuación (7.9) se reduce a

$$I_{\nu} = \frac{1}{2\lambda^2} \left\{ b^2 \left[\frac{d y_{\nu}}{d x} \right]_b^2 + [\lambda^2 b^2 - \nu^2] y_{\nu}^2(\lambda b) + \nu^2 y_{\nu}^2(0) \right\} \quad (7.19)$$

Este resultado debe simplificarse para el caso especial de la condición de frontera en b , dada por la ec.(7.10).

8. Identidades para las funciones Bessel

La cantidad de este tipo de relaciones es sorprendentemente enorme. Su uso principal es en la evaluación de derivadas e integrales que involucran funciones Bessel (Levedev, 1972).

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} [t^\nu y_\nu(t)] &= t^\nu y_{\nu-1}(t) \\ \frac{d}{dt} [t^{-\nu} y_\nu(t)] &= -t^{-\nu} y_{\nu+1}(t) \end{aligned} \right\} \text{Estas son válidas para } y_\nu = J_\nu, Y_\nu \quad (8.1,2)$$

$$\frac{d}{dt} [t^\nu I_\nu(t)] = t^\nu I_{\nu-1}(t) \quad (8.3)$$

$$\frac{d}{dt} [t^{-\nu} I_\nu(t)] = -t^{-\nu} I_{\nu+1}(t) \quad (8.4)$$

$$\frac{d}{dt} [t^\nu K_\nu(t)] = -t^\nu K_{\nu-1}(t) \quad (8.5)$$

$$\frac{d}{dt} [t^{-\nu} K_\nu(t)] = -t^{-\nu} K_{\nu+1}(t) \quad (8.6)$$

también para $y_\nu = J_\nu, Y_\nu$ están

$$t \frac{d y_\nu(t)}{dt} = \nu y_\nu(t) - t y_{\nu+1}(t) = t y_{\nu-1}(t) - \nu y_\nu(t) \quad (8.7)$$

$$y_{\nu+1}(t) = \frac{2\nu}{t} y_\nu(t) - y_{\nu-1}(t) \quad (8.8)$$

Con las fórmulas anteriores casi cualquier integral de la forma siguiente,

$$\int t^m y_\nu(t) dt$$

que aparecen en los coeficientes de las expansiones en series de funciones de Bessel se puede integrar por partes y reducir a expresiones manejables.

Ejemplo 6a

$$I_1 = \int J_3(t) dt = \int t^2 [t^{-2} J_3(t)] dt$$

$$u = t^2 \Rightarrow du = 2t dt$$

usando ec. (8.2)

$$dv = t^{-2} J_3(t) \Rightarrow v = -t^{-2} J_2(t)$$

$$I_1 = -J_2(t) + 2 \int t^{-1} J_2(t) dt = -J_2(t) - 2t^{-1} J_1(t) + C$$

Aquí se uso nuevamente la ec. (8.2).

Ejemplo 6b

$$I_1 = \int J_0(t) dt$$

Esta integral no tiene resultado analítico y debe evaluarse por algún método numérico.

Ejemplo 6c

Usando ec. (8.2)

$$I_3 = \int t J_0(t) dt = t J_1(t) + C$$

Ejemplo 6d

$$I_4 = \int t^2 J_0(t) dt = \int t [t J_0(t)] dt$$

Usando integración por partes con $u = t \Rightarrow du = dt$ y $dv = t J_0(t) dt \Rightarrow v = t J_1(t)$

La integral puede ser transformada a

$$I_4 = t^2 J_1(t) - \int t J_1(t) dt$$

Una nueva integración por partes con $u = t \Rightarrow du = dt$ y $dv = J_1(t) dt \Rightarrow v = -J_0(t)$, permite escribir

$$I_4 = t^2 J_1(t) - \left[-t J_0(t) + \int J_0(t) dt \right] = t^2 J_1(t) + t J_0(t) - \int J_0(t) dt$$

Ejemplo 6e

$$I_5 = \int t^3 J_0(t) dt = \int t^2 [t J_0(t)] dt$$

Usando integración por partes con $u = t^2 \Rightarrow du = 2t dt$ y $dv = t J_0(t) dt \Rightarrow v = t J_1(t)$

$$I_5 = t^3 J_1(t) - 2 \int t^2 J_1(t) dt = t^3 J_1(t) - 2 t^2 J_2(t) + C$$

Ejemplo 6f

Deseamos evaluar el siguiente coeficiente

$$C_n = \frac{\int_0^1 \xi J_0(\lambda_n \xi) d\xi}{\int_0^1 \xi [J_0(\lambda_n \xi)]^2 d\xi},$$

encontrado en uno de los ejemplos presentados anteriormente. Se requiere entonces encontrar las integrales definidas

$$I_N = \int_0^1 \xi J_0(\lambda_n \xi) d\xi \text{ y } I_D = \int_0^1 \xi [J_0(\lambda_n \xi)]^2 d\xi$$

Para $I_N = \int_0^1 \xi J_0(\lambda_n \xi) d\xi$ se puede utilizar el resultado del Ejemplo 6c si se realiza el cambio de variable $t = \lambda_n \xi$ en I_N

$$I_N = \int_0^1 \xi J_0(\lambda_n \xi) d\xi = \frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^{\lambda_n} t J_0(t) dt = \frac{1}{\lambda_n^2} t J_1(t) \Big|_0^{\lambda_n}$$

$$I_N = \frac{1}{\lambda_n} \xi J_1(\lambda_n \xi) \Big|_0^1 = \frac{1}{\lambda_n} J_1(\lambda_n)$$

Para $I_D = \int_0^1 \xi [J_0(\lambda_n \xi)]^2 d\xi$ se utiliza una de las fórmulas desarrolladas en la Sección 7, la (7.19) que en este caso toma la forma

$$I_D = \frac{1}{2\lambda_n^2} \left\{ \left[\frac{d J_0(\lambda_n \xi)}{d \xi} \Big|_{\xi=1} \right]^2 + [\lambda_n J_0(\lambda_n)]^2 \right\}$$

De la ec. (8.2) con el cambio de variable $t = \lambda_n \xi$ se obtiene

$$\frac{d J_0(\lambda_n \xi)}{d \xi} = -\lambda_n J_1(\lambda_n \xi)$$

Al utilizar esta y $J_0(\lambda_n) = 0$ en la ecuación de I_D , esta se reduce a

$$I_D = \frac{[J_1(\lambda_n \xi)]^2}{2}$$

Y por lo tanto el coeficiente buscado es

$$C_n = \frac{\frac{1}{\lambda_n} J_1(\lambda_n)}{\frac{[J_1(\lambda_n \xi)]^2}{2}} = \frac{2}{\lambda_n J_1(\lambda_n)}$$

9. Polinomios de Legendre

Consideraremos nuevamente el problema de conducción de calor en estado estacionario en una esfera. Sin embargo incluiremos la dependencia angular. Por ello la temperatura adimensional está dada por

$$u = u(\xi, \theta, \phi) \quad (9.1)$$

válida en $0 \leq \xi < \infty, \quad 0 \leq \theta < \pi, \quad 0 \leq \phi < 2\pi$

En estado estacionario la temperatura es la solución de la ecuación siguiente

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^2 \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\xi^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\xi^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 \quad (9.2)$$

Las soluciones dadas por la ec. (9.1) son conocidas como armónicos esféricos. Para encontrarlos supondremos la separación

$$u = F(\xi) G(\theta, \phi) \quad (9.3)$$

Substituyendo esta ecuación en la ec. (9.2) se puede obtener

$$\begin{aligned} \xi^2 \left\{ \frac{1}{F} \frac{d^2 F}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{1}{F} \frac{dF}{d\xi} \right\} = \\ = - \frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{G} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial G}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{1}{G} \frac{\partial^2 G}{\partial \phi^2} = \underbrace{n(n+1)}_{\text{constante de separación}} \end{aligned} \quad (9.4)$$

La selección de $n(n+1)$ como la constante de separación simplificará el desarrollo de las soluciones dependientes del ángulo θ . No es difícil obtener de este resultado las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\xi^2 \frac{d^2 F}{d\xi^2} + 2\xi \frac{dF}{d\xi} - n(n+1)F = 0 \quad (9.5)$$

$$\text{y} \quad \frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial G}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 G}{\partial \phi^2} + n(n+1)G = 0 \quad (9.6)$$

Las soluciones $G(\theta, \phi)$, de la última ecuación se conocen como armónicos superficiales. Procederemos a encontrar la solución de la ec. (9.5). Esta se conoce como la ecuación equidimensional o de Euler. Se propone

$$F(\xi) = \xi^\alpha \quad (9.7)$$

$$\text{Así que} \quad F' = \alpha \xi^{\alpha-1} \quad \text{y} \quad F'' = \alpha(\alpha-1) \xi^{\alpha-2} \quad (9.8)$$

La substitución de las ecs. (9.7) y (9.8) en (9.5) da

$$\alpha(\alpha-1)\xi^\alpha + 2\alpha\xi^\alpha - n(n+1)\xi^\alpha = 0$$

$$\text{ó} \quad (\alpha - n)[\alpha + n + 1] = 0$$

Por lo tanto

$$F(\xi) = A\xi^n + B\xi^{-(n+1)} \quad (9.9)$$

Ahora se buscará la solución de (9.6), para ello se propone la separación

$$G(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi) \quad (9.10)$$

De la substitución de la ec. (9.10) en la (9.6) se obtiene

$$\text{sen}^2\theta \left\{ \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \frac{1}{\Theta} \frac{\cos\theta}{\text{sen}\theta} \frac{d\Theta}{d\theta} + n(n+1) \right\} = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = m^2 \quad (9.11)$$

De esta se pueden obtener sin mayor complicación las ecuaciones diferenciales siguientes

$$\text{sen}^2\theta \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \text{sen}\theta \cos\theta \frac{d\Theta}{d\theta} + [n(n+1)\text{sen}^2\theta - m^2] \Theta = 0 \quad (9.12)$$

$$\text{y} \quad \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + m^2 \Phi = 0 \quad (9.13)$$

La solución de la ec. (9.13) ya la conocemos y es

$$\Phi = C \text{sen}(m\phi) + D \cos(m\phi) \quad (9.14)$$

Y debido a la periodicidad en el ángulo ϕ los valores de m son enteros. Sin embargo la solución de (9.12) no la hemos visto aún. Antes de intentar la solución por el método de Frobenius se realizará el siguiente cambio de variable

$$x = \cos\theta \quad (9.15)$$

$$\frac{d\Theta}{d\theta} = \frac{d\Theta}{dx} \frac{dx}{d\theta} = -\text{sen}\theta \frac{d\Theta}{dx} \quad (9.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} &= \frac{d}{d\theta} \left(-\text{sen}\theta \frac{d\Theta}{dx} \right) = -\cos\theta \frac{d\Theta}{dx} - \text{sen}\theta \frac{dx}{d\theta} \frac{d^2 \Theta}{dx^2} \\ &= -\cos\theta \frac{d\Theta}{dx} + \text{sen}^2\theta \frac{d^2 \Theta}{dx^2} \end{aligned} \quad (9.17)$$

La substitución de las ecs. (9.15) a (9.17) en la ec. (9.12) nos lleva a

$$(1-x^2)(1-x^2) \frac{d^2 \Theta}{dx^2} - 2(1-x^2)x \frac{d\Theta}{dx} + [n(n+1)(1-x^2) - m^2] \Theta = 0$$

ó

$$(1-x^2) \frac{d^2 \Theta}{dx^2} - 2x \frac{d\Theta}{dx} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] \Theta = 0 \quad (9.18)$$

Esta es la ecuación asociada de Legendre. Cuando $m = 0$, la ecuación diferencial se conoce como la ecuación de Legendre. Obsérvese que como $0 < \theta < \pi$, entonces $-1 < x < +1$. esta ecuación tiene puntos singulares en $x = \pm 1$. Sin embargo, $x = 0$ es un punto ordinario. Usando el método de Frobenius se buscarán las soluciones de la ec. (9.18) para el caso $m = 0$. Posteriormente el resultado puede usarse para obtener la solución para cualquier m . Para $m = 0$ y usando $y = \Theta(x)$ la ec. (9.18) toma la forma

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0 \quad (9.19)$$

Se propone la solución de la forma

$$y = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \quad (9.20)$$

De la cual podemos obtener la primera y segunda derivadas

$$y' = \sum_{j=0}^{\infty} a_j j x^{j-1} \quad (9.21)$$

$$y'' = \sum_{j=0}^{\infty} a_j j(j-1) x^{j-2} \quad (9.22)$$

Substituyendo las ecs. (9.20) a (9.22) en la (9.19) se obtiene

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j j(j-1) x^{j-2} - \sum_{j=0}^{\infty} a_j [j(j-1)x^j + 2jx^j - n(n+1)x^j] = 0$$

Ahora reemplazando $j = p+2$ en el primer término

$$\sum_{p=-2}^{\infty} a_{p+2} (p+1)(p+2) x^p - \sum_{j=0}^{\infty} a_j [j(j-1) + 2j - n(n+1)] x^j = 0$$

ó

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{j+2} (j+1)(j+2) x^j - \sum_{j=0}^{\infty} a_j [j(j-1) + 2j - n(n+1)] x^j = 0$$

De esta se puede obtener la siguiente fórmula de recurrencia

$$a_{j+2} = \frac{j(j+1) - n(n+1)}{(j+1)(j+2)} a_j, \quad \text{para } j \geq 0 \quad (9.23)$$

La cual se puede reescribir como

$$a_{j+2} = -\frac{(n-j)(n+j+1)}{(j+1)(j+2)} a_j, \quad \text{para } j \geq 0$$

Los primeros valores de ella son

$$\begin{aligned}
\text{Para } j=0 \quad a_2 &= -\frac{n(n+1)}{2} a_0 \\
j=1 \quad a_3 &= -\frac{(n-1)(n+2)}{2 \cdot 3} a_1 \\
j=2 \quad a_4 &= -\frac{(n-2)(n+3)}{3 \cdot 4} a_2 \\
j=3 \quad a_5 &= -\frac{(n-3)(n+4)}{4 \cdot 5} a_3 \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Por lo tanto la solución dada por la ecuación (9.20) es

$$\begin{aligned}
y(x) = a_0 &\left[1 - \frac{n(n+1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!} x^4 - \dots \right] \\
&+ a_1 \left[x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!} x^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!} x^5 - \dots \right] \quad (9.24)
\end{aligned}$$

Se puede demostrar que los polinomios convergen para $|x| \leq 1$ solo si el coeficiente n es entero. Entonces la ec. (9.24) puede escribirse como

$$y(x) = a_0 u_0(x) + a_1 v_1(x) \quad (9.25)$$

En donde se ha usado la siguiente definición

$$\begin{aligned}
n = \text{par positivo} &\begin{cases} u_0(x) \text{ es un polinomio finito} \\ v_1(x) \text{ es una serie infinita} \end{cases} \\
n = \text{non positivo} &\begin{cases} v_1(x) \text{ es un polinomio finito} \\ u_0(x) \text{ es una serie infinita} \end{cases}
\end{aligned}$$

O sea que solo cuando $n = \text{entero}$ $\Theta(x)$ es finita en $x = \pm 1$. Las soluciones $\Theta(x)$ de la ec. (9.18) se denominan los polinomios de Legendre

$$\Theta(x) = P_n(x) \quad (9.26)$$

Estos polinomios están relacionados por la fórmula de Rodríguez

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (9.27)$$

Los primeros cuatro términos son

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

Estos los mostramos gráficamente en la siguiente figura

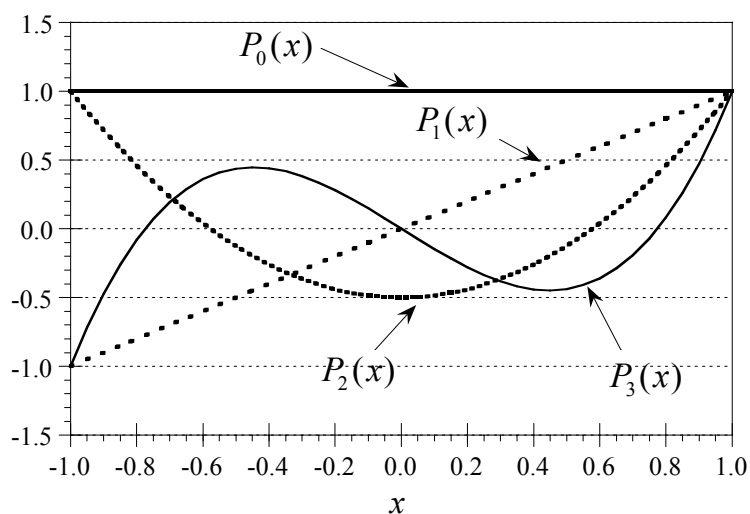


Figura 7. Polinomios de Legendre $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ y $P_3(x)$.

Nótese que puesto que $x = \cos \theta$

$$P_0(\cos \theta) = 1$$

$$P_1(\cos \theta) = \cos \theta$$

$$P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$P_3(\cos \theta) = \frac{1}{2}(5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$$

10. Ortogonalidad de los polinomios de Legendre

De la ecuación (9.19) se obtiene

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + n(n+1)y = 0 \quad (10.1)$$

Comparando esta con la ecuación diferencial del problema de Sturm-Liouville se concluye

$$\lambda = (n+1)n, \quad p(x) = 1-x^2, \quad w(x) = 1, \quad q(x) = 0$$

De tal manera que

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x) P_m(x) dx = 0, \quad \text{para } n \neq m \quad (10.2)$$

Se puede demostrar el siguiente resultado muy útil en la evaluación de coeficientes de expansiones en series de polinomios de Legendre

$$\int_{-1}^{+1} [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1} \quad (10.2)$$

11. La ecuación asociada de Legendre

Anteriormente se encontró que la ecuación asociada de Legendre es

$$(1-x^2)\frac{d^2 \Theta}{dx^2} - 2x\frac{d \Theta}{dx} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] \Theta = 0 \quad (11.1)$$

Las soluciones de esta ecuación son los polinomios asociados de Legendre definidos en términos de los polinomios de Legendre $P_n(x)$ por

$$\Theta_n^m(x) = P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}, \quad \text{para } 0 \leq m \leq n \quad (11.2)$$

O también por la fórmula de Rodríguez

$$P_n^m(x) = \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^n n!} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2-1)^n \quad (11.3)$$

Para determinar si los polinomios de Legendre son ortogonales o no se escribe la ec. (11.1) en una forma similar a la ecuación diferencial del problema de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d \Theta}{dx} \right] + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] \Theta = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + [q(x) + \lambda w(x)] y = 0$$

Nótese que $p(x) = 1-x^2$, y que se puede seleccionar

$$q(x) = -\frac{m^2}{1-x^2}, \quad \lambda = n(n+1) \quad (11.4)$$

de tal manera que

$$w(x) = 1 \quad (11.5)$$

Por lo tanto la condición de ortogonalidad sería

$$\int_{-1}^{+1} P_n^m(x) P_k^m(x) dx = 0, \quad \text{para } n \neq k \quad (11.6)$$

También se puede encontrar

$$\int_{-1}^{+1} [P_n^m(x)]^2 dx = \frac{2(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!} \quad (11.7)$$

Este resultado es independiente de las condiciones de frontera. Nótese que en contraste con lo mostrado en la ec. (11.4) se podría seleccionar

$$q = n(n+1), \quad \lambda = m^2 \quad (11.8)$$

y en esta ocasión

$$w(x) = \frac{m^2}{1-x^2} \quad (11.9)$$

esto hace que la condición de ortogonalidad sea

$$\int_{-1}^{+1} \frac{P_n^m(x) P_n^k(x)}{1-x^2} dx = 0, \quad \text{para } n \neq k \quad (11.10)$$

Y además se puede demostrar

$$\int_{-1}^{+1} \frac{[P_n^m(x)]^2}{1-x^2} dx = \frac{(n+m)!}{m(n-m)!} \quad (11.11)$$

Este resultado es también independiente de las condiciones de frontera.

Algunos ejemplos de los polinomios asociados de Legendre son

$$P_1^1(x) = (1-x^2)^{1/2} = \sin \theta \quad (11.12a)$$

$$P_2^1(x) = 3x(1-x^2)^{1/2} = 3 \cos \theta \sin \theta \quad (11.12b)$$

$$P_2^2(x) = 3(1-x^2) = 3 \sin^2 \theta \quad (11.12c)$$

Ejemplo 7

En este caso resolveremos el problema en estado estacionario de conducción de calor en una esfera cuya superficie se mantiene constante a lo largo del tiempo pero es función de la posición sobre ella. Por ello, como vimos al comienzo de nuestro estudio de polinomios de Legendre la temperatura adimensional en este caso está gobernada por la ecuación

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^2 \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\xi^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\xi^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 \quad (\text{E7.1})$$

en donde

$$u = u(\xi, \theta, \phi) \quad (\text{E7.2})$$

válida en $0 \leq \xi < 1, \quad 0 \leq \theta < \pi, \quad 0 \leq \phi < 2\pi$

Se supondrá que la ecuación diferencial debe ser resulta sujeta a la siguiente condición de frontera

$$\text{en } \xi = 1 \quad u = f(\theta, \phi) \quad (\text{E7.3})$$

Solo se establece una condición de frontera, sin embargo el problema está totalmente definido ya que está implícito a que la solución es periódica tanto en el ángulo θ , como en el ángulo ϕ . Además, como el dominio radial incluye el centro de la esfera $\xi = 0$, el que la solución deba estar definida en $0 \leq \xi < 1$ nos permitirá encontrar alguna de las constantes de integración. Así el problema no solo está definido completamente, sino además puede ser resuelto por el método de separación de variables ya que las condiciones periódicas en las dependencias angulares llevan a problemas de Sturm-Liouville en esas variables.

Para encontrar la solución se propone la separación

$$u = F(\xi) \Theta(\theta) \Phi(\phi) \quad (\text{E7.4})$$

La cual substituida en la ec. (E7.1) eventualmente nos lleva a las tres ecuaciones diferenciales ordinarias siguientes

$$\xi^2 \frac{d^2 F}{d \xi^2} + 2\xi \frac{d F}{d \xi} - n(n+1)F = 0 \quad (\text{E7.5})$$

$$\sin^2 \theta \frac{d^2 \Theta}{d \theta^2} + \sin \theta \cos \theta \frac{d \Theta}{d \theta} + [n(n+1) \sin^2 \theta - m^2] \Theta = 0 \quad (\text{E7.6})$$

$$\text{y} \quad \frac{d^2 \Phi}{d \phi^2} + m^2 \Phi = 0 \quad (\text{E7.7})$$

Como revisamos anteriormente las soluciones de las ecs. (E7.5) a (E7.6) son

$$F(\xi) = A \xi^n + B \xi^{-(n+1)} \quad (\text{E7.8})$$

$$\Phi(\phi) = C \sin(m\phi) + D \cos(m\phi), \quad \text{para } m = 0, 1, 2, 3 \dots \infty \quad (\text{E7.9})$$

$$\Theta_n^m(x) = P_n^m(x) \quad \text{para} \quad \begin{cases} n = 0, 1, 2, \dots, \infty \\ m = 0, 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (\text{E7.10})$$

Por lo tanto las soluciones particulares de la ecuación diferencial (E7.1) son

$$\begin{aligned} u_{nm}(\xi, \theta, \phi) = & \left(A_{nm} \xi^n + B_{nm} \xi^{-(n+1)} \right) \sin(m\phi) P_n^m(x) \\ & + \left(C_{nm} \xi^n + D_{nm} \xi^{-(n+1)} \right) \cos(m\phi) P_n^m(x) \end{aligned} \quad (\text{E7.11})$$

y la solución general es

$$u(\xi, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n u_{nm}(\xi, \theta, \phi) \quad (\text{E7.12})$$

Como se desea la temperatura dentro de la esfera las constantes correspondientes a los términos con potencias negativas del radio

$$B_{nm} = D_{nm} = 0 \quad (\text{E7.13})$$

Esto porque la temperatura, como mencionamos antes, debe ser finita en $\xi = 0$.

Para obtener las constantes de integración restantes utilizaremos la condición de frontera en la superficie de la esfera dada por la ec. (E7.3). Así la substitución de la condición mencionada en la ec. (E7.12) junto con la ec. (E7.11) nos lleva a

$$f(\theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n A_{nm} \sin(m\phi) P_n^m(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n C_{nm} \cos(m\phi) P_n^m(x) \quad (\text{E7.12})$$

Para obtener A_{nm} esta ecuación se debe multiplicar por $\sin(p\phi)$ e integrar en $[0, 2\pi]$

$$\int_0^{2\pi} f(\theta, \phi) \sin(m\phi) d\phi = \sum_{n=0}^{\infty} A_{nm} P_n^m(x) \int_0^{2\pi} \sin^2(m\phi) d\phi$$

Ahora se debe multiplicar por $P_k^m(x)$, usar la función de ponderación $w=1$ e integrar en $[-1, +1]$

$$\int_{-1}^{+1} P_n^m(x) \left[\int_0^{2\pi} f(\theta, \phi) \sin(m\phi) d\phi \right] dx = A_{nm} \left(\int_{-1}^{+1} [P_n^m(x)]^2 dx \right) \left(\int_0^{2\pi} \sin^2(m\phi) d\phi \right)$$

De esta ecuación se puede entonces determinar A_{nm} . La constante C_{nm} se obtiene por un procedimiento similar. Debemos notar que si la región en donde se desea conocer la temperatura en $1 \leq \xi < \infty$, entonces

$$A_{nm} = C_{nm} = 0 \quad (\text{E7.13})$$

esto porque u es finita cuando $\xi \rightarrow \infty$.

El procedimiento para determinar B_{nm} y D_{nm} en este caso es similar al utilizado para calcular anteriormente A_{nm} y C_{nm} para el caso $\xi \leq 1$. Si el dominio fuera $1 \leq \xi < \xi_o$ se requeriría otra condición de frontera en $\xi = \xi_o$ además de la de $\xi = 1$.

Algunas observaciones sobre las soluciones obtenidas

Es crucial para aplicar con fluidez el método de separación de variables y sus variaciones a problemas en sistemas de coordenadas diferentes a las cartesianas darse cuenta que en este caso los problemas de Sturm-Liouville en términos de funciones Bessel o de Legendre son análogos a los resultantes con funciones trigonométricas. Esto significa que así como el estar familiarizado con el comportamiento del seno, coseno y sus combinaciones ayuda a desarrollar las soluciones analíticas en coordenadas cartesianas, debemos familiarizarnos lo más posible con las funciones de Bessel y polinomios de Legendre. De otra manera se pagará el precio de tener que consultar constantemente manuales y notas. Esto de ninguna manera impedirá la solución de problemas, pero si lo hará más lento.

Una vez reconocido esto, es casi tan difícil o tan fácil, como en el caso de coordenadas cartesianas, el proceder a la búsqueda de soluciones de problemas en coordenadas cilíndricas y esféricas. Este comentario se aplica en realidad a cualquier sistema coordenado ortogonal, ya que el procedimiento de separación de variables, superposición y desarrollo de solución en series debe satisfacer las mismas condiciones que en problemas en sistemas coordenados cartesianos.

Problemas propuestos

Para las siguientes cuatro ecuaciones diferenciales use el método de Frobenius para obtener dos soluciones por expansión en series alrededor de $x=0$ linealmente independientes (Tomados del texto de Zill and Cullen)

1. $2xy'' - y' + 2y = 0$

2. $2xy'' - (3 + 2x)y' + y = 0$

3. $2x^2y'' + 3xy' + (2x - 1)y = 0$

4. $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{4}{9}\right)y = 0$

Para las siguientes cuatro ecuaciones diferenciales use el método de Frobenius para obtener al menos una solución por expansión en series alrededor de $x=0$ (Tomados del texto de Zill and Cullen). Encuentre una segunda solución linealmente independiente de la primera por el método de variación de parámetros.

5. $xy'' + 2y' - xy = 0$

6. $xy'' + (1 - x)y' - y = 0$

7. $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$

8. $y'' + \frac{3}{x}y' - 2y = 0$

Problema 9

Encuentre la solución de la ecuación diferencial $xy'' + 3y' + 4x^3y = 0$ usando el método de Frobenius.

Problema 10

(Tomado del texto de Zill y Cullen, 2000)

- (a). La ecuación diferencial $x^4 y'' + \lambda y = 0$ tiene un punto irregular singular en $x = 0$. Demuestre que el cambio de variable $t = x^{-1}$ transforma la ecuación original a

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{2}{t} \frac{dy}{dt} + \lambda y = 0$$

que tiene un punto singular en $t = 0$.

- (b) Use el método de Frobenius para encontrar dos soluciones, por expansión en series alrededor $t = 0$, de la ecuación anterior.
- (c). Escriba cada una de las soluciones en series en términos de funciones elementales.

Problema 11

- (a) Desarrolle una solución en series para la ecuación diferencial de Hermite

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2\alpha y = 0$$

- (b) Demuestre que las dos series infinitas (y_{par} y y_{non}) obtenidas son convergentes y que se comportan en forma similar a la expresión en series de $\exp(2x^2)$.
- (c) Demuestre que con una selección apropiada de α las series pueden ser convertidas a polinomios finitos. Estos polinomios propiamente normalizados son los polinomios de Hermite [Spiegel (pag. 151)]

Problema 12

Dado que una solución de

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{m^2}{r^2} R = 0$$

es $R = r^m$, demuestre con ayuda del Wronskiano que la segunda solución es $R = r^{-m}$.

Problema 13

- (a) Una solución de la ecuación diferencial de Hermite para $\alpha = 0$ es $y_1(x) = 1$. Encuentre la segunda solución usando el Wronskiano. Demuestre que esta segunda solución es equivalente a y_{par} (Problema 1).
- (b) usando el wronskiano encuentre una solución para $\alpha = 1$, donde $y_1(x) = x$. Demuestre que esta segunda solución es equivalente a y_{par} (Problema 11).

Problema 14

Resuelva el siguiente problema

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} = 0 \quad \text{en} \quad \begin{matrix} 0 \leq \xi \leq \zeta \\ 0 \leq Z \leq 1 \end{matrix} \quad (1)$$

sujeta a:

$$\text{en } Z = 1, \quad u = 0 \quad \text{para} \quad 0 < \xi < \zeta \quad (2)$$

$$\text{en } Z = 0, \quad u = 1 \quad \text{para} \quad 0 < \xi < \zeta \quad (2)$$

$$\text{en } \xi = \zeta, \quad u = 0, \quad \text{para} \quad 0 \leq Z \leq 1 \quad (3)$$

Problema 15

Resuelva el siguiente problema

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \quad \text{en} \quad \begin{matrix} 0 \leq \xi \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{matrix} \quad (1)$$

sujeta a:

$$\text{cuando } \tau = 0 \quad u = F(\xi, \theta) \quad (2)$$

$$\text{en } \xi = 1 \quad u = 1 \quad (3)$$

Problema 16

Resuelva el siguiente problema

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} \quad (1)$$

sujeta a

$$\text{en } Z = 0 \quad u = 1 \quad (2)$$

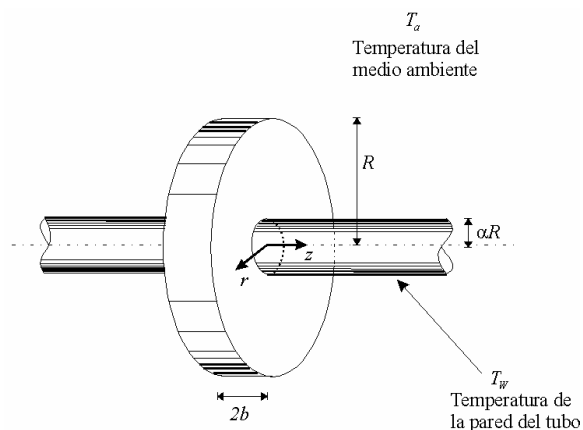
$$\text{en } Z = 1 \quad u = 0 \quad (3)$$

$$\text{en } \xi = \zeta \quad u = 0 \quad (4)$$

$$\text{cuando } \tau=0 \quad u = F(\xi, Z) \quad (5)$$

Problema 17

Encuentre el perfil de temperatura $T(r, z)$ en una aleta de enfriamiento como la mostrada en la figura siguiente



El problema esta definido por la ecuación diferencial

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, \text{ en } \begin{cases} \alpha R < r < R \\ -b < z < +b \end{cases} \quad (1)$$

sujeta a las condiciones de frontera

$$\text{en } r = \alpha R, \quad T = T_w \quad (2)$$

$$\text{en } r = R, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad (3)$$

$$\text{en } z = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

$$\text{en } z = b, \quad -k \frac{\partial T}{\partial z} = h(T - T_a) \quad (5)$$

Observa que se ha usado en el planteamiento de las condiciones de frontera en z la simetría del campo alrededor de $z = 0$ y que este está a la mitad del espesor de la aleta.

Problema 18

Escriba programas en FORTRAN para evaluar las soluciones obtenidas para los problemas 14, 15, 16 y 17.

Problema 19

Resuelva el siguiente problema definido en la sección cilíndrica mostrada más abajo:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \quad (1)$$

sujeta a:

$$\text{en } \theta = 0, 0 < \xi < 1 \quad u = 0 \quad (2)$$

$$\text{en } \theta = \frac{\pi}{2}, 0 < \xi < 1 \quad u = 0 \quad (3)$$

$$\text{en } \xi = 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \quad u = 0 \quad (4)$$

$$\text{cuando } \tau = 0 \quad u = \mathcal{F}(\xi, \theta) \quad (5)$$

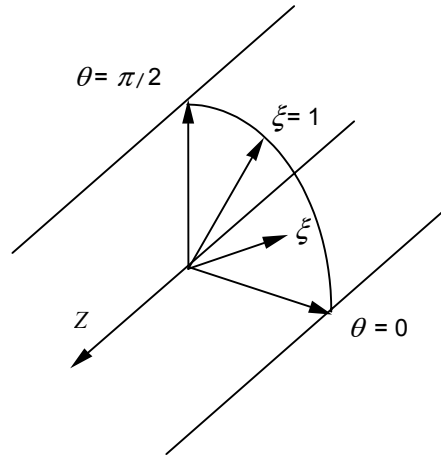


Figura problema 19

Problema 20

Resuelva el siguiente problema

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} = 0 \quad (1)$$

sujeta a

$$\text{en } Z = 0, 0 < \xi < 1 \quad u = 1 \quad (2)$$

$$\text{en } Z = \zeta, 0 < \xi < 1 \quad u = 0 \quad (3)$$

$$\text{en } \xi = 1, 0 < Z < \zeta \quad \frac{\partial u}{\partial \xi} + Bi u = 0 \quad (4)$$

Problema 21

Encuentre la distribución de temperatura adimensional $u = u(\xi, \theta, \phi)$ para una esfera que inicialmente está a la temperatura uniforme $u = 0$. Las condiciones de frontera son tales que la superficie de la mitad superior se mantiene en $u = 1$, y la superficie de la mitad inferior en $u = 0$.

Problema 22

La temperatura de una superficie esférica en $\xi = 1$ está dada por $u = \mathcal{F}(\theta)$. Si, $u \rightarrow 0$ cuando $\xi \rightarrow \infty$, encuentre la distribución de temperatura $u = u(\xi, \theta)$ en $1 < \xi < \infty$ y $0 < \theta < \pi$.

Problema 23

La temperatura adimensional de una esfera sumergida en un fluido a la temperatura conocida $u_\infty(\tau)$, está dada por

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^2 \frac{\partial u}{\partial \xi} \right)$$

Sujeta a las condiciones de frontera e inicial siguientes:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + N_{Bi} u = N_{Bi} u_\infty(\tau) \quad \text{en } \xi = 1, \text{ cuando } \tau > 0$$

$$\text{Cuando } \tau = 0 \quad u = \mathcal{F}(\xi), \text{ para } 0 \leq \xi \leq 1$$

Encuentre el perfil de temperatura $u(\xi, \tau)$

Problema 24.

Escriba programas en FORTRAN para evaluar las soluciones obtenidas para los problemas 19, 20, 21, 22 y 23.

Los siguientes problemas están relacionados a la situación de difusión y reacción en partículas catalíticas y se espera puedan descubrir la herramienta que se propone para tener una idea de la solución exacta de problemas transitorios

Problema 25

El problema unidimensional en estado estacionario de difusión y reacción en una partícula catalítica isotérmica cilíndrica con reacción de primer orden, para el caso de resistencia externa despreciable está dado por la ecuación de transporte

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{dU}{d\xi} \right) - \Phi^2 U = 0$$

y las condiciones de frontera

$$\text{En } \xi = 1 \quad U = U_{\infty}$$

$$U \text{ es finita en } 0 \leq \xi \leq 1$$

Encuentre el perfil de concentración adimensional $U(\xi)$ y el factor de efectividad definido por lo que reacciona en la partícula entre lo que reaccionaría si toda la concentración fuera la de la superficie, U_{∞} .

Problema 26

El problema similar al anterior en una partícula esférica está dado por la ecuación de transporte

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{dU}{d\xi} \right) - \Phi^2 U = 0$$

y las mismas condiciones de frontera

$$\text{En } \xi = 1 \quad U = U_{\infty}$$

$$U \text{ es finita en } 0 \leq \xi \leq 1$$

Encuentre el perfil de concentración adimensional $U(\xi)$ y el factor de efectividad definido por lo que reacciona en la partícula entre lo que reaccionaría si toda la concentración fuera la de la superficie, U_{∞} .

Problema 27

Para comparar las tres geometrías más comunes de partículas catalíticas, repita el problema similar al anterior en una placa en donde la ecuación de transporte es

$$\frac{d^2 U}{d\xi^2} - \Phi^2 U = 0$$

con las mismas condiciones de frontera

$$\text{En } \xi = 1 \quad U = U_{\infty}$$

$$\text{En } \xi = 0 \quad \frac{dU}{d\xi} = 0$$

Como antes encuentre el perfil de concentración adimensional $U(\xi)$ y el factor de efectividad. Grafique en una misma figura el factor de efectividad como función del módulo de Thiele para los tres tipos de partícula.

Problema 28

Normalmente la resistencia externa a la transferencia de masa no es despreciable y entonces la condición de frontera en la superficie en los tres problemas anteriores debe ser reemplazada por

$$\text{En } \xi = 1 \quad -\frac{dU}{d\xi} = Bi(U - U_\infty)$$

En donde Bi es el número de Biot y es ahora la concentración en el seno del fluido que fluye alrededor de la partícula. En este caso en las ecuaciones de transporte el módulo de Thiele es reemplazado por el módulo de Thiele a las condiciones del seno del fluido es decir ahora

$$\frac{d^2 U}{d\xi^2} - \Phi_G^2 U = 0.$$

Encuentra para partículas con forma de placa, cilindro y esfera el perfil de concentración y el factor de efectividad global como función del módulo de Thiele global. Debe tener en cuenta que el factor de efectividad ahora es lo que reacciona en la partícula entre lo que reaccionaría a las condiciones en el seno del fluido.

Problema 29

El problema difusión y reacción en una partícula esférica en estado transitorio está definido por

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^2 \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) - \Phi^2 U$$

Con la condiciones de frontera e inicial siguientes

$$\text{En } \xi = 1 \quad U = U_\infty(\tau) \quad \text{para } \tau > 0$$

$$U \text{ es finita en } 0 \leq \xi \leq 1$$

$$\text{Cuando } \tau = 0 \quad U = 0 \quad \text{para } 0 \leq \xi \leq 1$$

Encuentra el perfil de concentración $U(\xi, \tau)$ y el factor de efectividad $\eta(\tau)$ bajo la suposición del falso estado estacionario en la concentración de la partícula, es decir que el término de acumulación se desprecia.

Problema 30

Repita el ejercicio anterior tanto para una partícula cilíndrica como para una en forma de placa.

Problema 31

Repita el problema anterior para las tres geometrías básicas pero reemplazando la condición de frontera en la superficie por

$$\text{En } \xi = 1 \quad -\frac{dU}{d\xi} = Bi(U - U_\infty)$$

Problema 32

En muchas situaciones prácticas las partículas catalíticas están suspendidas en un fluido dentro de un tanque agitado. En el caso de partículas esféricas un modelo adimensional está dado por

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^2 \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) - \Phi^2 U$$

Sujeta a la condición de frontera

$$\text{En } \xi = 1 \quad -\frac{dU}{d\xi} = Bi(U - U_f)$$

En donde la concentración del fluido U_f , está gobernada por la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dU_f}{d\tau} = \tau_R^{-1} (U_{in}(\tau) - U_f) + \psi_p (U - U_f)$$

En esta ecuación τ_R y ψ_p son constantes que indican el tiempo de residencia adimensional y un número de Biot modificado respectivamente.

Las condiciones inicial para $U_f(\tau)$ y $U(\xi, \tau)$ son

$$\begin{aligned} \text{Cuando } \tau = 0 \quad U &= 0 \quad \text{para } 0 \leq \xi \leq 1 \\ \text{Cuando } \tau = 0 \quad U_f &= 0 \end{aligned}$$

Encuentre $U_f(\tau)$ y $U(\xi, \tau)$ suponiendo falso estado estacionario en la ecuación de la partícula.

Problema 33

Resuelva el problema anterior considerando que las partículas son cilíndricas.

Problema 34

Explore la solución por separación de variables o alguna de sus variaciones del problema completo planteado como problema 32.

Problema 35

El siguiente modelo puede usarse para estimar el efecto de mojado no uniforme en una partícula esférica

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^2 \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\xi^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) - \Phi^2 U$$

Con la condiciones de frontera e inicial siguientes

$$\text{En } \xi = 1 \quad U = U_{\infty}(\theta, \tau) \quad \text{para } \tau > 0$$

$$U \text{ es finita en } 0 \leq \xi \leq 1$$

$$\text{Cuando } \tau = 0 \quad U = 0 \quad \text{para } 0 \leq \xi \leq 1$$

Encuentra el perfil de concentración $U(\xi, \theta, \tau)$ y el factor de efectividad $\eta(\tau)$ bajo la suposición del falso estado estacionario en la concentración de la partícula, es decir que el término de acumulación se desprecia.

Problema 36

Encuentra el perfil de concentración $U(\xi, \theta, \tau)$ y el factor de efectividad $\eta(\tau)$ del modelo completo del problema anterior.

La solución de los siguientes cuatro problemas ayudará a entender una metodología para resolver problemas de difusión y reacción con cinéticas no lineales. El lector interesado debe consultar los artículos de Marroquín et al (1998, 1999) y Ochoa-Tapia et al (2005).

Problema 37

Considere el problema de difusión y reacción con cinética no lineal R , dado por

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{dU}{d\xi} \right) - \Phi^2 R = 0$$

y las condiciones de frontera

$$\text{En } \xi = 1 \quad U = U_\infty$$

$$U \text{ es finita en } 0 \leq \xi \leq 1$$

Linealice la expresión cinética utilizando series de Taylor alrededor de las condiciones en $\xi = 1$, para encontrar

$$R \approx \Lambda_1^2 U + \Lambda_0$$

Note que en esta expresión Λ_1^2 y Λ_0 son constantes. Encuentre el perfil de concentración $U(\xi)$ y el factor de efectividad.

Problema 38

Resuelva el problema 38 para partículas cilíndricas.

Problema 39

Considere el problema transitorio de difusión y reacción con cinética no lineal R , en una partícula cilíndrica y definido por

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) - \Phi^2 R$$

Con la condiciones de frontera e inicial siguientes

$$\text{En } \xi = 1 \quad U = U_\infty(\tau) \quad \text{para } \tau > 0$$

$$U \text{ es finita en } 0 \leq \xi \leq 1$$

$$\text{Cuando } \tau = 0 \quad U = 0 \quad \text{para } 0 \leq \xi \leq 1$$

Utilice las ideas planteadas en el problema 37 para encontrar el perfil de concentración $U(\xi, \tau)$ y el factor de efectividad $\eta(\tau)$ bajo la suposición del falso estado estacionario en la concentración de la partícula, es decir que el término de acumulación se desprecia.

Problema 40

En este problema se debe resolver el modelo linealizado del problema anterior sin imponer la suposición del falso estado estacionario en las partículas.

Problema 40

Explore el método de linealización de la expresión cinética para obtener una solución aproximada para la concentración del fluido y de las partículas catalíticas para el caso en que estas se encuentran suspendidas en un fluido perfectamente mezclado. Note que ahora el problema está dado por las ecuaciones del Problema 32 solo que con cinética no lineal. Detalles para la solución de este problema se encuentran reportados en los trabajos de Valdés Parada (2004, 2005).

V. La transformada de Laplace

0. Algunos comentarios sobre el material incluido en este capítulo

En este capítulo se revisa el método de la transformada de Laplace con el objeto de resolver problemas que tradicionalmente aparecen en el desarrollo de cursos de fenómenos de transporte, esto es problemas de conducción de calor y difusión de masa modelados por problemas lineales de valor inicial.

Por ello se empieza el desarrollo del tema mediante la solución de la ecuación diferencial ordinaria que gobierna la concentración de reactivo en un reactor isotérmico con agitación perfecta en el que existe una reacción de primer orden. Esto permite la presentación de los pasos cruciales para la obtención de la solución por este método. Después se revisa el procedimiento para encontrar algunas fórmulas de transformación sencilla, esto como explicación de cómo puede construirse parte de una tabla de transformadas de Laplace, lo cual lleva a la introducción de la Función gama y sus propiedades. Es adecuado revisar este tópico dada la frecuencia con que dicha función aparece en problemas de transporte de energía y masa en películas líquidas.

Se revisan entonces la solución de varios problemas de transporte de momentum viscoso, que son análogos a los de difusión de masa o calor. A través de ellos se introduce el teorema de Duhamel y la construcción de soluciones de problemas en términos de casos más sencillos. Para ello es necesario introducir el uso de la Regla de Leibnitz (la deducción se reporta en el Apéndice D). En los ejemplos mencionados se introduce la función error que es esencial para una discusión cuantitativa del comportamiento de la capa límite y los coeficientes de transporte asociados con ella.

A continuación se revisa el método de inversión de funciones en el dominio de Laplace basado en la fórmula de Heaviside. Como se podrá ver, de comprenderse esta manera de obtener inversas, la posibilidad de resolver problemas aumenta significativamente. Finalmente se introduce la función delta y con ella se construye la solución a problemas del tipo encontrado en separaciones cromatográficas.

Se proponen más de 30 problemas al final de capítulo, algunos de ellos están basados en resultados publicados recientemente. Es nuestra idea que tales herramientas y conceptos deben permitir al lector el intentar la solución de una gran variedad de problemas relacionados a fenómenos de transporte.

Sobre las referencias

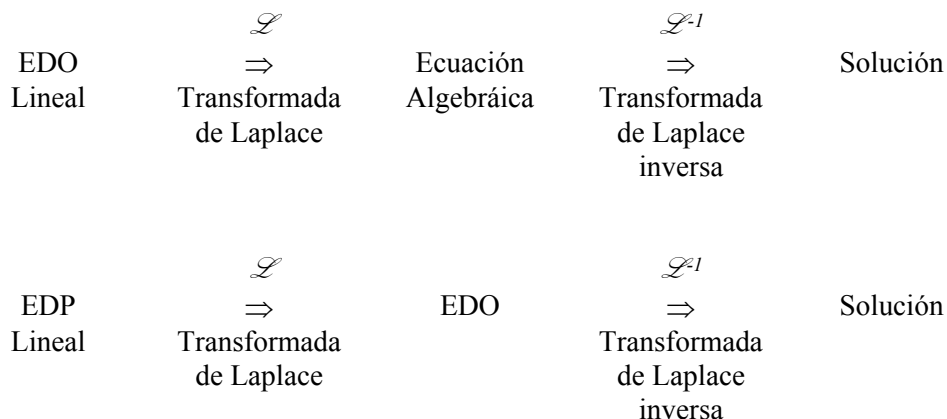
Cualquier lector que desee profundizar sobre el tema debe referirse al texto de Churchill [3]. Pero podría ser necesario primero revisar los capítulos 12 y/o 5 de los libros de

Greenberg [4] y Kreyszig [6]. En el libro de Hildebrand [5] se encuentran varios ejemplos interesantes que el lector debería revisar antes de pasar a problemas más complicados. Todo indica que casos más complejos a los revisados requerirán del conocimiento de variable compleja para encontrar la inversa, para ello es recomendable antes de revisar el texto de Churchill las tres referencias antes mencionadas [4, 5, 6].

1. Introducción: Solución del problema de un tanque agitado con reacción química.

Este método lleva el nombre de su autor, Pierre Simon (El marqués de Laplace), que fue un astrónomo y matemático francés que vivió de 1749 a 1827.

El método es muy útil para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales reduciendo la complejidad del problema inicial.



Se empezará a revisar ésta técnica mediante un ejemplo común en Ingeniería Química. En el problema de reacción en un tanque perfectamente agitado, como el mostrado en la Figura 1, el balance de masa resultante es

$$V \frac{dC}{dt} = Q(C_i - C) - kCV$$

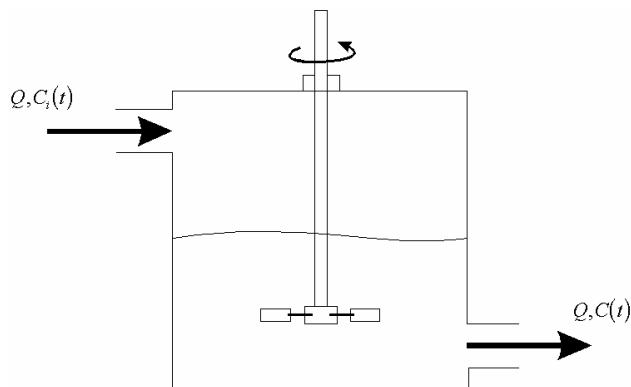


Figura 1. Reactor perfectamente agitado con volumen de mezcla de reacción, V .

que se puede escribir como

$$\frac{dC}{dt} = \frac{1}{\tau} [C_i(t) - C] - kC \quad (1.1)$$

donde $\tau = V/Q$ es el tiempo de residencia promedio. La ec. (1.1) se resolverá sujeta a la siguiente condición inicial

$$C = C_0 \quad \text{en} \quad t = 0 \quad (1.2)$$

Se supondrá que la concentración en la entrada esta dada por la forma exponencial

$$C_i(t) = C_{i0} \exp(at) \quad (1.3)$$

en donde C_{i0} es una constante. Ahora se introduce la definición de la transformada de Laplace dada por

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (1.4)$$

en donde s es una constante. La integral resultante es denominada la transformada de Laplace de la función $f(t)$, y es una función de s ,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \bar{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (1.5)$$

A continuación se aplica el operador definido por la ec. (1.4) a la ec. (1.1). O sea, se multiplica la ec. (1.1) por e^{-st} y se integra en el intervalo $[0, \infty)$.

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \frac{dC}{dt} dt = \frac{1}{\tau} \int_0^{\infty} e^{-st} C_i dt - \frac{1}{\tau} \int_0^{\infty} e^{-st} C dt - k \int_0^{\infty} e^{-st} C dt \quad (1.6)$$

Nótese que el segundo y tercer término de la derecha involucran la transformada de Laplace (TL) de $C(t)$ o sea

$$\bar{C}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} C(t) dt \quad (1.7)$$

El primer término de la derecha contiene la TL de $\bar{C}_i(t)$, o sea

$$\bar{C}_i(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \bar{C}_i(t) dt \quad (1.8)$$

El primer término de la ec. (1.6) en la izquierda se puede encontrar integrando por partes

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \frac{dC}{dt} dt = e^{-st} C(t) \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} C(t) dt = s \bar{C}(s) - c_0 \quad (1.9)$$

La substitución de (1.7), (1.8) y (1.9) en (1.6) da

$$s \bar{C}(s) - C_0 = \frac{1}{\tau} [\bar{C}_i - \bar{C}] - k \bar{C} \quad (1.10)$$

Ahora se necesita completar la integración en (1.8) para encontrar $\bar{C}_i(s)$,

$$\begin{aligned}\bar{C}_i(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} C_i(t) dt \\ &= C_{i0} \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = -\frac{C_{i0}}{(s-a)} e^{-(s-a)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{C_{i0}}{(s-a)}\end{aligned}$$

Por lo tanto, la ec. (1.10) se puede escribir como

$$s \bar{C}(s) - \underbrace{C_0}_{\text{Condición inicial}} = \underbrace{\frac{1}{\tau} \left[\frac{C_{i0}}{(s-a)} - \bar{C} \right]}_{\text{Transformada de la concentración de la entrada}} - k \bar{C} \quad (1.11)$$

Despejando $\bar{C}(s)$ de (1.11) se obtiene

$$\bar{C}(s) = \frac{C_0}{s + k + 1/\tau} + \frac{C_{i0}}{\tau(s-a)(s + k + 1/\tau)} \quad (1.12)$$

El problema ahora es encontrar la función $C(t)$ cuya transformada de Laplace es $\bar{C}(s)$, o sea la transformada de Laplace inversa de $\bar{C}(s)$,

$$C(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\bar{C}(s)\}$$

Si se dispone de una tabla de TL, la operación de encontrar la inversa de $\bar{C}(s)$ es más fácil. Por ejemplo, se ha demostrado que

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \frac{1}{s-a} \quad (1.13)$$

Por lo tanto la inversa del primer término del miembro derecho de (1.12) es

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{C_0}{s + k + 1/\tau}\right\} = C_0 \exp[-(k + 1/\tau)t] \quad (1.14)$$

La inversa del segundo término se puede encontrar de la misma forma si se utiliza el método de fracciones parciales, o sea

$$\frac{1}{(s-a)(s + k + 1/\tau)} = \frac{A}{s-a} + \frac{B}{s + k + 1/\tau}$$

en donde

$$A = \frac{1}{a + k + 1/\tau} \quad \text{y} \quad B = -\frac{1}{a + k + 1/\tau}$$

o sea, la ec. (1.12) se puede escribir como

$$\bar{C}(s) = \frac{C_0}{s + k + 1/\tau} + \frac{C_{i0}}{\tau(a + k + 1/\tau)} \left\{ \frac{1}{s - a} - \frac{1}{s + k + 1/\tau} \right\} \quad (1.15)$$

Usando (1.13) en (1.15) se obtiene

$$\begin{aligned} C(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{\bar{C}(s)\} = \\ &= C_0 \exp[-(k + 1/\tau)t] \\ &\quad + \frac{C_{i0}}{\tau(a + k + 1/\tau)} \{ \exp[at] - \exp[-(k + 1/\tau)t] \} \quad (1.16) \end{aligned}$$

Esta es la solución al problema. Nótese que los pasos fueron:

1. Obtener la TL de la EDO.
2. Despejar la TL de la solución.
3. Encontrar la TL inversa usando tablas de TL.

A continuación se muestra la concentración a las salidas del reactor predicha por la ec.(1.16). Se consideran varios tiempos de residencia.

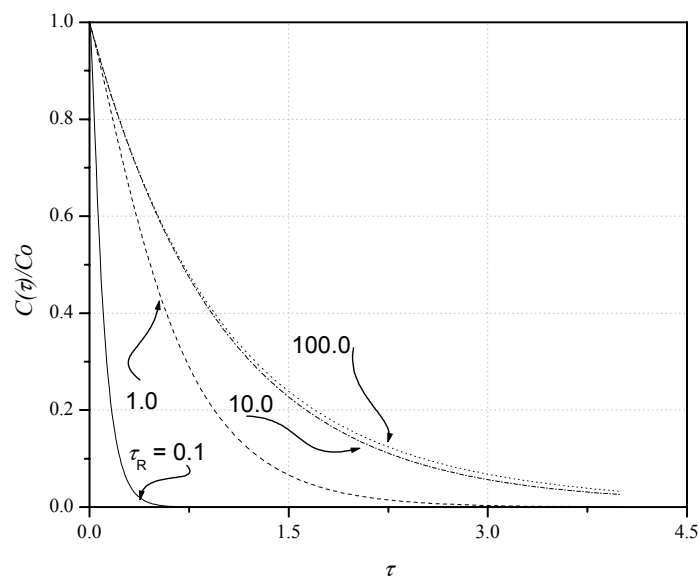


Figura 2. Perfiles de concentración para diferentes valores del tiempo de residencia

Debemos enfatizar que el método de la transformada de Laplace, usado para resolver el ejemplo anterior, se basa en la aplicación de la definición de la transformada de Laplace de una función $f(t)$ al dominio de Laplace

$$\bar{f}(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (1.17)$$

La transformada integral hace que la dependencia en el tiempo de la función original función de lugar a una cierta dependencia de $\bar{f}(s)$ con respecto al parámetro s (parámetro de Laplace). En el dominio de Laplace ya no hay dependencia con respecto al tiempo pero si con respecto al parámetro s . Sin embargo, este como su nombre lo dice es una constante y es lo que permitió transformar la ecuación diferencial ordinaria a una algebraica. Además, la transformada es un operador integral y como consecuencia la transformada tiene las propiedades de linealidad de ella.

Por otro lado al obtener la inversa se aceptó el que la inversa de una suma de transformadas es la suma de inversa de cada uno de los sumandos. En forma de ecuación esto es

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s) + \bar{g}(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{\bar{g}(s)\} = f(t) + g(t) \quad (1.18)$$

Esto está justificado porque la fórmula para obtener la función $f(t)$ a partir de $\bar{f}(s)$, en otras palabras la inversa $\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\}$, así como la transformada $\mathcal{L}\{f(t)\}$, es también una expresión integral, y está dada por

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{c-iT}^{c+iT} e^{st} \bar{f}(s) ds \quad (1.19)$$

Esta integral se debe realizar en el plano complejo s , La constante c debe seleccionarse de tal manera que todos los puntos singulares de $\bar{f}(s)$ se encuentren a la izquierda de la línea vertical definida por la parte real de s $\text{Re}\{s\} = c$. La demostración no es simple porque requiere involucrar ideas relacionadas a la transformada de Fourier y nosotros no estamos familiarizados totalmente con ellas. Por otro lado, para aplicar la fórmula y obtener inversas de ella es necesario tener un conocimiento razonable de variable compleja e integración con tal tipo de variable. Sin embargo, hay cosas prácticas que podemos concluir de la fórmula, ec. (1.17), para obtener la inversa de $\bar{f}(s)$. La más inmediata es que para obtener inversas se pueden aplicar las propiedades de la integral. Por ejemplo la inversa de una suma de funciones del parámetro “ s ” es la suma de la inversa de cada una de las funciones, ec. (1.18). O en forma más general

$$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha \bar{f}(s) + \beta \bar{g}(s)\} = \alpha \mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\} + \beta \mathcal{L}^{-1}\{\bar{g}(s)\} = \alpha f(t) + \beta g(t) \quad (1.20)$$

2. Transformadas de Laplace de funciones sencillas

En esta sección ejemplificaremos como usando la definición de la transformada de Laplace se pueden obtener algunas fórmulas para transformadas comunes. Además se introducirá la función gama que es muy útil en la solución de problemas de transporte de mas y calor en flujo laminar.

Se enumeran a continuación algunos ejemplos:

$$\text{a). } \mathcal{L}\{a\} = \int_0^{\infty} e^{-st} a \, dt = \frac{a}{s}$$

$$\text{b). } \mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s+a}$$

$$\text{c). } \mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\text{d). } \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$\text{e). } \mathcal{L}\{t^n\} = \int_0^{\infty} e^{-st} t^n \, dt$$

$$\text{Sí } t = \frac{z}{s}; \quad dt = \frac{dz}{s}$$

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \int_0^{\infty} e^{-z} \left(\frac{z}{s}\right)^n \frac{dz}{s} = \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^{\infty} e^{-z} z^n \, dz$$

Definición de la función gama

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-\xi} \xi^{x-1} \, d\xi$$

$$\text{Por lo que } \mathcal{L}\{t^n\} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$$

Ahora se revisarán algunas propiedades de la función gamma porque ella aparece frecuéntemente en la solución de problemas de ingeniería, en especial cuando se utiliza la teoría de capa límite en el desarrollo teórico de coeficientes de transferencia de masa y calor en películas líquidas.

3. Propiedades de la función gama

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = \underbrace{e^{-t} \frac{t^x}{x}}_0^{\infty} + \frac{1}{x} \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt}_{\frac{\Gamma(x+1)}{x}}$$

donde se usó integración por partes con

$$\begin{aligned} u &= e^{-t} & dv &= t^{x-1} dt \\ du &= -e^{-t} dt & v &= \frac{t^x}{x} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$$

que es una fórmula de recurrencia. Usando esta fórmula se obtiene

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$$

así

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= \Gamma(1) = 1 \\ \Gamma(3) &= 2 \Gamma(2) = 2 \\ \Gamma(4) &= 3 \Gamma(3) = 3! \\ \Gamma(5) &= 4 \Gamma(4) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 4! \end{aligned}$$

o sea

$$\Gamma(n+1) = n!$$

En tablas se encuentran los valores de $\Gamma(x)$ en el rango $1 \leq x \leq 2$. Así, para encontrar $\Gamma(x)$ en el rango $0 < x < 1$, se usó

$$\Gamma(x) = x^{-1} \underbrace{\Gamma(x+1)}_{\substack{\text{valores} \\ \text{tabulados}}}$$

Para encontrar $\Gamma(x)$ cuando $x \geq 2$, haga

$$x = \underbrace{x_0}_{1 < x_0 < 2} + \underbrace{N}_{\text{entero}}$$

$$\Gamma(x_0 + 1) = x_0 \Gamma(x_0)$$

$$\Gamma(x_0 + 2) = (x_0 + 1) x_0 \Gamma(x_0)$$

$$\Gamma(x_0 + 3) = (x_0 + 2)(x_0 + 1) x_0 \Gamma(x_0)$$

$$\vdots$$

$$\underbrace{\Gamma(x_0 + N)}_{\text{valor deseado}} = (x_0 + N - 1)(x_0 + N - 2) \dots (x_0 + 1) x_0 \underbrace{\Gamma(x_0)}_{\text{valor tabulado}}$$

4. Propiedades de la transformada de Laplace

Se ha definido la transformada de Laplace (TL) como

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \bar{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (4.1)$$

para valores de s para los cuales la integral existe.

a). El operador $\mathcal{L}\{ \}$ es lineal

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\} \quad (4.2)$$

b). La $\mathcal{L}\{ \}$ de derivadas de $f(t)$ esta dada por

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f}{dt^n}\right\} = s^n \bar{f}(s) - [s^{n-1} f(0) + s^{n-2} f^{(1)}(0) + s^{n-3} f^{(2)}(0) + \dots + f^{(n-1)}(0)] \quad (4.3)$$

Ejemplo:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = s \bar{f}(s) - f(0) \quad (4.4)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2 f}{dt^2}\right\} = s^2 \bar{f}(s) - [s f(0) + f^{(1)}(0)] \quad (4.5)$$

La demostración de la ec. (4.3) se puede obtener por integración por partes sucesivas. El índice superior indica el orden de las derivadas de $f(t)$.

c). La $\mathcal{L}\{ \}$ de la integral de $f(t)$ está dada por

$$\mathcal{L}\left\{\int_a^t f(\zeta) d\zeta\right\} = \frac{1}{s} \mathcal{L}\{f\} + \frac{1}{s} \int_a^0 f(\zeta) d\zeta \quad (4.6)$$

demostración:

$$\mathcal{L}\left\{\int_a^t f(\zeta) d\zeta\right\} = \int_0^{\infty} e^{-st} dt \int_a^t f(\zeta) d\zeta \quad (4.7)$$

$$\text{Si } u = \int_a^t f(\zeta) d\zeta ; \quad du = f(t) dt$$

$$\text{y } dv = e^{-st} dt ; \quad v = -\frac{1}{s} e^{-st}$$

por lo tanto (4.7)

$$\mathcal{L}\left\{\int_a^t f(\zeta) d\zeta\right\} = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \int_a^t f(\zeta) d\zeta \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{1}{s} e^{-st} f(t) dt$$

$$= \frac{1}{s} \mathcal{L}\{f(t)\} + \frac{1}{s} \int_a^0 f(\zeta) d\zeta$$

d). Primer teorema del desplazamiento (shifting theorem).

$$\mathcal{L}\{e^{-at} f(t)\} = \bar{f}(s+a) \quad (4.8)$$

demostración

$$\mathcal{L}\{e^{-at} f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} f(t) dt = \bar{f}(s+a)$$

e). Segundo teorema del desplazamiento.

Si $\mathcal{U}(t-a)$ es una función escalón de tal manera que

$$\mathcal{U}(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t \geq a \end{cases}$$

entonces

$$\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-a) f(t-a)\} = e^{-as} \bar{f}(s) \quad (4.9)$$

Demostración

$$\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-a) f(t-a)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \mathcal{U}(t-a) f(t-a) dt = \int_a^{\infty} e^{-st} f(t-a) dt$$

si $\zeta = t-a$

$$\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-a) f(t-a)\} = \int_0^{\infty} e^{-s(\zeta+a)} f(\zeta) d\zeta = e^{-sa} \bar{f}(s)$$

f). Otra relación útil

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n \bar{f}(s)}{ds^n} \quad (4.10)$$

demostración:

$$\frac{d \bar{f}}{ds} = \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = - \int_0^{\infty} e^{-st} [t f(t)] dt = - \mathcal{L}\{t f(t)\} \quad (4.11)$$

$$\frac{d^2 \bar{f}}{ds^2} = \int_0^{\infty} e^{-st} t^2 f(t) dt = \mathcal{L}\{t^2 f\}$$

$\vdots$

$$\frac{d^n \bar{f}}{ds^n} = (-1)^n \mathcal{L}\{t^n f(t)\}$$

g). Teorema de la convolución

La definición de la convolución de dos funciones $f(t)$ y $g(t)$ esta dada por la siguiente fórmula integral.

Convolución de f y g esta definida por

$$f * g = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau \quad (4.12)$$

Prueba:

$$f * g = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau$$

Sí $u = t - \tau$, $du = -d\tau$

o sea

$$f * g = - \int_t^0 f(u) g(t-u) du = \int_0^t f(u) g(t-u) du$$

o sea

$$f * g = g * f \quad (4.13)$$

El teorema de la convolución establece que

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{g * f\} = \bar{f}(s) \bar{g}(s) = \bar{g}(s) \bar{f}(s) \quad (4.14)$$

Demostración

$$\begin{aligned} \bar{f}(s) \bar{g}(s) &= \int_0^\infty e^{-su} f(u) du \int_0^\infty e^{-sv} g(v) dv = F(s) \\ F(s) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u+v)s} f(u) g(v) du dv \end{aligned} \quad (4.15)$$

Si hacemos $u = t - v$ entonces $du = dt$

Y la primer integral en la ecuación (4.15) toma la forma

$$\int_0^\infty e^{(u+v)s} f(u) du = \int_v^\infty e^{-st} f(t-v) dt \quad (4.16)$$

Así (4.15) toma la forma

$$F(s) = \int_0^\infty \int_v^\infty e^{-st} f(t-v) g(v) dt dv \quad (4.17)$$

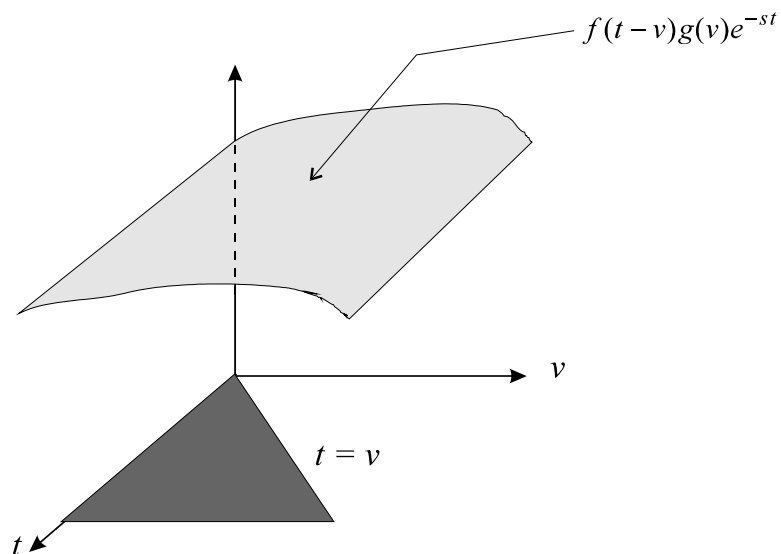


Figura 3. Dominio de integración e integrando de la integral doble dada por la ecuación (4.17).

Invocando el teorema de Fubini en la integral anterior se puede invertir el orden de integración y obtener

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt \int_0^t f(t-v) g(v) dv \quad (4.18)$$

esto porque (4.17) y (4.18) indican la misma región de integración (página 64-65, Hildebrand). Nótese que (4.18) da

$$F(s) = \mathcal{L} \{ f * g \}$$

que es lo mismo que

$$\bar{f}(s) \bar{g}(s) = \mathcal{L} \{ f * g \}$$

Las propiedades que acabamos de revisar junto con el método de fracciones parciales son unas de las herramientas más poderosas para invertir expresiones en el dominio de Laplace al dominio del tiempo. Ahora se revisarán algunos ejemplos.

Ejemplo 1: Una aplicación en un dominio semi infinito: la placa súbitamente acelerada

El problema que se resolverá corresponde a la situación mostrada en la siguiente figura:

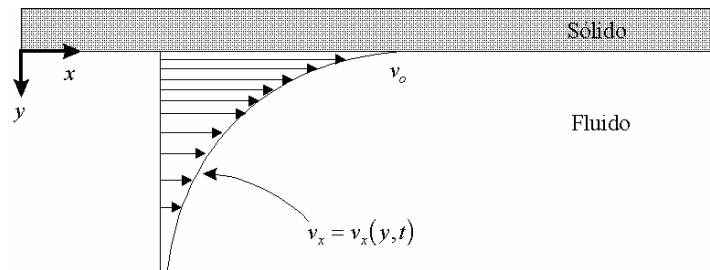


Figura 4. Placa plana en contacto con una gran masa de fluido. Se muestra el perfil de velocidad para un tiempo dado y considerando que la velocidad de la placa se mantiene constante cuando $\tau > 0$.

Si el movimiento del fluido es laminar y por ello unidimensional entonces la componente de su velocidad paralela a la placa está dada por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (\text{E1.1})$$

con condiciones de frontera e inicial

$$\text{en } y = 0 \quad v_x = v_0, \text{ para } t > 0 \quad (\text{E1.2})$$

$$\text{cuando } y \rightarrow \infty \quad v_x \rightarrow 0 \quad (\text{E1.3})$$

$$\text{cuando } t = 0 \quad v_x = 0 \quad (\text{E1.4})$$

Introduciendo la variable adimensional

$$u = v_x / v_0 \quad (\text{E1.5})$$

las ecs. (E1.1) a (E1.4) toman la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{E1.6})$$

con

$$\text{en } y = 0 \quad u = 1 \quad (\text{E1.7})$$

$$\text{cuando } y \rightarrow \infty \quad u \rightarrow 0 \quad (\text{E1.8})$$

cuando $t = 0$ (E1.9)

$$u = 0$$

Defina la TL como

$$\bar{u}(y, s) = \int_0^{\infty} e^{-st} u(y, t) dt \quad (\text{E1.10})$$

Tome la TL de la ec. (E1.6)

$$s \bar{u} - u(y, 0) = \nu \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2}, \quad \text{con } u(y, 0) = 0 \quad (\text{E1.11})$$

y las condiciones de frontera dan

$$\bar{u} = \frac{1}{s} \quad \text{en } y = 0 \quad (\text{E1.12})$$

$$\bar{u} = 0 \quad \text{para } y \rightarrow \infty \quad (\text{E1.13})$$

La solución de la ec. (E1.11) es

$$\bar{u} = A \exp\left(y \sqrt{\frac{s}{\nu}}\right) + B \exp\left(-y \sqrt{\frac{s}{\nu}}\right) \quad (\text{E1.14})$$

Para satisfacer (E1.13)

$$A = 0 \quad (\text{E1.15})$$

y para satisfacer (E1.12)

$$B = \frac{1}{s} \quad (\text{E1.16})$$

Por lo tanto, $\bar{u}(y, s)$ es

$$\bar{u} = \frac{1}{s} \exp\left(-y \sqrt{\frac{s}{\nu}}\right) \quad (\text{E1.17})$$

En tablas se encuentra

$\bar{f}(s)$	$f(t)$
$\frac{1}{s} \exp(-a\sqrt{s})$	$\text{erfc}\left(\frac{a}{\sqrt{4t}}\right)$

Por lo tanto, la inversa de (E1.17) es

$$u(y, t) = \text{erfc}\left(\frac{y}{\sqrt{4\nu t}}\right) \quad (\text{E1.18})$$

porque

$$a = \frac{y}{\sqrt{v}}$$

La función complemento de la función error, $\text{erfc}(x)$, está definida por

$$\text{erfc}(x) = 1 - \text{erf}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi \quad (\text{E1.19})$$

en donde $\text{erf}(x)$ es la función error. Las funciones que se acaban de introducir se muestran a continuación

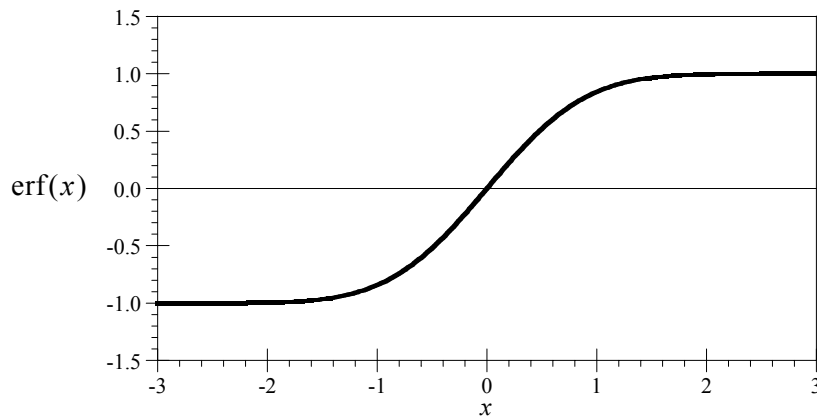


Figura 5a. Función error

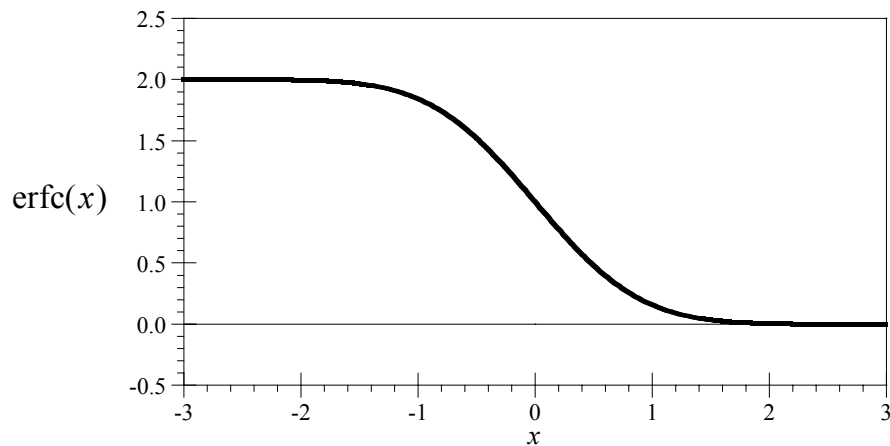


Figura 5b. Complemento de la función error.

Supóngase ahora que en lugar de la ec. (E1.12) se tiene ahora la condición de frontera

$$\text{en } y = 0, \quad \bar{u} = \bar{f}(s) \quad (\text{E1.20})$$

Por lo tanto, en lugar de (E1.17) la solución a (E1.11) es

$$\bar{u} = \bar{f}(s) \exp\left(-y \sqrt{s/\nu}\right) \quad (\text{E1.21})$$

La inversa de (E1.21) se puede encontrar utilizando el teorema de convolución ya que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-y \sqrt{s/\nu}}\right\} = \frac{y}{\sqrt{4\pi \nu t^3}} e^{-y^2/4\nu t} \quad (\text{E1.22})$$

y

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\} = f(t) \quad (\text{E1.23})$$

Por ello la solución $u(y, t)$ es entonces

$$u(y, t) = \int_0^t f(t-u) \frac{y}{\sqrt{4\pi \nu u^3}} \exp\left(-y^2/4\nu u\right) du \quad (\text{E1.24})$$

Otra forma de encontrar la inversa de la ec. (E1.21) es la siguiente: primero recuérdese que

$$\bar{u}_{step} = \frac{1}{s} e^{-y \sqrt{s/\nu}} \quad (\text{E1.25})$$

es la solución del problema dado por la misma ecuación diferencial que (E1.21), que es finita cuando $y \rightarrow \infty$, pero tiene la condición de frontera

$$\text{En } y = 0 \quad \bar{u}_{step}(s) = \frac{1}{s} \quad (\text{E1.26})$$

Por lo tanto la ec. (E1.21) se puede expresar como

$$\bar{u} = s \bar{f}(s) \bar{u}_{step} \quad (\text{E1.27})$$

Nótese que

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u_{step}}{\partial t}\right\} = s \bar{u}_{step} - u_{step}(t=0) = s \bar{u}_{step} \quad (\text{E1.28})$$

y por lo tanto

$$\mathcal{L}^{-1}\{s \bar{u}_{step}\} = \frac{\partial u_{step}}{\partial t} \quad (\text{E1.29})$$

Utilizando este resultado conjuntamente con el teorema de la convolución para encontrar la inversa de (E1.27) se llega a

$$u(y, t) = \int_0^t f(t - \tau) \frac{\partial u_{step}}{\partial \tau}(y, \tau) d\tau \quad (E1.30)$$

Una forma alternativa del resultado se puede encontrar utilizando

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\bar{f}(s) - f(0) \quad (E1.31)$$

Por lo que la ec. (E1.27) se puede escribir como

$$\bar{u} = f(0) \bar{u}_{step} + \mathcal{L}\{f'(t)\} \bar{u}_{step}$$

Al tomar la transformada inversa se llega a

$$u(y, t) = f(0) u_{step}(y, t) + \int_0^t f'(t - \tau) u_{step}(y, \tau) d\tau \quad (E1.32)$$

Se puede utilizar la regla de Leibnitz para obtener

$$\begin{aligned} \int_0^t f'(t - \tau) u_{step}(y, \tau) d\tau &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t f(t - \tau) u_{step}(y, \tau) d\tau \\ &\quad - f(0) u_{step}(y, t) (1) + f(t) u_{step}(y, t) (0) \end{aligned} \quad (E1.33)$$

Que al sustituirla en la ec. (E1.32) permite encontrar

$$u(y, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t f(t - \tau) u_{step}(y, \tau) d\tau \quad (E1.34)$$

Las ecs. (E1.30) y (E1.34) son dos formas de la fórmula de Duhamel que permiten encontrar $u(y, t)$ a partir de la solución $u_{step}(y, t)$, que satisface el mismo problema que $u(y, t)$ pero con la condición inicial

$$u_{step}(0, t) = 1$$

La solución correspondiente $u(y, t)$, al sustituir (E1.18) en (E1.34), al problema con $u(0, t) = f(t)$ es

$$u(y, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t f(t - \tau) \operatorname{erfc}\left(\frac{y}{\sqrt{4\nu\tau}}\right) d\tau \quad (E1.35)$$

5. Una fórmula de Duhamel generalizada.

La ecuación de conducción de calor en estado transitorio es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \nabla^2 u, \quad \text{en } \Omega \quad (5.1)$$

en donde ∇^2 es el operador Laplaciano en cualquier sistema de coordenadas y la difusividad térmica es constante.

La solución de la ec.(5.1) está sujeta a las condiciones indicadas en la figura, que son

$$\text{en } \Gamma \quad u = f(t) \quad (5.2a)$$

$$\text{en } \Gamma^* \quad u = 0 \quad (5.2b)$$

$$\text{cuando } t = 0 \quad u = 0, \quad \text{en todo } \Omega \quad (5.2c)$$

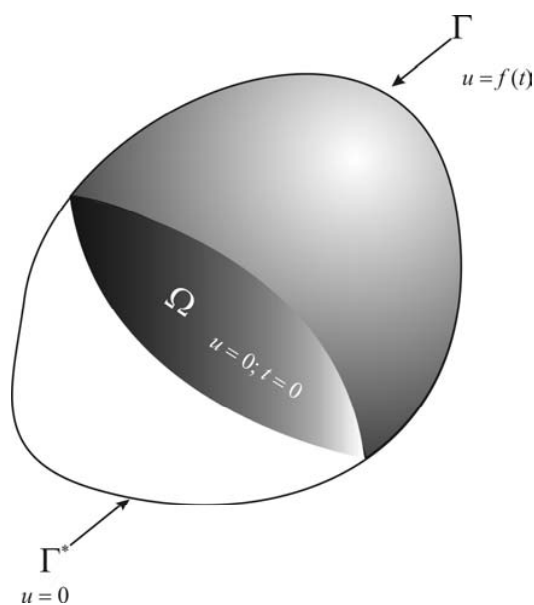


Figura 6. Sistema de dominio Ω y frontera constituida por las partes Γ^* y Γ . En la primera parte de la frontera se establecen condiciones de Dirichlet homogéneas y en la segunda parte no homogéneas.

La TL de la ec.(5.1) sujeta a (5.2c) es

$$s \bar{u} = \alpha \nabla^2 \bar{u} \quad (5.3)$$

y de las condiciones de frontera (5.2a) y (5.2b)

$$\text{en } \Gamma \quad \bar{u} = \bar{f}(s) \quad (5.4a)$$

$$\text{en } \Gamma^* \quad \bar{u} = 0 \quad (5.4b)$$

Si $v(x, y, z, t)$ es la solución a la ec.(5.1) con condiciones (5.2b) y (5.2c) pero en donde (5.2a) es substituida por

$$\text{en } \Gamma \quad v = 1 \quad (5.2a')$$

$$\text{o sea} \quad \text{en } \Gamma \quad \bar{v} = \frac{1}{s} \quad (5.4a')$$

El parámetro s es una constante en la ec. diferencial lineal homogénea (5.3), por lo tanto

$$s f(s) \bar{v}$$

también es una solución de esa ecuación. Pero esta nueva solución debe satisfacer las siguientes condiciones obtenidas de (5.4b) y (5.4a')

$$\text{en } \Gamma^* \quad s f(s) \bar{v} = 0 \quad (5.5b)$$

$$\text{en } \Gamma \quad s \bar{f}(s) \bar{v} = \bar{f}(s) \quad (5.5a)$$

que son iguales a las condiciones para $\bar{u}$, por lo tanto

$$\bar{u}(x, y, z, s) = s \bar{f}(s) \bar{v}(x, y, z, s) \quad (5.6)$$

recuérdese que

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} \right\} = s \bar{v}$$

sujeta a la condición inicial $v = 0$ en $t = 0$. Por lo tanto la TL inversa de (5.6) es

$$u(x, y, z, t) = \int_0^t f(t - \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} v(x, y, z, \tau) d\tau \quad (5.7)$$

o

$$u(x, y, z, t) = \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^t f(t - \tau) v(x, y, z, \tau) d\tau \quad (5.8)$$

Ejemplo 2: Movimiento de un fluido en un canal en donde una pared se mueve a velocidad constante.

Supóngase ahora que las condiciones de frontera en el problema de la placa que se acelera súbitamente, y resuelto como Ejemplo 1, se cambian a

$$\text{en } y = 0 \quad u = 1 \quad (\text{E2.1})$$

$$\text{en } y = \ell \quad u = 0 \quad (\text{E2.2})$$

o sea ahora el dominio es finito tal como se muestra en la siguiente figura:

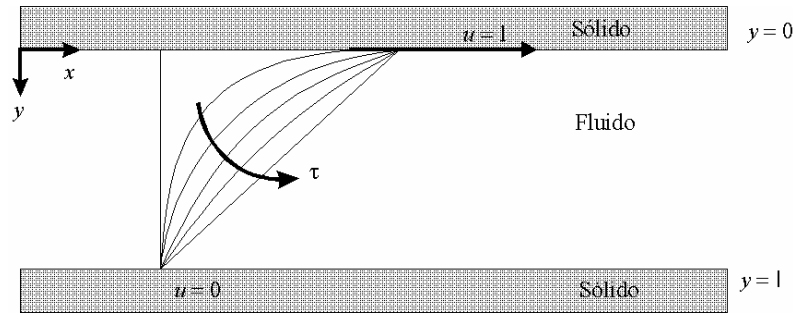


Figura 7. Movimiento de un fluido entre dos placas paralelas. Inicialmente el fluido y placas estaban en reposo. Después, súbitamente la placa superior se pone en movimiento a la velocidad constante v_0 . Los perfiles de velocidad mostrados esquemáticamente corresponden a diferentes instantes.

La forma adimensional del problema es

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \quad (\text{E2.3})$$

$$\text{en } Y = 0 \quad u = 1 \quad (\text{E2.4})$$

$$\text{en } Y = 1 \quad u = 0 \quad (\text{E2.5})$$

$$\text{cuando } \tau = 0 \quad u = 0 \quad (\text{E2.6})$$

donde

$$\tau = \frac{t v}{\ell^2}, \quad Y = \frac{y}{\ell} \quad (\text{E2.7})$$

Las TL de las ecs. (E2.3) a (E2.5) son

$$s \bar{u} = \frac{d^2 u}{dY^2} \quad (\text{E2.8})$$

$$\bar{u} = \frac{1}{s} \quad \text{en} \quad Y = 0 \quad (\text{E2.9})$$

$$\bar{u} = 0 \quad \text{en} \quad Y = 1 \quad (\text{E2.10})$$

La solución de (E2.8) es

$$\bar{u} = A \sinh(Y\sqrt{s}) + B \cosh(Y\sqrt{s}) \quad (\text{E2.11})$$

Utilizando las condiciones de frontera dadas por las ecs. (E2.9) y (E2.10) se encuentra

$$B = \frac{1}{s} \quad (\text{E2.12})$$

$$A = -\frac{1}{s} \frac{\cosh(\sqrt{s})}{\sinh(\sqrt{s})} \quad (\text{E2.13})$$

o sea

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{1}{s} \left[\frac{\sinh(\sqrt{s}) \cosh(Y\sqrt{s}) - \cosh(\sqrt{s}) \sinh(Y\sqrt{s})}{\sinh(\sqrt{s})} \right] \\ &= \frac{1}{s} \left[\frac{\sinh[(1-Y)\sqrt{s}]}{\sinh(\sqrt{s})} \right] = \frac{1}{s} \left[\frac{e^{(1-Y)\sqrt{s}} - e^{-(1-Y)\sqrt{s}}}{e^{\sqrt{s}} - e^{-\sqrt{s}}} \right] \end{aligned}$$

Entonces se tiene que encontrar la inversa de

$$\bar{u} = \frac{e^{-\sqrt{s}}}{s} \left[\frac{e^{(1-Y)\sqrt{s}} - e^{-(1-Y)\sqrt{s}}}{1 - e^{-2\sqrt{s}}} \right] \quad (\text{E2.14})$$

Se introduce

$$x = e^{-2\sqrt{s}}$$

y como

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (\text{E2.15})$$

La ec. (E2.14) se puede escribir como

$$\bar{u} = \frac{e^{-\sqrt{s}}}{s} \left(e^{(1-Y)\sqrt{s}} - e^{-(1-Y)\sqrt{s}} \right) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n\sqrt{s}}$$

o

$$\bar{u} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-(Y+2n)\sqrt{s}}}{s} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-[2(1+n)-Y]\sqrt{s}}}{s} \quad (\text{E2.16})$$

En tablas de transformadas de Laplace se encuentra

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-k\sqrt{s}}}{s} \right\} = \text{erfc} \left(\frac{k}{2\sqrt{\tau}} \right)$$

Por ello la inversa de (E2.16) es

$$u(Y, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \text{erfc} \left(\frac{Y+2n}{\sqrt{4\tau}} \right) - \sum_{n=0}^{\infty} \text{erfc} \left(\frac{2(1+n)-Y}{\sqrt{4\tau}} \right) \quad (\text{E2.17})$$

La inversa de (E2.14) también se podría encontrar utilizando variable compleja. Debe notarse que el resultado mostrado en la ec. (E2.17) es de la misma forma que el determinado por separación de variables.

Evaluación de la solución ecuación (E2.17)

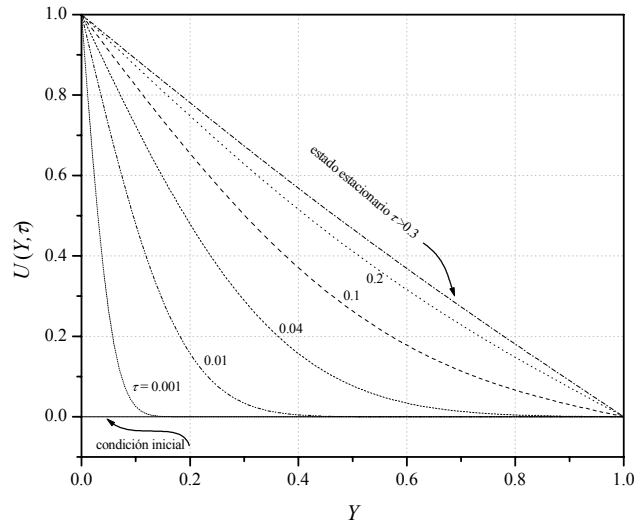


Figura 8.- Perfiles de velocidad a diferentes tiempos.

6. La fórmula de Heaveside para la inversa de concientes de polinomios

La inversa en el problema anterior no se encontró en forma inmediata, fue necesario un proceso elaborado para representar la función $G(s)$ en una serie infinita con términos que se pueden encontrar en las tablas de integrales. Deseamos ahora introducir un procedimiento más sistemático, este se basa en la fórmula integral, mencionada en la Sección 1, para encontrar la inversa de $\bar{f}(s)$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{c-iT}^{c+iT} e^{st} \bar{f}(s) ds \quad (6.1)$$

Se dijo que la integral se debe realizar en el plano complejo s , La constante c debe seleccionarse de tal manera que todos los puntos singulares de $\bar{f}(s)$ se encuentren a la izquierda de la linea vertical definida por la parte real de s $\text{Re}\{s\} = c$.

Un resultado de aplicación práctica directa es cuando se tienen funciones que no son multivariadas con singularidades aisladas. Este es el caso cuando $\bar{f}(s)$ está dado por

$$\bar{f}(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \quad (6.2)$$

En donde $P(s)$ y $Q(s)$ son polinomios de orden m y n respectivamente de potencias enteras del parámetro s . Para que la transformada inversa exista el orden de $P(s)$ debe ser menor que el de $Q(s)$, $n > m$. Entonces $Q(s)$ puede expresarse como

$$Q(s) = (s - \mu_n)(s - \mu_{n-1}) \dots (s - \mu_2)(s - \mu_1) \quad (6.3)$$

En donde todos los valores $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ son diferentes entre sí y cuando “ s ” toma tales valores $Q(\mu_i) = 0$. Entonces se dice que estas son las singularidades aisladas de $Q(s)$ y son de primer orden. Al aplicar el cálculo de integrales en el plano complejo se obtiene

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{P(\mu_k)}{Q'(\mu_k)} \exp(\mu_k t) \quad (6.4)$$

En esta $Q'(\mu_k)$ indica la derivada de $Q(s)$ con respecto al parámetro s y evaluada en la singularidad μ_k .

Debe insistirse en que las funciones $P(s)$ y $Q(s)$ deben ser univaluadas, de otra forma la fórmula (6.4) no puede aplicarse. Ejemplos de funciones univaluadas son

$$f(s) = s^n, n \geq 0 \text{ y entero} \quad f(s) = \sin s \quad f(s) = \exp s$$

Y de multivaluadas

$$f(s) = \sqrt{s}$$

$$f(s) = \ln s$$

$$f(s) = \sin \sqrt{s}$$

$$f(s) = \exp \sqrt{s}$$

Estás dos últimas son multivaluadas como consecuencia de que $\sqrt{s}$ lo sea, y se puede observar al expandir en series de Taylor $\sin \sqrt{s}$ y $\exp \sqrt{s}$, así

$$f(s) = \sin \sqrt{s} = \sqrt{s} - \frac{(\sqrt{s})^3}{3!} + \frac{(\sqrt{s})^5}{5!} - \frac{(\sqrt{s})^7}{7!} + \dots$$

$$f(s) = \exp \sqrt{s} = 1 + \sqrt{s} + \frac{(\sqrt{s})^2}{2!} + \frac{(\sqrt{s})^3}{3!} + \dots$$

Note que la expansión en series de Taylor también indica porque las dos siguientes funciones no son multivaluadas

$$f(s) = \cos \sqrt{s} = 1 - \frac{(\sqrt{s})^2}{2!} + \frac{(\sqrt{s})^4}{4!} - \frac{(\sqrt{s})^6}{6!} + \dots = 1 - \frac{s}{2!} + \frac{s^2}{4!} - \frac{s^3}{6!} + \dots$$

$$f(s) = \frac{\sin \sqrt{s}}{\sqrt{s}} = \frac{1}{\sqrt{s}} \left(\sqrt{s} - \frac{(\sqrt{s})^3}{3!} + \frac{(\sqrt{s})^5}{5!} - \frac{(\sqrt{s})^7}{7!} + \dots \right) = 1 - \frac{s}{3!} + \frac{s^2}{5!} - \frac{s^3}{7!} + \dots$$

Ahora se presentarán algunos ejemplos de la aplicación de la fórmula de Heaveside, ec. (6.4).

Ejemplos 3:

Ejemplo 3.1:

Obtener la inversa de $\bar{f}(s) = \frac{1}{(s-a)(s-b)}$

en este caso se identifican $P(s) = 1$ y $Q(s) = (s-a)(s-b)$. Como consecuencia $\mu_1 = a$ y $\mu_2 = b$. Así la inversa buscada al aplicar la fórmula (6.4) es

$$f(t) = \frac{1}{a-b} \exp(at) + \frac{1}{b-a} \exp(bt) = \frac{1}{a-b} (\exp(at) - \exp(bt))$$

Ejemplo 3.2:

Obtener la inversa de $\bar{f}(s) = \frac{s}{(s-a)(s-b)}$

en este caso, muy parecido al anterior, se identifican $P(s) = s$ y $Q(s) = (s-a)(s-b)$.

Como consecuencia $\mu_1 = a$ y $\mu_2 = b$. Así la inversa buscada al aplicar la fórmula (6.4) es

$$f(t) = \frac{a}{a-b} \exp(at) + \frac{b}{b-a} \exp(bt) = \frac{1}{a-b} (a \exp(at) - b \exp(bt))$$

Ejemplo 3.3:

Obtener la inversa de $\bar{f}(s) = \frac{s}{(s-a)^2(s-b)}$

En este caso la fórmula (6.4) no puede aplicarse directamente pues en este caso $Q(s) = (s-a)^2(s-b)$ tiene una raíz repetida. La inversa se puede obtener utilizando el teorema de convolución y la fórmula (6.4).

Ejemplo 3.4:

Obtener la inversa de $\bar{f}(s) = \frac{\sinh(\sqrt{s} x)}{\sinh(\sqrt{s})}$

Si se seleccionan $P(s) = \sinh(\sqrt{s} x)$ y $Q(s) = \sinh(\sqrt{s})$ no se puede aplicar la fórmula (6.4) pues la expansión en series de Taylor nos indica claramente que son funciones multivaluadas:

$$P(s) = \sinh(\sqrt{s} x) = \sqrt{s} x + \frac{(\sqrt{s} x)^3}{3!} + \frac{(\sqrt{s} x)^5}{5!} + \frac{(\sqrt{s} x)^7}{7!} + \dots$$

$$Q(s) = \sinh(\sqrt{s}) = \sqrt{s} + \frac{(\sqrt{s})^3}{3!} + \frac{(\sqrt{s})^5}{5!} + \frac{(\sqrt{s})^7}{7!} + \dots$$

Sin embargo, si se seleccionan $P(s) = \frac{\sinh(\sqrt{s} x)}{\sqrt{s}}$ y $Q(s) = \frac{\sinh(\sqrt{s})}{\sqrt{s}}$ la expresión que

se desea invertir no se altera y además la expansión en series de Taylor nos indica que ambas selecciones son funciones univaluadas

$$P(s) = \frac{\sinh(\sqrt{s} x)}{\sqrt{s}} = x + \frac{(\sqrt{s} x)^2}{3!} + \frac{(\sqrt{s} x)^4}{5!} + \frac{(\sqrt{s} x)^6}{7!} + \dots = x + \frac{(s x^2)}{3!} + \frac{(s x^2)^2}{5!} + \frac{(s x^2)^3}{7!} + \dots$$

$$Q(s) = \frac{\sinh(\sqrt{s})}{\sqrt{s}} = 1 + \frac{s}{3!} + \frac{s^2}{5!} + \frac{s^3}{7!} + \dots$$

Tendremos entonces

$$\bar{f}(s) = \frac{\sinh(\sqrt{s} x)}{\sinh(\sqrt{s} a)} = \frac{\sinh(\sqrt{s} x) / \sqrt{s}}{\sinh(\sqrt{s}) / \sqrt{s}} \quad (\text{E3.4.1})$$

a la cual es posible aplicar la fórmula (6.4). Al proceder a buscar las raíces de $Q(s)$ se encuentra que no tiene ninguna raíz real pues la única posibilidad es $s = 0$ y la misma expansión en series nos indica que

$$\lim_{s \rightarrow 0} Q(s) = 1$$

Así deben buscarse raíces imaginarias y para ello se realiza el siguiente cambio de variable $\sqrt{s} = \mu\sqrt{-1} = \mu i$

De esta manera la ecuación (3.4.1) toma la forma

$$\bar{f}(s) = \frac{\sinh(\mu x)}{\sinh(\mu)} = \frac{\sinh(\mu x) / \mu}{\sinh(\mu) / \mu}$$

En donde se usó la identidad $\sinh(iy) = i \sin(y)$.

Es bastante claro que las raíces del divisor $\sinh(\mu) / \mu$ son $\mu_n = n\pi$ en donde $n \geq 1$ y es entero. Ahora es necesaria la derivada de $Q(s)$ con respecto al parámetro de Laplace, y esta es

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\sinh(\sqrt{s})}{\sqrt{s}} \right) = \frac{\cosh(\sqrt{s}) - \sinh(\sqrt{s})}{\sqrt{s}} \left(\frac{1}{2\sqrt{s}} \right) = \frac{\cosh(\sqrt{s}) - \sinh(\sqrt{s})}{2s}$$

que evaluada en los polos de $Q(s)$ es

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\sinh(\sqrt{s})}{\sqrt{s}} \right)_{s=-\mu_n^2} = -\frac{\cos(\mu_n) - 1}{2\mu_n^2} = -\frac{\cos(\mu_n) - \sin(\mu_n)}{2n^2\pi^2} = -\frac{(-1)^{n+1}}{2n^2\pi^2} = \frac{(-1)^n}{2n^2\pi^2}$$

Nótese también que

$$P(s = -\mu_n^2) = \frac{\sinh(\mu_n x)}{\mu_n}$$

Así al aplicar la fórmula (6.4) se obtiene la inversa

$$f(t) = L^{-1} \left\{ \frac{\sinh(\sqrt{s} x)}{\sinh(\sqrt{s})} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{\sinh(\mu_n x)}{\mu_n}}{\frac{(-1)^n}{2n^2\pi^2}} \exp(-n^2\pi^2 t)$$

o finalmente

$$L^{-1} \left\{ \frac{\sinh(\sqrt{s} x)}{\sinh(\sqrt{s})} \right\} = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n \sin(n\pi x) \exp(-n^2\pi^2 t)$$

En este ejemplo se pudo ver como la fórmula puede aplicarse para el caso en que tanto

$P(s) = \frac{\sinh(\sqrt{s} x)}{\sqrt{s}}$ como $Q(s) = \frac{\sinh(\sqrt{s})}{\sqrt{s}}$ son polinomios con un número infinito

de términos. Al mencionar esto se levanta la duda sobre cuál de los polinomios es de mayor orden ya que antes dijimos que el orden del denominador debe ser mayor que el del numerador. Esto puede comprobarse demostrando que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\sinh(\sqrt{s} x)}{\sinh(\sqrt{s})} \rightarrow 0$$

Para esto podemos expresar

$$f(s) = \frac{\sinh(\sqrt{s} x)}{\sinh(\sqrt{s})} = \frac{\exp(\sqrt{s} x) - \exp(-\sqrt{s} x)}{\exp(\sqrt{s}) - \exp(-\sqrt{s})} = \frac{\exp(-\sqrt{s}[1-x]) - \exp(-\sqrt{s}[1+x])}{1 - \exp(-2\sqrt{s})}$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) \rightarrow \frac{0}{1} = 0 \quad \text{para } 0 \leq x < 1$$

En los ejercicios propuestos más adelante se solicita la solución de problemas similares a los anteriores para que se puedan aclarar dudas sobre los aspectos de aplicación de la fórmula (6.2)

Ejemplo 4: Movimiento de un fluido en un canal en donde una pared se mueve arbitrariamente.

El método de la transformada de Laplace algunas veces es útil cuando se combina con el método de separación de variables. Esto se mostrará a través de la solución del problema que se resolvió en el ejemplo anterior pero en este caso el movimiento de la placa superior no está restringido a velocidad constante. La situación se muestra esquemáticamente en la figura siguiente:

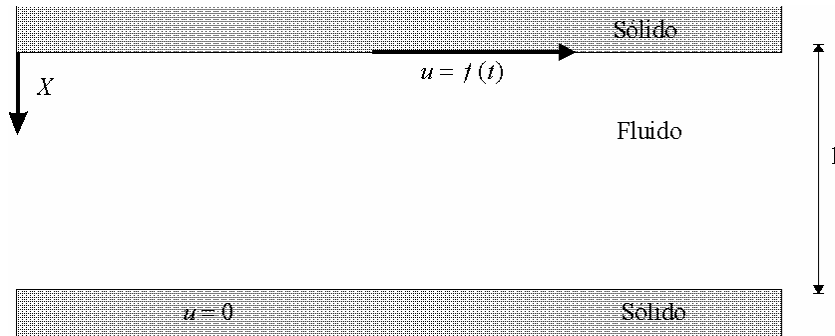


Figura 9. Movimiento de un fluido entre dos placas paralelas. Inicialmente el fluido y placas estaban en reposo. Después, súbitamente la placa superior se pone en movimiento a la velocidad constante $v = v_0 f(t)$.

Por lo anterior el problema a resolver está dado por

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} \quad (\text{E4.1})$$

$$\text{cuando } \tau = 0, \quad u = 0 \quad (\text{E4.2})$$

$$\text{en } X = 0, \quad u = f(\tau) \quad (\text{E4.3})$$

$$\text{en } X = 1, \quad u = 0 \quad (\text{E4.4})$$

Utilizando la transformada de Laplace en las ecs. (E4.1)-(E4.3) se llega a

$$s \bar{u} = \frac{d^2 \bar{u}}{dX^2} \quad (\text{E4.5})$$

con

$$\bar{u} = \bar{f}(s) \quad \text{en } x = 0 \quad (\text{E4.6})$$

$$\bar{u} = 0 \quad \text{en } x = 1 \quad (\text{E4.7})$$

La solución del problema de valor en la frontera dado por las ecs. (E4.5)-(E4.7) es

$$\bar{u} = \bar{f}(s) \frac{\sinh \left[(1-X)\sqrt{s} \right]}{\sinh \sqrt{s}} \quad (\text{E4.8})$$

La solución para problema de valor en la frontera dado por las ecs. (E4.5) y (E4.7) y la condición de frontera

$$\bar{v} = \frac{1}{s} \quad \text{en} \quad x = 0 \quad (\text{E4.9})$$

es

$$s \bar{v} = \frac{\sinh \left[(1-X)\sqrt{s} \right]}{\sinh \sqrt{s}} \quad (\text{E4.10})$$

Por ello al combinar las ecs. (E4.8) y (E4.10) se encuentra

$$\bar{u} = s \bar{f}(s) \bar{v} \quad (\text{E4.11})$$

Lo que demuestra que se puede usar la fórmula de Duhamel

$$u(x, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau f(\tau - \xi) v(x, \xi) d\xi \quad (\text{E4.12})$$

donde $v(x, \xi)$ es la solución a

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial X^2} \quad (\text{E4.13})$$

con

$$\text{cuando} \quad \tau = 0, \quad v = 0 \quad (\text{E4.14})$$

$$\text{en} \quad X = 0, \quad v = 1 \quad (\text{E4.15})$$

$$\text{en} \quad X = 1, \quad v = 0 \quad (\text{E4.16})$$

La solución de este problema que lo encontramos anteriormente utilizando el método de TL también puede obtenerse por el método de separación de variables utilizando la superposición

$$v = v_s + \bar{v} \quad (\text{E4.17})$$

Que lleva a los dos siguientes problemas:

$$\frac{d^2 v_s}{dX^2} = 0 \quad (\text{E4.18})$$

$$v_s = 1 \quad \text{en} \quad X = 0 \quad (\text{E4.19})$$

$$v_s = 0 \quad \text{en} \quad X = 1 \quad (\text{E4.20})$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial X^2} \quad (\text{E4.21})$$

$$\bar{v} = 0 \quad \text{en} \quad X = 0 \quad (\text{E4.22})$$

$$\bar{v} = 0 \quad \text{en} \quad X = 1 \quad (\text{E4.23})$$

$$\bar{v} = -v_s(X) \quad \text{en} \quad \tau = 0 \quad (\text{E4.24})$$

Cuyas soluciones son

$$v_s = 1 - X \quad (\text{E4.25a})$$

$$\bar{u} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n^2 \tau} \operatorname{sen}(\lambda_n X) \quad (\text{E4.25b})$$

En donde

$$\lambda_n = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \infty$$

Por lo tanto $v(X, \tau)$ es

$$v = 1 - X + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n^2 \tau} \operatorname{sen}(\lambda_n X) \quad (\text{E4.26})$$

Ahora se puede utilizar la fórmula de Duhamel (E4.12) para encontrar $u(X, \tau)$

$$\begin{aligned} u(X, \tau) &= \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{\tau} (1 - X) f(\tau - \xi) d\xi \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{\tau} f(\tau - \xi) \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n^2 \xi} \operatorname{sen}(\lambda_n X) d\xi \end{aligned} \quad (\text{E4.27})$$

Utilizando la Regla de Leibnitz

$$\begin{aligned} u(X, \tau) &= (1 - X) \int_0^{\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} f(\tau - \xi) d\xi + (1 - X) f(0) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(\lambda_n X) \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{\tau} f(\tau - \xi) e^{-\lambda_n^2 \xi} d\xi \right\} \end{aligned} \quad (\text{E4.28})$$

Para el caso particular en que

$$f(\tau) = \tau, \quad f(\tau - \xi) = \tau - \xi \quad (\text{E4.29a})$$

y

$$\frac{d}{d\tau} [f(\tau - \xi)] = 1 \quad (\text{E4.29b})$$

Por ello tendremos que la ec. (E4.28) toma la forma:

$$u(X, \tau) = (1 - X) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(\lambda_n X) \int_0^{\tau} e^{-\lambda_n^2 \xi} d\xi \quad (\text{E4.30})$$

Empleando nuevamente la Regla de Leibnitz llegamos a

$$u(X, \tau) = (1 - X) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n\pi)^2} \operatorname{sen}(n\pi X) \left[1 - e^{-(n\pi)^2 \tau} \right] \quad (\text{E4.31})$$

A continuación se muestra la evaluación de la ec (E4.31).

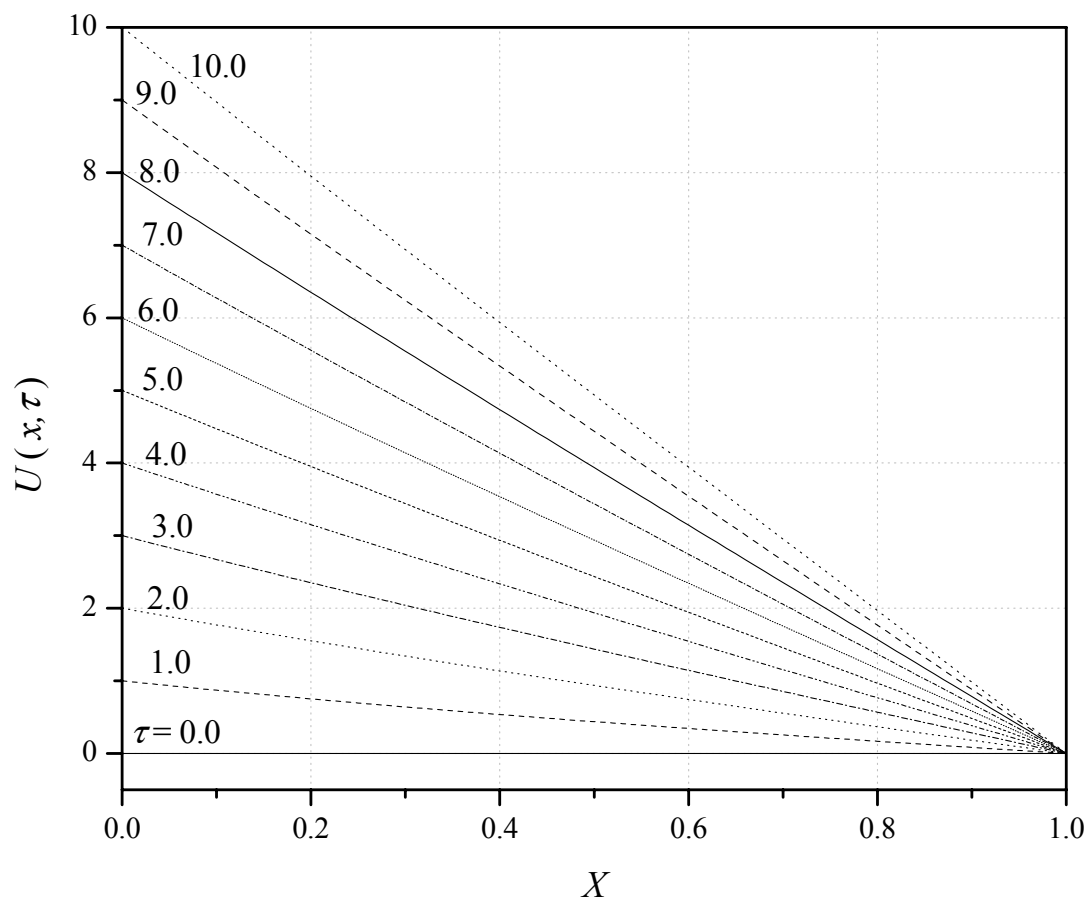


Figura 9a. Perfil de velocidad en el canal

Ejemplo 5. Conducción de calor en una barra cilíndrica sujeta a una temperatura exterior arbitraria.

En este ejemplo se demostrará explícitamente que lo discutido anteriormente no está restringido a la solución de problemas en sistemas de coordenadas cartesianas. Por ello nos referiremos a la situación de conducción de calor mostrada en el siguiente esquema:

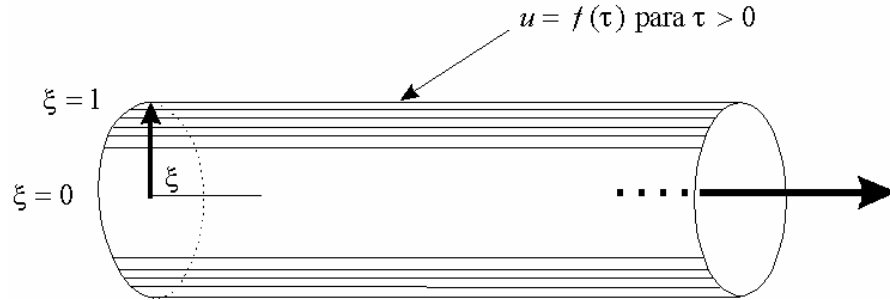


Figura 10. Barra cilíndrica que inicialmente se encuentra a la temperatura $u = 0$, y a la que en el instante $t = 0^+$ se le aplica la temperatura exterior $u = f(\tau)$.

El problema que se debe resolver está dado por

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \quad (\text{E5.1})$$

Sujeta as las condiciones

$$u = f(\tau) \quad \text{en} \quad \xi = 1, \quad \text{para} \quad \tau > 0 \quad (\text{E5.2})$$

$$u = 0 \quad \text{cuando} \quad \tau = 0, \quad \text{para} \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (\text{E5.3})$$

De acuerdo a la fórmula de Duhamel a solución es

$$u(\xi, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau f(\tau - \zeta) v(\xi, \zeta) d\zeta \quad (\text{E5.4})$$

en donde $v(\xi, \tau)$ está dado por

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \quad (\text{E5.5})$$

con

$$v = 1 \quad \text{en} \quad \xi = 1 \quad (\text{E5.6})$$

$$v = 0 \quad \text{cuando} \quad \tau = 0 \quad (\text{E5.7})$$

La solución a (E5.5) se encuentra utilizando la superposición

$$v = v_s + \bar{v}$$

que requiere la solución de los siguientes dos problemas

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d v_s}{d\xi} \right) = 0 \quad (\text{E5.8})$$

$$v_s = 1 \quad \text{en} \quad \xi = 1 \quad (\text{E5.9})$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} \right) \quad (\text{E5.10})$$

$$\bar{v} = 0 \quad \text{en} \quad \xi = 1 \quad (\text{E5.11})$$

$$\bar{v} = -v_s(\xi) \quad \text{cuando} \quad \tau = 0 \quad (\text{E5.12})$$

La solución de del problema dado por (E5.8) y (E5.9) es

$$v_s = 1 \quad (\text{E5.13})$$

Usando el método de separación de variables para resolver el problema dado por las ecs. (E5.11)-(E5.13) se encuentra

$$\bar{v}(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n^2 \tau} J_0(\lambda_n \xi) \quad (\text{E5.14})$$

En donde los valores propios λ_n son las raíces de

$$J_0(\lambda_n) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \infty \quad (\text{E5.15})$$

Por ello v está dada por

$$v(\xi, \tau) = 1 + \bar{v} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n^2 \tau} J_0(\lambda_n \xi) \quad (\text{E5.16})$$

De la substitución de (E5.16) en (E5.4) se obtiene la solución para el problema planteado por las ecs. (E5.1)-(E5.3)

$$u(\xi, \tau) = \int_0^\tau \frac{\partial}{\partial \tau} [f(\tau - \zeta)] d\zeta + f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\lambda_n \xi) \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau f(\tau - \zeta) e^{-\lambda_n^2 \zeta} d\zeta \right\} \quad (\text{E5.17})$$

7. Función delta y su transformada de Laplace

En esta sección se definirá la función delta, se revisarán algunas de sus propiedades y se ejemplificará la importancia de su uso al plantear la solución de problemas en términos de situaciones más sencillas: respuestas a funciones delta. Se comenzará considerando la función

$$f(t) = \frac{1}{(b-a)} \text{ para } a < t < b \quad (7.1)$$

y cero en el resto del dominio de t . Esta función se muestra en la siguiente figura:

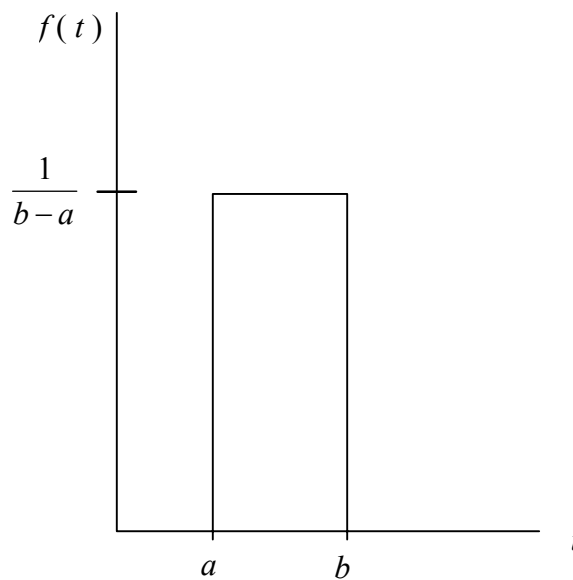


Figura 11. Función impulso finito en el intervalo $a \leq t \leq b$.

Nótese que

$$\int_0^{\infty} f(t) dt = 1, \text{ independiente de } b - a \quad (7.2)$$

La definición de la función delta es

$$\delta(t-a) = \lim_{b \rightarrow a} f(t) \quad (7.3)$$

La magnitud de $f(t)$ tiende a ∞ cuando b se aproxima al valor de a , y el tamaño del intervalo $[a, b]$ va a cero, sin embargo el área bajo la curva sigue siendo 1.

Considérese ahora la integral

$$I = \int_0^{\infty} g(t) f(t) dt = \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt \quad (7.4)$$

En donde $g(t)$ es una función arbitraria del tiempo. Usando ahora el teorema del valor medio se obtiene

$$g_m = \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt$$

$$I = g_m$$

Si se toma el límite cuando $b \rightarrow a$

$$I = \lim_{b \rightarrow a} \int_0^{\infty} g(t) f(t) dt = \int_0^{\infty} g(t) \delta(t-a) dt$$

$$= \lim_{b \rightarrow a} g_m = g(a) \quad (7.5)$$

o sea

$$\int_0^{\infty} g(t) \delta(t-a) dt = g(a) \quad (7.6)$$

Esta propiedad se puede utilizar para obtener

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \delta(t-a) dt = e^{-sa} \quad (7.7)$$

o sea

$$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-sa} \quad (7.8)$$

Nótese que de la ec. (7.7) se puede obtener también

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \delta(t) dt = 1 \quad (7.9)$$

Ahora se buscará cual es el valor de la derivada de la función escalón unitaria definida por:

$$\mathcal{U}(t-a) = \begin{cases} 1 & t \geq a \\ 0 & t < a \end{cases} \quad (7.10)$$

Comenzando con

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{d[\mathcal{U}(t-a)]}{dt} g(t) dt &= \mathcal{U}(t-a) g(t) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \mathcal{U}(t-a) \frac{dg}{dt} dt \\ &= g(\infty) - \int_a^{\infty} \frac{dg}{dt} dt \end{aligned} \quad (7.11)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{d\mathcal{U}}{dt} g(t) dt = g(\infty) - g(\infty) + g(a) = g(a) \quad (7.12)$$

Comparando este resultado con la ec. (7.6) se concluye

$$\frac{d[\mathcal{U}(t-a)]}{dt} = \delta(t-a) \quad (7.13)$$

La utilidad de lo anterior se encuentra en que la respuesta a funciones arbitrarias se pueden encontrar en términos de la respuesta a funciones $\delta(t)$ o a funciones $\mathcal{U}(t)$. Para ejemplificar esto se presenta la solución del modelo de un cromatógrafo muy sencillo.

Ejemplo 6: Un cromatógrafo muy sencillo

En este ejemplo se resolverá el modelo más sencillo que representa el proceso de separación cromatográfica. En la figura siguiente se muestra en forma esquemática el sistema bajo consideración y se supondrá que su longitud, L , es mucho mayor que su diámetro, $2r_0$, por ello se impondrá la condición de salida cuando la coordenada tiende a $L/r_0 \gg 1$. Las condiciones de flujo son tales que el coeficiente de dispersión total es D^* .

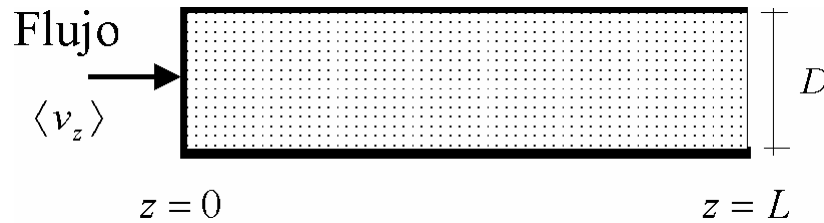


Figura 12. Sistema cromatográfico de longitud muy grande en el que se alimenta un flujo con velocidad promedio $\langle v_z \rangle$.

El problema de separación de un soluto que no tiene interacción ni con la pared, ni con otros solutos o el solvente está gobernado por la siguiente ecuación diferencial adimensional:

$$\frac{1}{Pe} \frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{1}{Pe} \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} - \frac{\partial U}{\partial Z} \quad (\text{E6.1})$$

sujeta a las siguientes condiciones de frontera e inicial

$$\text{En } Z = 0 \quad U = F(\tau) \quad \text{para } \tau > 0 \quad (\text{E6.2})$$

$$\text{Cuando } Z \gg 1 \quad U \text{ es finita} \quad \tau \geq 0 \quad (\text{E6.3})$$

$$\text{Cuando } \tau = 0 \quad U = 0 \quad Z \geq 0 \quad (\text{E6.4})$$

Las variables y parámetros adimensionales utilizados son los siguientes:

$$U = \frac{C}{C_0} \quad Z = \frac{z}{r_0} \quad \tau = \frac{t D^*}{r_0^2} \quad Pe = \frac{\langle v_z \rangle r_0}{D^*} \quad (\text{E6.5})$$

En la ecuación (E6.2) $F(\tau)$ representa la concentración de alimentación, y en (E6.5) C_0 indica una concentración de referencia. Resolveremos el problema para las tres siguientes funciones de alimentación:

pulso infinito

$$\text{en } Z = 0 \quad U_{pul}^{\infty} = \delta(\tau), \quad \tau > 0 \quad (\text{E6.6a})$$

escalón

$$\text{en } Z = 0 \quad U_{esc} = \mathcal{U}(\tau), \quad \tau > 0 \quad (\text{E6.6b})$$

pulso finito

$$\text{en } Z = 0 \quad U_{pul} = \mathcal{U}(\tau) - \mathcal{U}(\tau - \tau_2), \quad \tau > 0 \quad (\text{E6.6c})$$

Para indicar la respuesta a cada una de las siguientes alimentaciones usaremos el subíndice k en U . Por ello la ec. (E6.4) en el dominio de Laplace toma la forma

$$\frac{d^2 \bar{U}_k}{dZ^2} - Pe \frac{d\bar{U}_k}{dZ} - s\bar{U}_k = 0 \quad (\text{E6.7})$$

en donde $\bar{U}_k$ es la transformada de U_k , dada por

$$\mathcal{L}\{U_k(Z, \tau)\} = \bar{U}_k(Z, s) = \bar{U}_k \quad (\text{E6.8})$$

La solución de (E6.7) es

$$\bar{U}_k = A_k \exp\left[\left(\frac{Pe - (Pe^2 + 4s)^{1/2}}{2}\right)Z\right] \quad (\text{E6.9})$$

en donde se ha utilizado el que $\bar{U}_k$ es finita cuando $Z \gg 1$, y A_k es una constante de integración. En el dominio de Laplace la condición de frontera en $Z = 0$ dada por las ecs. (E6.6) toma la forma

$k = 1$ pulso infinito

$$\text{en } Z = 0 \quad \bar{U}_1 = \bar{U}_{pul}^{\infty} = 1 \quad (\text{E6.10a})$$

$k = 2$ escalón

$$\text{en } Z = 0 \quad \bar{U}_2 = \bar{U}_{esc} = \frac{1}{s} \quad (\text{E6.10b})$$

$k = 3$ pulso finito

$$\text{en } Z = 0 \quad \bar{U}_3 = \bar{U}_{pul} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \exp(-\tau_2 s) \quad (\text{E6.10c})$$

Usando (E6.10a) en (E6.9) se demuestra que $A_1 = 1$, por lo tanto

$$\bar{U}_1 = \bar{U}_{pul}^{\infty} = \exp\left[\left(\frac{Pe - (Pe^2 + 4s)^{1/2}}{2}\right)Z\right] \quad (\text{E6.11a})$$

Usando las condiciones dadas por (E6.10b) y (E6.10c) se encuentran A_2 y A_3 , y $\bar{U}_2$ y $\bar{U}_3$ en términos de $\bar{U}_1$

$$\bar{U}_2 = \frac{1}{s} \bar{U}_{pul}^{\infty}(Z, s) \quad (\text{E6.11b})$$

$$\bar{U}_3 = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s} \exp(-\tau_2 s) \right) \bar{U}_{pul}^\infty(Z, s) \quad (\text{E6.11c})$$

La inversa de $\bar{U}_1$ es

$$U_1 = U_{pul}^\infty(Z, \tau) = Z \left(\frac{1}{4 \pi \tau^3} \right)^{1/2} \exp[-(Z - \tau Pe)^2 / 4 \tau] \quad (\text{E6.12a})$$

La obtención de esta inversa involucró el uso del teorema del desplazamiento. Ahora es posible obtener la inversa de $\bar{U}_2$ en términos de $U_{pul}^\infty(Z, \tau)$ usando el teorema de la convolución. Así de (E6.11b)

$$U_2(Z, \tau) = \int_0^\tau U_{pul}^\infty(Z, \zeta) d\zeta \quad (\text{E6.12b})$$

La inversa de $\bar{U}_3$ no es muy complicada si se utiliza el teorema de la convolución, se reconoce que la variable de integración es ζ , y que

$$\mathcal{U}(\tau - \zeta - \tau_2) = \begin{cases} 0, & \zeta \geq \tau - \tau_2 \\ 1, & \zeta < \tau - \tau_2 \end{cases}$$

Por lo que (E6.11c) se puede escribir como

$$U_3(Z, \tau) = \int_0^\tau U_{pul}^\infty(Z, \zeta) d\zeta - \int_0^\tau \mathcal{U}(\tau - \zeta - \tau_2) U_{pul}^\infty(Z, \zeta) d\zeta$$

o sea

$$U_3(Z, \tau) = \int_0^\tau U_{pul}^\infty(Z, \zeta) d\zeta - \int_0^{\tau - \tau_2} U_{pul}^\infty(Z, \zeta) d\zeta$$

Y finalmente

$$U_3(Z, \tau) = \int_{\tau - \tau_2}^\tau U_{pul}^\infty(Z, \zeta) d\zeta \quad (\text{E6.12c})$$

Debemos hacer notar que la respuesta a una función arbitraria $F_k(\tau)$ se puede escribir en términos de la respuesta a un pulso infinito si se usa el teorema de la convolución

$$U_k(Z, \tau) = \int_0^\tau F_k(\tau - \zeta) U_{pul}^\infty(Z, \zeta) d\zeta \quad (\text{E6.13})$$

A continuación se muestran algunas de las predicciones obtenidas con el modelo resuelto para los casos en que se alimenta un pulso infinito y un escalón unitario al cromatógrafo. Los resultados han sido obtenidos a partir de las ecuaciones (E6.12a) y

(E6.12b). Los detalles del procedimiento de la evaluación se pueden consultar en el trabajo de Ochoa y Alvarez (1996).

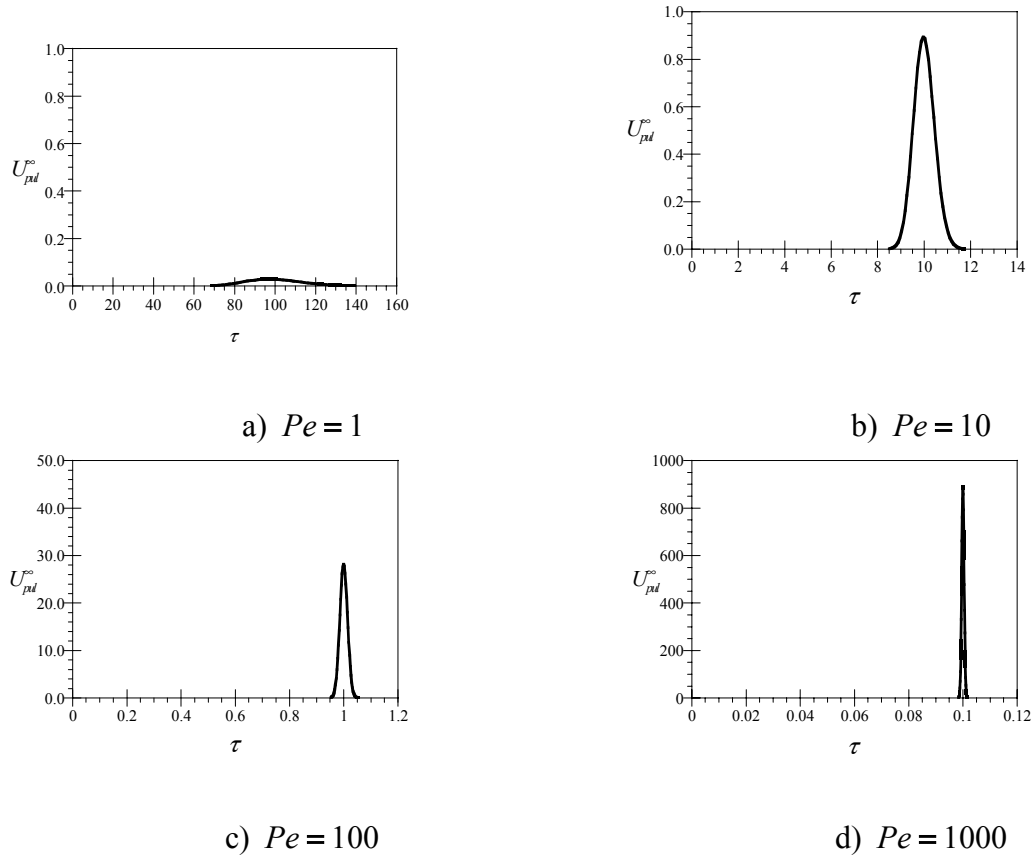


Figura 13. Respuesta del cromatógrafo en $Z = 100$ a un pulso infinito alimentado en $Z = 0$ para diferentes números de Péclet. Cada una de las figuras corresponde a un cromatograma de un cromatógrafo de longitud igual a $L/D = 100$.

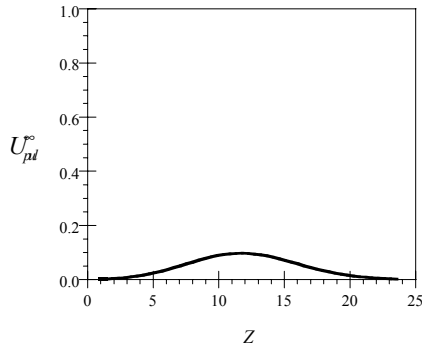
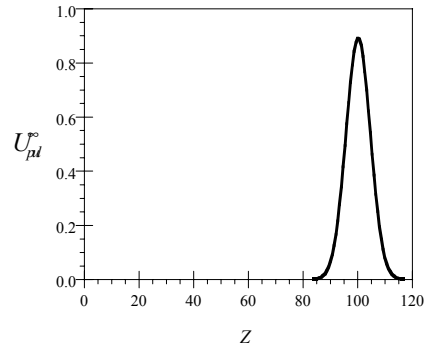
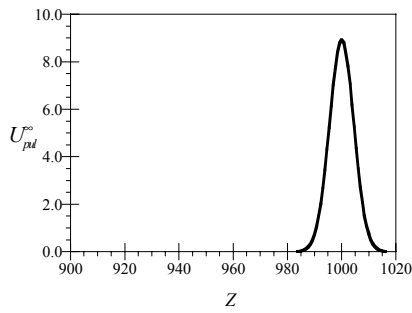
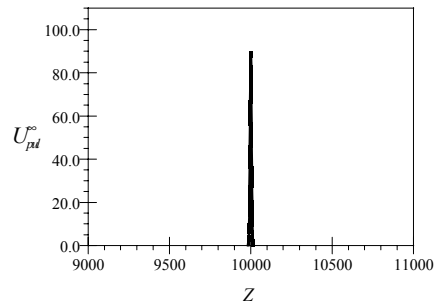
a) $Pe = 1$ b) $Pe = 10$ c) $Pe = 100$ d) $Pe = 1000$

Figura 14. Respuesta del cromatógrafo cuando $\tau = 10$ a un pulso infinito alimentado en $Z = 0$ para diferentes número de Péclet. Cada una de las figuras corresponde a la distribución de concentración a lo largo del cromatógrafo en la zona en donde hay soluto, en el resto del cromatógrafo no hay.

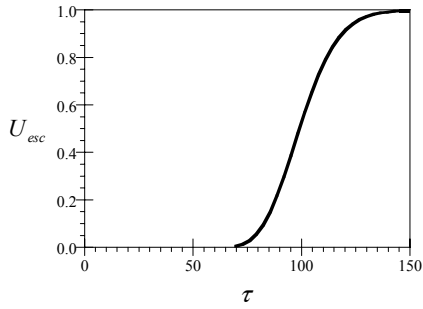
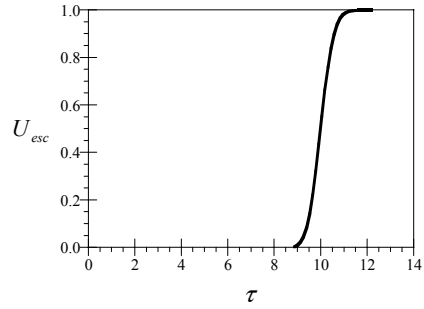
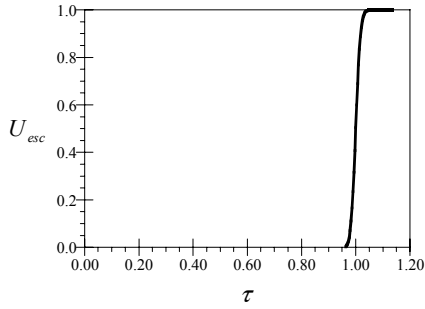
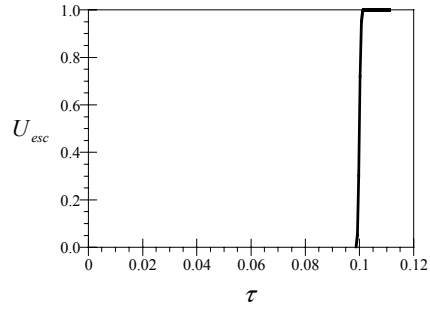
a) $Pe = 1$ b) $Pe = 10$ c) $Pe = 100$ d) $Pe = 1000$

Figura 15. Respuesta del cromatógrafo en $Z = 100$ a un escalón unitario infinito alimentado en $Z = 0$ para diferentes número de Péclet. Cada una de las figuras corresponde a un cromatograma de un cromatógrafo de longitud igual a $L/D = 100$.

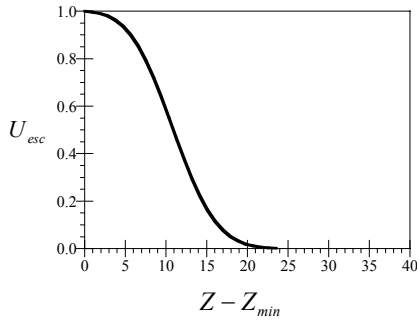
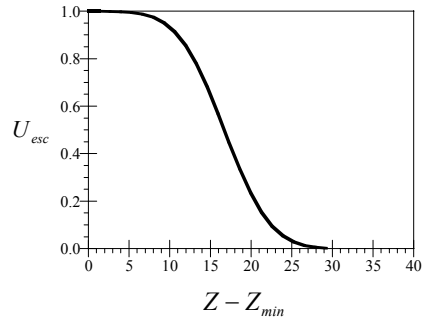
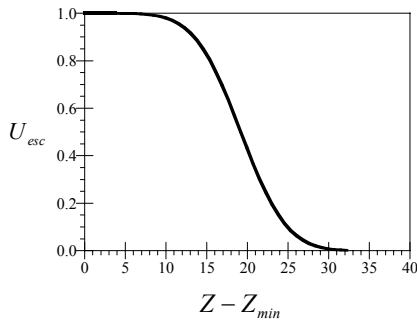
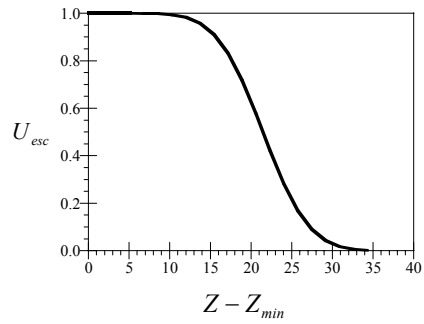
a) $Pe = 1 \quad Z_{\min} = 0$ b) $Pe = 1 \quad Z_{\min} = 83.37$ c) $Pe = 1 \quad Z_{\min} = 980.81$ d) $Pe = 1 \quad Z_{\min} = 9,978.5$

Figura 16. Respuesta del cromatógrafo cuando $\tau = 10$ a un escalón unitario alimentado en $Z = 0$ para diferentes números de Péclet. Cada una de las figuras corresponde a la distribución de concentración a lo largo del cromatógrafo en la zona en donde hay soluto, en el resto del cromatógrafo no hay. Nótese que solo se ha graficado la zona donde hay una cantidad significativa de soluto y a la posición se ha restado $Z_{\min}$.

Problemas propuestos

Problema 1

Use la transformada de Laplace para resolver el problema definido por la ecuación diferencial

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial t} = z \quad (1)$$

sujeta a la condición inicial

$$z(x, 0) = 1 \quad (2)$$

$$\text{y definida en } -\infty < x < +\infty, \text{ y } 0 \leq t < \infty \quad (3)$$

Problema 2

Use la transformada de Laplace para resolver el problema definido por la ecuación diferencial

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial t} = z \quad (1)$$

sujeta a las condiciones iniciales

$$z(x, 0) = 1 \quad (2)$$

$$z(0, t) = 1 \quad (3)$$

$$\text{y definida en } 0 \leq x < +\infty, \text{ y } 0 \leq t < \infty \quad (4)$$

Problema 3

Use la transformada de Laplace para resolver el problema dado por la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (1)$$

sujeta a las condiciones

$$\varphi(x, 0) = 0, \quad \varphi_t(x, 0) = 0, \quad \varphi(0, t) = \cos(\omega t) \quad (2)$$

$$\text{y definida en } 0 \leq x < +\infty, \text{ y } 0 \leq t < \infty \quad (3)$$

Problema 4

Use la transformada de Laplace para resolver el problema dado por la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 1 \quad (1)$$

sujeta a las condiciones

$$\varphi(x, 0) = 1, \quad \varphi_t(x, 0) = 1, \quad \varphi(0, t) = 1 \quad (2)$$

$$\text{y definida en } 0 \leq x < +\infty, \text{ y } 0 \leq t < \infty \quad (3)$$

Use la transformada de Laplace para encontrar y expresar la solución de los dos siguientes problemas en términos de la propiedad integral de convolución

Problema 5

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = g(t) \quad (1)$$

Sujeta a $Y(0) = 0, \quad \text{y} \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_{x=0} = 1 \quad (2)$

Note que $g(t)$ es una función diferenciable cualquiera.

Problema 6

Resuelva

$$\frac{d^4 y}{dt^4} - y = g(t) \quad (1)$$

Sujeta a $y(0) = 0, \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{d^2 y}{dt^2} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{d^3 y}{dt^3} \right|_{x=0} = 0 \quad (2)$

Note que $g(t)$ es una función diferenciable cualquiera.

Problema 7

Utilizando el método de la transformada de Laplace resuelva el siguiente problema dado por dos ecuaciones de primer orden acopladas:

$$2 \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 2x = 1$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 3x - 3y = 2$$

Cuando $t = 0$, $x = 0$, $y = 0$

Debe encontrarse $x(t)$ y $y(t)$.

Problema 8

Utilizando el método de la transformada de Laplace resuelva el siguiente problema dado por dos ecuaciones de primer orden acopladas:

$$\frac{dx}{dt} + 3\frac{dy}{dt} + y = 4e^t$$

$$\frac{dy}{dt} - y - x = 0$$

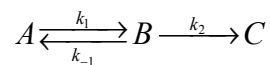
Cuando $t = 0$, $x = 0$, $y = 2$

Debe encontrarse $x(t)$ y $y(t)$.

Problema 9

(Problema 22.O, Bird et al, 1960)

Se desea producir una sustancia B en un reactor tipo tanque agitado en el que ocurre la siguiente reacción:



En el instante cero se introduce en el reactor una solución de A de concentración C_{A0} y con un flujo volumétrico constante Q . Obtenga una expresión de la cantidad de B existente en el interior del reactor en el momento en que se llena hasta su capacidad total V , suponiendo que la alimentación no contiene B y que no hay variación en las propiedades del fluido.

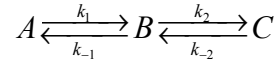
Sugerencia: planteé los balances de materia de A y B y resuelva simultáneamente por el método de la transformada de Laplace.

Problema 10

(Problema 22.N, Bird et al, 1960)

Considerar N reactores tipo tanque agitado de igual volumen V en serie. Al inicio se introduce en el primer reactor una solución de A con concentración C_{A0} y flujo

volumétrico constante Q . La corriente de alimentación contiene trazas de catalizador disuelto, de tal forma que se llevan a cabo las siguientes reacciones:



Obtenga una expresión para la concentración de cualquier componente en el tanque N en cualquier instante.

Problema 11

(Problema 19 K Bird et al, 1960)

Un modelo para la transferencia del soluto A entre los solventes mutuamente inmiscibles I y II está dado por las ecuaciones diferenciales

$$\frac{\partial C_I}{\partial t} = D_I \frac{\partial^2 C_I}{\partial z^2}, \quad \text{en } -\infty < z < 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial C_{II}}{\partial t} = D_{II} \frac{\partial^2 C_{II}}{\partial z^2}, \quad \text{en } 0 < z < +\infty \quad (2)$$

En donde C_I y C_{II} son las concentraciones en los solutos I y II respectivamente. Las condiciones de frontera e iniciales son

$$\text{En } z = 0 \quad C_{II} = K C_I \quad \text{para } t > 0 \quad (3)$$

$$\text{En } z = 0 \quad -D_I \frac{\partial C_I}{\partial z} = -D_{II} \frac{\partial C_{II}}{\partial z} \quad \text{para } t > 0 \quad (4)$$

$$\text{En } z \rightarrow -\infty \quad C_I = C_{I0} \quad (5)$$

$$\text{En } z \rightarrow +\infty \quad C_{II} = C_{II0} \quad (6)$$

$$\text{Cuando } t = 0 \quad C_I = C_{I0}, \quad \text{en } -\infty < z < 0 \quad (7)$$

$$\text{Cuando } t = 0 \quad C_{II} = C_{II0}, \quad \text{en } 0 < z < +\infty \quad (8)$$

En la ec. (3), K es la constante de reparto del soluto entre las fases. Resuelva el problema y demuestre que las concentraciones están dadas por

$$\frac{C_I - C_{I0}}{C_{II0} - K C_{I0}} = \frac{1 + \operatorname{erf}\left(z / \sqrt{4 D_I t}\right)}{K + \sqrt{D_I / D_{II}}} \quad (9)$$

$$\frac{C_{II} - C_{II0}}{C_{I0} - C_{II0} / K} = \frac{1 - \operatorname{erf}\left(z / \sqrt{4D_{II}t}\right)}{1 / K + \sqrt{D_{II} / D_I}} \quad (10)$$

Problema 12

Un problema de difusión y reacción en una partícula catalítica con reacción de primer orden está dado por la ecuación diferencial

$$\frac{\partial C_A}{\partial \tau} = D_{ef} \nabla^2 C_A - k_{ef} C_A, \quad \text{en } \Omega \quad (1)$$

Y las siguientes condiciones de frontera e inicial

$$\text{En } \Gamma \quad C_A = C_{AS} \quad \text{para } t > 0 \quad (2)$$

$$\text{Cuando } t = 0 \quad C_A = 0, \quad \text{en } \Omega \quad (3)$$

En las ecuaciones Ω y Γ indican respectivamente, el dominio que define la partícula y las fronteras del dominio. Demuestre usando la transformada de Laplace que la solución del problema es

$$C_A = f \exp(-k_{ef}t) + k_{ef} \int_0^t f \exp(k_{ef}\zeta) d\zeta \quad (4)$$

En donde f es la solución al mismo problema pero sin reacción química.

Problema 13

Demuestre que la ec. (4) del problema anterior es válida aún cuando la condición de frontera en la superficie externa de la partícula catalítica sea reemplazada por

$$\text{En } \Gamma \quad -\mathbf{n} \cdot \nabla C_A = (C_A - C_{AS}) \quad \text{para } t > 0 \quad (2)$$

Problema 14

Relacionado a los dos problemas anteriores, demuestre que los resultados de los problemas 13 y 14 son válidos, aún si la ecuación de transporte del soluto A incluye el término convectivo, de tal manera que la ec. (1) es reemplazada por

$$\frac{\partial C_A}{\partial \tau} + \mathbf{v} \cdot \nabla C_A = D_{ef} \nabla^2 C_A - k_{ef} C_A, \quad \text{en } \Omega \quad (1)$$

Problema 15

En este caso debe considerarse el transporte convectivo y difusivo del soluto A dado por la ecuación diferencial

$$\frac{\partial C_A}{\partial \tau} + \mathbf{v} \cdot \nabla C_A = D_{ef} \nabla^2 C_A - k_{ef} C_A, \quad \text{en } \Omega \quad (1)$$

y las condiciones de frontera e inicial

$$\text{En } \Gamma \quad C_A = C_{AS}(\mathbf{r}) \quad \text{para } t > 0 \quad (2)$$

$$\text{Cuando } t = 0 \quad C_A = C_A(\mathbf{r}), \quad \text{en } \Omega \quad (3)$$

Demuestre que la solución está dada por

$$C_A = g \exp(-k_{ef}t) + \int_0^t \exp(-k_{ef}\zeta) \frac{\partial f(\mathbf{r}, \zeta)}{\partial \zeta} d\zeta \quad (4)$$

En donde f es la solución del mismo problema con $k_{ef} = 0$ y $C_{AS} = 0$, y g es la solución con $k_{ef} = 0$ y $C_{A0} = 0$.

Problema 16

Resuelva el problema planteado en el Ejemplo 4, pero solo usando el método de la transformada de Laplace. El problema a resolver está dado por

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} \quad (1)$$

$$\text{cuando } \tau = 0, \quad u = 0 \quad (2)$$

$$\text{en } X = 0, \quad u = f(\tau) \quad (3)$$

$$\text{en } X = 1, \quad u = 0 \quad (4)$$

En este caso para la inversa puede utilizar una de las fórmulas de los problemas propuestos más adelante; Probs. 24.

Problema 17

Resuelva el problema 16 usando la transformada de Laplace, pero en esta ocasión use la fórmula de Heaveside para encontrar la inversa correspondiente.

Problema 18

Resuelva el problema planteado como ejemplo 5 pero en este caso solo usando la transformada de Laplace y la fórmula de Heaveside para encontrar la inversa correspondiente. El problema está dado por

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \quad (1)$$

Sujeta as las condiciones

$$u = f(\tau) \quad \text{en} \quad \xi = 1, \quad \text{para} \quad \tau > 0 \quad (2)$$

$$u = 0 \quad \text{cuando} \quad \tau = 0, \quad \text{para} \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (3)$$

Problema 19

El problema difusión y reacción en una partícula esférica en estado transitorio está definido por

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^2 \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) - \Phi^2 U$$

Con la condiciones de frontera e inicial siguientes

$$\text{En} \quad \xi = 1 \quad U = U_{\infty}(\tau) \quad \text{para} \quad \tau > 0$$

$$U \quad \text{es finita en} \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

$$\text{Cuando} \quad \tau = 0 \quad U = 0 \quad \text{para} \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

Encuentra, usando la transformada de Laplace, el perfil de concentración $U(\xi, \tau)$ y el factor de efectividad $\eta(\tau)$ bajo la suposición del falso estado estacionario en la concentración de la partícula, es decir que el término de acumulación se desprecia.

Problema 20

Resuelva por el método de la transformada de Laplace el modelo completo propuesto en el problema anterior.

Problema 21

En muchas situaciones prácticas las partículas catalíticas están suspendidas en el un fluido dentro de un tanque agitado. En el caso de partículas esféricas un modelo adimensional está dado por

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^2 \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) - \Phi^2 U$$

Sujeta a la condición de frontera

$$\text{En} \quad \xi = 1 \quad -\frac{dU}{d\xi} = Bi(U - U_f)$$

En donde la concentración del fluido U_f , está gobernada por la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dU_f}{d\tau} = \tau_R^{-1} (U_{in}(\tau) - U_f) + \psi_p (U - U_f)$$

En esta ecuación τ_R y ψ_p son constantes que indican el tiempo de residencia adimensional y un número de Biot modificado respectivamente.

Las condiciones inicial para $U_f(\tau)$ y $U(\xi, \tau)$ son

$$\text{Cuando } \tau = 0 \quad U = 0 \quad \text{para } 0 \leq \xi \leq 1$$

$$\text{Cuando } \tau = 0 \quad U_f = 0$$

Encuentre $U_f(\tau)$ y $U(\xi, \tau)$ suponiendo falso estado estacionario en la ecuación de la partícula y usando el método de la transformada de Laplace.

Problema 22

Resuelva el problema anterior considerando que las partículas son cilíndricas.

Problema 23

Usando el método de la transformada de Laplace resuelva el modelo completo del problema 14. Este es un problema con gran grado de dificultad para la mayoría de los lectores. La solución se encuentra en el trabajo de Marroquín de la Rosa y col. (2002).

Problemas 24

Los siguientes ejercicios se sugieren para quien tenga intención de enfrentarse a la solución de problemas que requieran el uso experto de la fórmula de Heaveside. Se debe encontrar para cada función la correspondiente inversa

$\bar{F}(s)$	$F(t)$
a) $\frac{\sinh(sx)}{s \sinh(sa)}$	$\frac{x}{a} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi t}{a}\right)$
b) $\frac{\sinh(sx)}{s \cosh(sa)}$	$\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2a}\right) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi t}{2a}\right)$
c) $\frac{\cosh(sx)}{s \sinh(sa)}$	$\frac{t}{a} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi t}{a}\right)$
d) $\frac{\cosh(sx)}{s \cosh(sa)}$	$1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2a}\right) \cos\left(\frac{(2n-1)\pi t}{2a}\right)$

$$e) \frac{\sinh(sx)}{s^2 \sinh(sa)} \quad \frac{xt}{a} + \frac{2a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{a}\right)$$

$$f) \frac{\sinh(sx)}{s^2 \cosh(sa)} \quad x + \frac{8a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2a}\right) \cos\left(\frac{(2n-1)\pi t}{2a}\right)$$

$$g) \frac{\cosh(sx)}{s^2 \sinh(sa)} \quad \frac{t^2}{2a} + \frac{2a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \left[1 - \cos\left(\frac{n\pi t}{a}\right)\right]$$

$$h) \frac{\cosh(sx)}{s^2 \cosh(sa)} \quad t + \frac{8a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi t}{2a}\right)$$

$$i) \frac{\cosh(sx)}{s^3 \cosh(sa)} \quad \frac{1}{2}(t^2 + x^2 - a^2) - \frac{16a^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^3} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2a}\right) \cos\left(\frac{(2n-1)\pi t}{2a}\right)$$

$$j) \frac{\sinh(\sqrt{s}x)}{\sinh(\sqrt{s}a)} \quad \frac{2\pi}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 t}{a^2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

$$k) \frac{\cosh(\sqrt{s}x)}{\cosh(\sqrt{s}a)} \quad \frac{\pi}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (2n-1) \exp\left(-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 t}{4a^2}\right) \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2a}\right)$$

$$l) \frac{\sinh(\sqrt{s}x)}{\sqrt{s} \cosh(\sqrt{s}a)} \quad \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \exp\left(-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 t}{4a^2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2a}\right)$$

$$m) \frac{\cosh(\sqrt{s}x)}{\sqrt{s} \sinh(\sqrt{s}a)} \quad \frac{1}{a} + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 t}{a^2}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

$$n) \frac{\sinh(\sqrt{s}x)}{s \sinh(\sqrt{s}a)} \quad \frac{x}{a} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 t}{a^2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

$$o) \frac{\cosh(\sqrt{s}x)}{\sqrt{s} \cosh(\sqrt{s}a)} \quad 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)} \exp\left(-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 t}{4a^2}\right) \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2a}\right)$$

p) $\frac{\sinh(\sqrt{s} x)}{s^2 \sinh(\sqrt{s} a)} = \frac{x t}{a} + \frac{2 a^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \left[1 - \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 t}{a^2}\right) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi x}{a}\right)$

q) $\frac{\cosh(\sqrt{s} x)}{s^2 \cosh(\sqrt{s} a)} = \frac{\frac{1}{2}(x^2 - a^2) + t}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^3} \exp\left(-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 t}{4 a^2}\right) \cos\left(\frac{(2n-1) \pi x}{2a}\right)$

VI. Soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales parciales por el método de diferencias finitas

0. Algunos comentarios sobre el material incluido en este capítulo

En este capítulo se revisa el método de diferencias finitas para la solución de ecuaciones diferenciales parciales. La presentación está restringida a problemas definidos en términos de ecuaciones elípticas bidimensionales y parabólicas con dependencia espacial en una dirección. Todo el desarrollo se limita a sistemas de coordenadas cartesianos, pero se espera que el alumno pueda extender la metodología a otros sistemas coordenados al realizar algunos de los ejercicios y problemas propuestos al final del capítulo, así como en los Proyectos 2 y 4 que se proponen en las páginas 390 y 394, respectivamente.

La metodología de diferencias finitas se introduce usando como ejemplo la solución de una ecuación diferencial ordinaria, ya que en esta situación se involucran muchos de los aspectos también usados para la solución de ecuaciones diferenciales parciales. Para este problema sencillo se discuten diversas posibilidades para la solución de las ecuaciones lineales resultantes de la discretización del problema de valor en la frontera con diversos tipos de condiciones de frontera, y se incluye en forma especial el algoritmo de Thomas para sistemas de ecuaciones tridiagonales.

Las ideas presentadas para la ecuación diferencial ordinaria se recuperan entonces para introducir la representación en diferencias finitas de un problema de valor en la frontera se utiliza la solución de una ecuación diferencial parcial elíptica en un dominio con condiciones de frontera tipo Dirichlet. Como primera opción para la solución del sistema de ecuaciones lineales resultantes de la discretización de la ecuación diferencial se plantea el uso de los métodos de Jacobi, Gauss-Seidel y SOR. Posteriormente, se propone la solución usando el método de inversión línea por línea basado en el algoritmo de Thomas, discutido anteriormente. Una vez establecido lo anterior se discute la incorporación de condiciones de frontera del tipo de Newman y Cauchy.

Con lo revisado al momento, es entonces relativamente sencillo presentar los métodos implícitos, explícitos y de Crank-Nicholson para la solución de ecuaciones diferenciales parabólicas. Adicionalmente, usando como ejemplo la solución de una ecuación diferencial parabólica bidimensional, se presenta el método ADI.

Finalmente, se concluye con la presentación de una metodología, para resolver problemas no lineales, basada en la linealización de Richtmeyer.

Se recomienda que el lector trabaje los problemas al final del capítulo. Ahí se sugieren la elaboración de varios programas de cómputo que involucran la implementación de los métodos numéricos propuestos. Pero será muy importante el que trabaje en el desarrollo

de alguno(s) de los proyectos propuestos en las páginas 387-394. Ello permitirá que se analice en forma sistemática el efecto de los parámetros numéricos y la comparación con las soluciones exactas. También, permitirá la discusión sobre la conveniencia de una solución numérica o analítica, y el pensar sobre la distancia que hay entre disponer de una fórmula y su evaluación.

Sobre las referencias

Al lector que desee profundizar sobre detalles de los temas presentados se le recomienda revisar el libro de Smith [10]. Adicionalmente, en el libro de Greenberg [4] se presentan casos específicos para la solución de ecuaciones diferenciales elípticas y parabólicas; por otro lado en el libro de Kreyszig [6] se presenta una revisión del software comercial para la solución de los problemas planteados en este capítulo, así mismo hay una revisión clara de los temas aquí presentados.

1. Introducción

Normalmente para la solución de problemas con ecuaciones diferenciales y/o condiciones de frontera no lineales, o cuando el problema está dado por ecuaciones diferenciales acopladas, (por las condiciones de frontera, por los términos fuentes, por los coeficientes de transporte, etc) debe recurrirse a los métodos numéricos. Estos métodos pueden dar un valor aproximado de la solución en varios puntos del dominio de solución. En el método de diferencias finitas, el que revisaremos en este capítulo, los puntos se localizan en la intersección de las llamadas líneas de la malla. La implementación de este método es relativamente fácil si las líneas de malla pueden ser y son seleccionadas paralelas a los ejes coordenados. Un ejemplo de una malla computacional con las características anteriores se muestra en la figura siguiente

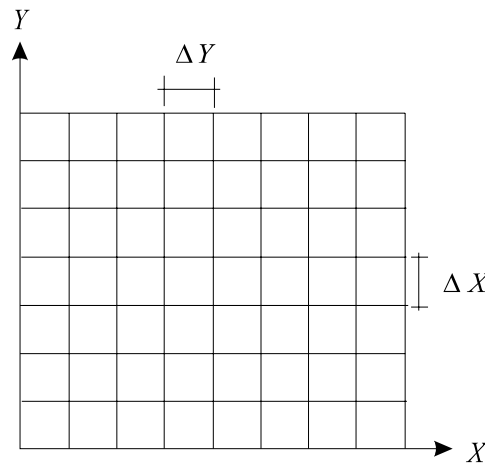


Figura 1. Dominio rectangular en coordenadas cartesianas con espaciamiento constante entre las líneas de malla.

En este caso nótese que el dominio es rectangular, las líneas de la malla son paralelas a los ejes coordenados y que la frontera está fácilmente representada por dos líneas de malla paralelas al eje x y dos paralelas al eje y . Para un dominio de forma cilíndrica, como la mostrada en la Figura 2a, es posible aún satisfacer el que las líneas de malla sean paralelas a los ejes coordenados si se utiliza el sistema de coordenadas adecuado; en este caso no es adecuado usar coordenadas cartesianas ya que la frontera dada por $x^2 + y^2 = 1$, no es paralela a un eje coordenado cartesiano. Es claro que para el caso mostrado en la Figura 2a, un sistema coordenado adecuado es el de coordenadas polares (r, θ) , tal como se muestra en la Figura 2b, en donde además se muestran tres de las líneas de malla. El dominio discretizado en la Figura 2b corresponde al mostrado en la Figura 2c.

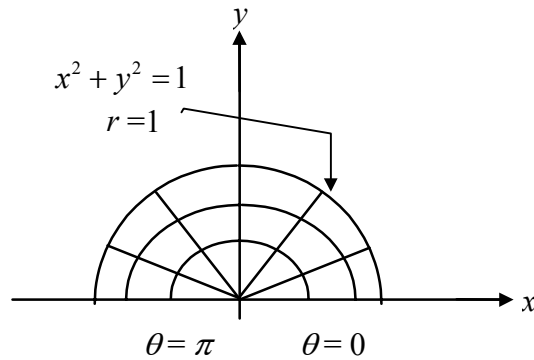


Figura 2a. Dominio semicircular para la solución de un problema bidimensional. Se muestra el sistema de coordenadas cartesianas y también en el de coordenadas cilíndricas.

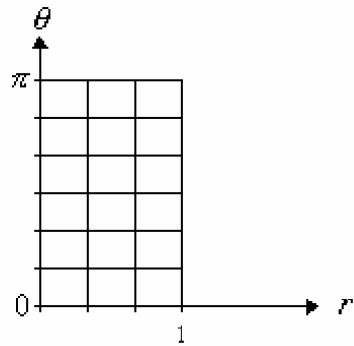


Figura 2b. Dominio semicircular en coordenadas cilíndricas en donde es claro que las fronteras del sistema corresponden a línea de coordenada constante paralela a los ejes coordenados r y θ .

Así, los métodos de diferencias finitas, que se basan en el uso de series de Taylor para aproximar las derivadas en las ecuaciones diferenciales, son muy útiles cuando la frontera del dominio del sistema se representa con curvas paralelas en todos sus puntos a los ejes coordenados. Esto no será fácil en sistemas como los mostrados en la Figura 3, porque la

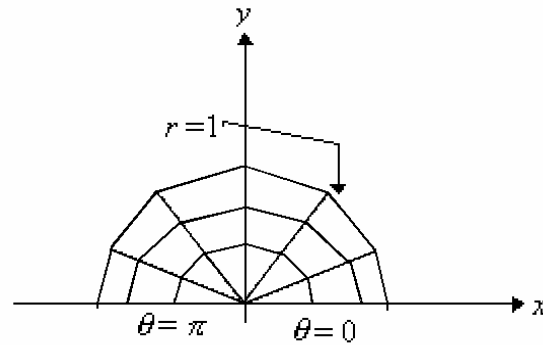


Figura 2c. Dominio semicircular discretizado en el sistema de coordenadas cartesianas.
Nótese el error al representar las líneas circulares

representación de la frontera irregular, dada por $f(x,y)$ será difícil en el método de diferencias finitas porque requiere una gran cantidad de puntos (nodos) o espaciamiento variable entre ellos. Esto hará mucho más complicadas las ecuaciones que representan las ecuaciones diferenciales lo que se reflejará en un gran consumo de memoria, tiempo de cómputo y complejidad en la programación. En contraste, en los métodos de elemento finito las líneas de la malla no tienen que ser ortogonales, ni paralelas a los ejes coordenados; así las mallas computacionales pueden ajustarse a cualquier geometría, como se muestra en la Figura 4. Estos métodos de solución se basan en la aproximación de la solución en cada elemento por funciones base. Sin embargo, el desarrollo de las ecuaciones que deben resolverse requiere, por parte del estudiante, un manejo fluido de las teorías de aproximación y transformación de coordenadas. Además, la manipulación de las ecuaciones para su solución es también más compleja y requiere mayor experiencia en la programación.

La misma discusión podría realizarse con respecto a otros métodos de solución numérica y tal vez al final se reduzca, a que más que razones de fondo, la selección del método es más por el gusto de quien presenta un método. Sin embargo, el conocimiento de los fundamentos de uno de los métodos y la experiencia al resolver problemas con el, preparará a los estudiantes para el uso de otros métodos más complicados o específicos.

Nosotros hemos seleccionado el método de diferencias finitas porque nuestra experiencia, con un buen número de estudiantes de Ingeniería Química, nos ha mostrado que los métodos son muy flexibles y pueden utilizarse para resolver un gran número de problemas que surgen en situaciones prácticas relacionadas a la Ing. Química.

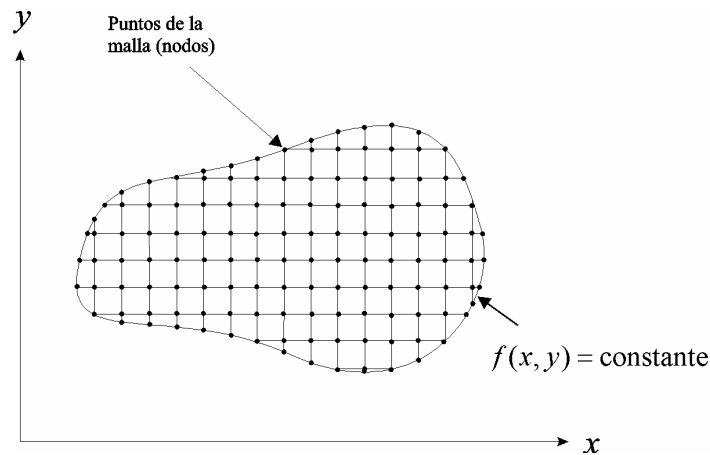


Figura 3. Malla computacional para la solución de un problema bidimensional con el método de diferencias finitas

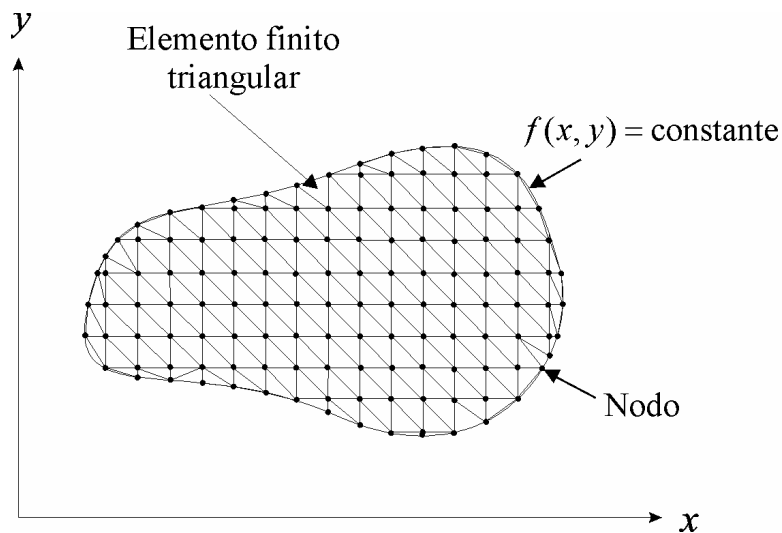


Figura 4. Dominio discretizado con elementos finitos para la solución de un problema bidimensional

En la siguiente sección revisaremos los fundamentos del método, lo haremos alrededor de la solución de un problema unidimensional y que tiene solución analítica. Esto, con la idea de que la mayor parte de los pasos, que también deberán ser considerados en la solución de problemas mucho más complicados, están contenidos en el proceso para encontrar la solución de un problema tan simple.

2. El método de diferencias finitas aplicado a la solución de problemas lineales unidimensionales de difusión con reacción química lineales y en estado estacionario

El problema con condiciones de frontera tipo Dirichlet

Se pretende la solución del problema de valor en la frontera definido por la siguiente ecuación diferencial lineal ordinaria

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \Phi^2 y = 0, \quad \text{en } a < x < b \quad (2.1)$$

sujeta a las condiciones de frontera tipo dirichlet, dadas por

$$\text{en } x = a, \quad y = y_a \quad (2.2)$$

$$\text{en } x = b, \quad y = y_b \quad (2.3)$$

Puede considerarse que el problema es un modelo adimensional de la situación que ocurre cuando un soluto se difunde en una placa de espesor $b - a$ en la que reacciona de acuerdo a una cinética de primer orden. Así, y es la concentración adimensional, x es la posición adimensional y Φ es el módulo de Thiele.

El primer paso para la solución numérica del problema es encontrar la representación (discretización) de la ecuación diferencial en diferencias finitas. Esta idea se muestra esquemáticamente en la Figura 5. Así, inicialmente se busca la expansión en series de Taylor de la función y en las posiciones $x + \Delta x$ y $x - \Delta x$ alrededor (en términos) de los valores de la función y sus derivadas en la posición x . O sea

$$y(x + \Delta x) = y(x) + \Delta x \left. \frac{dy}{dx} \right|_x + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_x + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \left. \frac{d^3 y}{dx^3} \right|_x + \frac{(\Delta x)^4}{4!} \left. \frac{d^4 y}{dx^4} \right|_x + \dots \quad (2.4)$$

y

$$y(x - \Delta x) = y(x) + (-\Delta x) \left. \frac{dy}{dx} \right|_x + \frac{(-\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_x + \frac{(-\Delta x)^3}{3!} \left. \frac{d^3 y}{dx^3} \right|_x + \frac{(-\Delta x)^4}{4!} \left. \frac{d^4 y}{dx^4} \right|_x + \dots \quad (2.5)$$

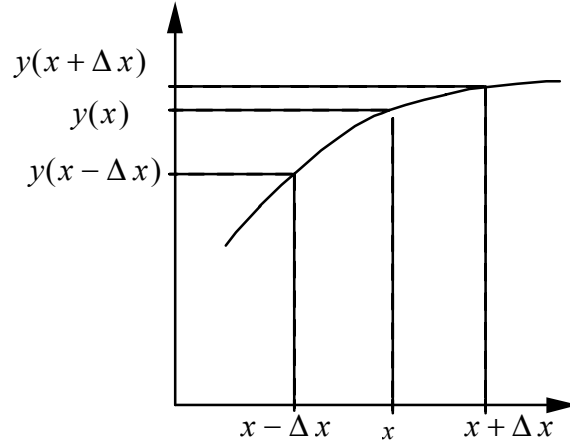


Figura 5. Expansión en series de Taylor de $y(x)$ alrededor de x .

Para discretizar la ecuación diferencial (2.1) se busca una representación de la segunda derivada de y , por ello se suman las ecs. (2.4) y (2.5) para obtener

$$y(x + \Delta x) + y(x - \Delta x) = 2y(x) + (\Delta x)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_x + \frac{1}{12} (\Delta x)^4 \frac{d^4 y}{dx^4} \Big|_x + \dots \quad (2.6)$$

De esta se obtiene

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_x = \frac{y(x + \Delta x) - 2y(x) + y(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} - \frac{1}{12} (\Delta x)^2 \frac{d^4 y}{dx^4} \Big|_x + \dots \quad (2.7)$$

que puede ser escrita como

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_x = \frac{y(x + \Delta x) - 2y(x) + y(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} + \mathcal{O}[(\Delta x)^2] \quad (2.8)$$

en donde el símbolo $\mathcal{O}$ se usa para indicar el orden de magnitud del término restante más grande. Al despreciar los términos $\mathcal{O}[(\Delta x)^2]$, la segunda derivada es aproximada por

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_x \cong \frac{y(x + \Delta x) - 2y(x) + y(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} \quad (2.9)$$

Ahora se define, con base en la Figura 5, el siguiente parámetro numérico Δx que especifica la separación entre los puntos de la malla computacional y en la cual se consideran N puntos (nodos) incluyendo el inicial en $x = a$, el final en $x = b$ y los $N - 2$ nodos intermedios

$$\Delta x = \frac{x_N - x_1}{N - 1} = \frac{b - a}{N - 1} \quad (2.10)$$

Así la posición de cada uno de los nodos está dada por

$$x_i = a + (i-1)\Delta x, \quad \text{para } i = 1, \dots, N \quad (2.11)$$

y se ha creado la malla computacional mostrada en la figura siguiente

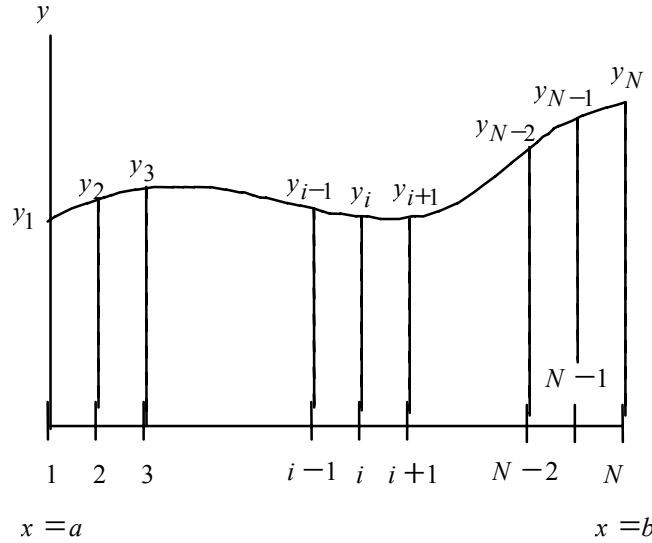


Figura 6. Dominio discretizado y nomenclatura en diferencias finitas.

Adoptando la nomenclatura introducida, la representación de la segunda derivada es

$$\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_i \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{(\Delta x)^2} \quad (2.12)$$

Con la nomenclatura que se acaba de introducir el problema de valor en la frontera definido por las ecuaciones (2.1) a (2.3) toma la forma

$$\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_i - \Phi^2 y_i = 0, \quad 2 \leq i \leq N-1 \quad (2.13)$$

$$\text{en } i=1, \quad y_1 = y_a \quad (2.14)$$

$$\text{en } i=N, \quad y_N = y_b \quad (2.15)$$

Usando la ec. (2.12) para reemplazar la segunda derivada en la ec. (2.13) se obtiene

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{(\Delta x)^2} - M^2 y_i = 0$$

$$\text{ó} \quad y_{i-1} - [2 + (\Delta x)^2 \Phi^2] y_i + y_{i+1} = 0, \quad 2 \leq i \leq N-1 \quad (2.16)$$

Debe enfatizarse la importancia del símbolo $\approx$, que ya no se usó en la ec. (2.13), ya que implica que la ecuación (2.16) es una aproximación de la ecuación diferencial original.

Esta representación se acercará al original, dado por las ecs. (2.1)-(2.3), cuando $\Delta x \rightarrow 0$ ó $N \rightarrow \infty$. Al usar la ec. (2.16) para reemplazar la ecuación diferencial [ec. (13)] se obtiene la forma discretizada del problema de valor en la frontera, así

$$y_{i-1} - \left[2 + (\Delta x)^2 \Phi^2 \right] y_i + y_{i+1} = 0, \quad 2 \leq i \leq N-1 \quad (2.17)$$

$$\text{en } i = 1, \quad y_1 = 1 \quad (2.18)$$

$$\text{en } i = N, \quad y_N = 0 \quad (2.19)$$

Aquí es claro que para la representación de la ecuación diferencial de segundo orden se involucran tres nodos contiguos, lo cual lleva a la introducción de celda computacional y que en este caso es la mostrada en la siguiente figura:

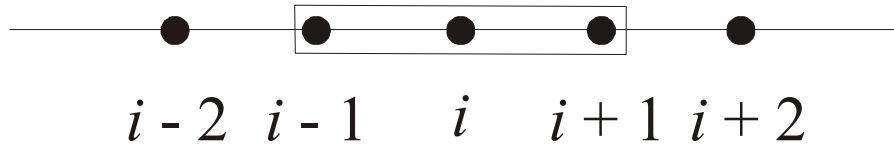


Figura 7. Celda computacional para solución de ecuación ordinaria de segundo orden.

Esta es la representación en diferencias finitas del problema de valor en la frontera, definido por las ecs. (2.1)-(2.3), y que también puede ser escrito como

$$y_1 = y_a \quad (2.20a)$$

$$y_{i-1} + r y_i + y_{i+1} = 0, \quad 2 \leq i \leq N-1 \quad (2.20b)$$

$$y_N = y_b \quad (2.20c)$$

En la ecuación (2.20b) se usó

$$r = - \left[2 + (\Delta x)^2 \Phi^2 \right] \quad (2.21)$$

Es claro que en las ecs. (2.17)-(2.19), se tiene un sistema de N ecuaciones lineales con N incógnitas, el cual se puede resolver por algún método conocido. En esta presentación se insistirá en la conveniencia de involucrar el algoritmo de Thomas, para ello se reescriben las ecuaciones (2.17)-(2.19) en forma matricial

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
 1 & r & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
 0 & 1 & r & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
 0 & 0 & 1 & r & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & r & 1 & 0 \\
 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & r & 1 \\
 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 y_1 \\
 y_2 \\
 y_3 \\
 y_4 \\
 \dots \\
 \dots \\
 \dots \\
 y_{N-2} \\
 y_{N-1} \\
 y_N
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 y_a \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 \dots \\
 \dots \\
 \dots \\
 0 \\
 0 \\
 y_b
 \end{bmatrix}
 \quad (2.22)$$

Se debe notar que solo hay tres incógnitas o menos en cada una de las ecuaciones, el sistema de ecuaciones es el denominado sistema de ecuaciones lineales tridiagonal. El algoritmo de Thomas que debe obtenerlo el estudiante en el Problema 3 del grupo 5, se presenta a continuación.

La solución del sistema de ecuaciones lineales asociadas al método de diferencias finitas

Se acaba de ver la necesidad de invertir una matriz de la siguiente forma,

$$\begin{bmatrix}
 B_1 & C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 A_2 & B_2 & C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & A_3 & B_3 & C_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_n & B_n
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 U_1 \\
 U_2 \\
 U_3 \\
 . \\
 . \\
 . \\
 . \\
 U_n
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 D_1 \\
 D_2 \\
 D_3 \\
 . \\
 . \\
 . \\
 . \\
 D_n
 \end{bmatrix}
 \quad (2.23)$$

en donde $n = N$ es el número de ecuaciones lineales. La solución del sistema se puede obtener por eliminación Gaussiana como se solicita en el Problema 3 de final de capítulo y es conocida como el algoritmo de Thomas. Nótese que el sistema de ecuaciones dado por la ec. (2.23) es más general que el presentado en la ecuación (2.22), ya que los coeficientes de la diagonal principal y las dos adyacentes no están restringidos a un valor en particular. El procedimiento se inicia resolviendo para U_1 la ecuación correspondiente al renglón 1 del sistema matricial mostrado arriba, para eventualmente obtener la fórmula que permite el cálculo de la incógnita U_n

$$U_n = \frac{D_n - A_n g_{n-1}}{B_n - A_n b_{n-1}} = g_n \quad (2.24)$$

Para obtener U_n es necesario conocer b_{n-1} y g_{n-1} , que se evalúan de las expresiones siguientes

$$\omega_1 = B_1^{-1} \quad b_1 = \omega_1 C_1 \quad g_1 = \omega_1 D_1 \quad (2.25)$$

$$\omega_i = (B_i - A_i b_{i-1})^{-1} \quad b_i = \omega_i C_i \quad g_i = \omega_i (D_i - A_i g_{i-1}) \quad \text{para } i = 2, 3, \dots, n-1 \quad (2.26)$$

Una vez conocida U_n se aplica la siguiente fórmula de recursión para conocer el resto de las incógnitas

$$U_i = g_i - b_i U_{i+1}, \quad \text{para } 2 \leq i \leq n-1 \quad (2.27)$$

La gran ventaja, de reconocer el que el sistema de ecuaciones es tridiagonal, es que así se evita el manejar arreglos matriciales de dimensión $N \times N$, y entonces solo se requiere el manejo de cinco vectores de dimensión N (**A**, **B**, **C**, **D** y **U**) que corresponden a los coeficientes y variable designados con la misma letra.

Al comparar los sistemas de ecuaciones dados por (2.21) y (2.22) se concluye que

$$A_1 = 0, \quad A_i = 1 \quad \text{para } 2 \leq i \leq N-1 \quad A_N = 0 \quad (2.28a)$$

$$B_1 = 1, \quad B_i = r \quad \text{para } 2 \leq i \leq N-1 \quad B_N = 1 \quad (2.28b)$$

$$C_1 = 0, \quad C_i = 1 \quad \text{para } 2 \leq i \leq N-1 \quad C_N = 0 \quad (2.28c)$$

$$D_1 = y_a, \quad D_i = 0 \quad \text{para } 2 \leq i \leq N-1 \quad D_N = y_b \quad (2.28c)$$

Aún, si el número de nodos usados no es muy grande es conveniente desarrollar un programa de cómputo para resolver el sistema de ecuaciones lineales, ya sea con el algoritmo de Thomas u otro método.

El programa de cálculo de la solución de la ecuación diferencial (2.1) y basado en la representación dada por las ecs. (2.20) tendrá la siguiente estructura:

- a) Llamado a la rutina de lectura de datos
- b) Llamado a la rutina que en forma recursiva calcula las componentes de los vectores **A**, **B**, **C** y **D** necesarios para definir la matriz tridiagonal [Ecs. (2.28)]. En este paso se incorporan también las condiciones de frontera.

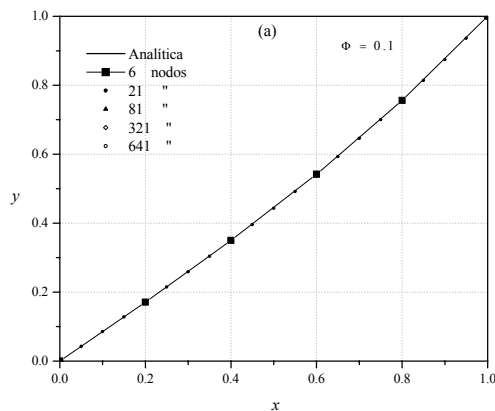
- c) Llamado a la rutina que resuelve el sistema de ecuaciones tridiagonal: la rutina regresará los valores de la solución en el vector $\mathbf{U}$.
- d) Llamado a la rutina que muestra los resultados.

En las gráficas de la Figura 8 se muestran los perfiles de la variable y como función de la posición x , para el caso en que en $x=0$, $y=0$ y en $x=1$, $y=1$. En cada una de las gráficas se mantiene fijo el parámetro Φ , y se muestra como al aumentar el número de nodos la solución numérica tiende a la solución analítica dada por la ecuación siguiente

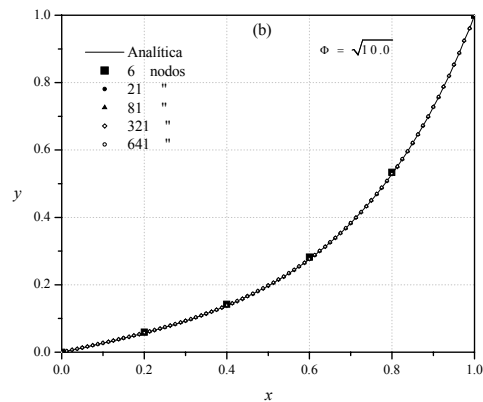
$$y = \frac{\sinh(\Phi x)}{\sinh(\Phi)}$$

Es claro que la solución numérica tiene mayores problemas para predecir la solución real a medida que el parámetro Φ aumenta. Más adelante retomaremos este caso para resolver esta situación eficientemente: la idea de malla variable. Se proseguirá en la sección con la solución de la misma ecuación diferencial pero sujeta a condiciones de frontera un poco más complicadas.

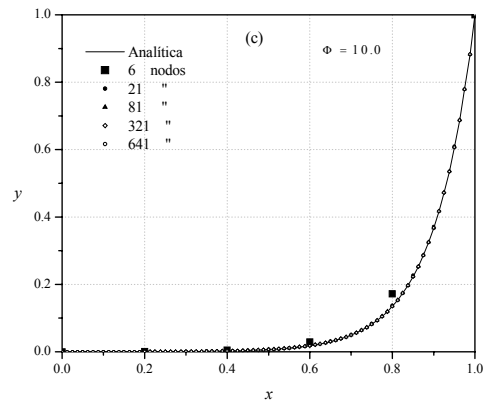
A continuación se muestran en forma gráfica los resultados de la evaluación del problema con condiciones de frontera tipo Dirichlet.



(a)



(b)



(c)

Figura 8. Comparación del efecto del número de nodos en la solución numérica del problema definido por las ecs. (2.1)-(2.3). Los datos usados son $x=a=0$, $x=b=1$, $y_a=0.0$ y $y_b=1$. El módulo de Thiele Φ es constante en cada una de las gráficas: (a) 0.1, (b) $\sqrt{10}$ y (c) 10.0.

El problema con condiciones de frontera tipo Newman y Cauchy

Ahora se pretende la solución del problema de valor en la frontera definido por la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \Phi^2 y = 0, \quad \text{en } a < x < b \quad (2.30)$$

Sujeta a las condiciones de frontera tipo Cauchy dadas por

$$\text{en } x = a, \quad \frac{dy}{dx} = \alpha_a (y - y_a) \quad (2.31)$$

$$\text{en } x = b, \quad -\frac{dy}{dx} = \alpha_b (y - y_b) \quad (2.32)$$

Nótese que si los parámetros α en las ecuaciones (2.31) y (2.32) toman un valor suficientemente pequeño la condición de frontera se podrá reemplazar por la tipo Newman ($y' \rightarrow 0$). Si por el contrario los parámetros α toman un valor suficientemente grande entonces las condiciones podrán ser reemplazada por las de tipo Dirichlet ($y \rightarrow y_a$ y $y \rightarrow y_b$).

Para la solución del problema dado por las ecs. (2.30)-(2.32) no tenemos, en este momento, formas para representar la primera derivada en diferencias finitas. Por ello recurrimos nuevamente a las ecuaciones (2.4) y (2.5) que son las representaciones de la función $y(x + \Delta x)$ y $y(x - \Delta x)$ en términos del valor $y(x)$.

De la ecuación (2.4) se puede despejar la primera derivada para obtener la fórmula que representa la derivada con *diferencia hacia adelante*

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_x = \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} + \mathcal{O}[\Delta x] \quad (2.33)$$

En forma análoga de la ec. (2.5) se puede obtener la fórmula de la primera derivada con *diferencia hacia atrás*

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_x = \frac{y(x) - y(x - \Delta x)}{\Delta x} + \mathcal{O}[\Delta x] \quad (2.34)$$

Y del resultado de restar la ec. (2.5) a la (2.4) se obtiene la representación de la derivada con *diferencias centrales*

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_x = \frac{y(x + \Delta x) - y(x - \Delta x)}{2\Delta x} + \mathcal{O}[(\Delta x)^2] \quad (2.35)$$

En resumen, En la nomenclatura de diferencias finitas la representación de la primera derivada es:

$$\text{Diferencias hacia adelante} \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_i \cong \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x} \quad (2.36)$$

$$\text{Diferencias hacia atrás} \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_i \cong \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x} \quad (2.37)$$

$$\text{Diferencias centrales} \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_i \cong \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta x} \quad (2.38)$$

Así, al disponer de estas fórmulas, se puede usar la ec. (2.36) para representar la derivada en la condición de frontera dada por la ec. (2.31) y obtener

$$\text{en } i = 1, \quad \frac{y_2 - y_1}{\Delta x} = \alpha_a (y_1 - y_a)$$

$$\text{ó} \quad \text{en } i = 1, \quad (1 + \alpha_a \Delta x) y_1 - y_2 = \alpha_a \Delta x y_a \quad (2.39)$$

Por otro lado se puede usar la ec. (2.37) para representar la condición de frontera dada por la ec. (2.32)

$$\text{en } i = N, \quad -\frac{y_N - y_{N-1}}{\Delta x} = \alpha_b (y_N - y_b)$$

$$\text{ó} \quad \text{en } i = N, \quad y_{N-1} - (1 + \Delta x \alpha_b) y_N = -\Delta x \alpha_b y_b \quad (2.40)$$

Usando la representación para la ecuación diferencial dada por la ec. (2.20a) y las ecs. (2.38) y (2.39) para las condiciones de frontera, la representación del problema dado por las ecs. (2.30)-(2.32) en diferencias finitas es

$$\text{en } i = 1, \quad (1 + \alpha_a \Delta x) y_1 - y_2 = \alpha_a \Delta x y_a \quad (2.41a)$$

$$y_{i-1} + r y_i + y_{i+1} = 0, \quad 2 \leq i \leq N-1 \quad (2.41b)$$

$$\text{en } i = N, \quad y_{N-1} - (1 + \Delta x \alpha_b) y_N = -\Delta x \alpha_b y_b \quad (2.41c)$$

Nuevamente se tiene un sistema tridiagonal de ecuaciones, y su representación en forma matricial es

$$\begin{bmatrix}
1 + \alpha_a \Delta x & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
1 & r & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & 1 & r & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & 0 & 1 & r & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & r & 1 & 0 \\
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & r & 1 \\
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & -(1 + \Delta x \alpha_b)
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
y_1 \\
y_2 \\
y_3 \\
y_4 \\
\dots \\
\dots \\
\dots \\
y_{N-2} \\
y_{N-1} \\
y_N
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\alpha_a \Delta x y_a \\
0 \\
0 \\
0 \\
\dots \\
\dots \\
\dots \\
0 \\
0 \\
-\Delta x \alpha_b y_b
\end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Como era de esperar solo han sido modificadas las ecuaciones correspondientes a los nodos en las fronteras. El sistema de ecuaciones se puede resolver por la aplicación directa del algoritmo de Thomas, y las fórmulas para los coeficientes del sistema tridiagonal son

$$A_1 = 0, \quad A_i = 1 \quad \text{para} \quad 2 \leq i \leq N-1, \quad A_N = 1 \quad (2.42a)$$

$$B_1 = 1 + \alpha_a \Delta x, \quad B_i = r \quad \text{para} \quad 2 \leq i \leq N-1, \quad B_N = -(1 + \alpha_b \Delta x) \quad (2.42b)$$

$$C_1 = 1, \quad C_i = 1 \quad \text{para} \quad 2 \leq i \leq N-1, \quad C_N = 0 \quad (2.42c)$$

$$D_1 = \alpha_a \Delta x y_a, \quad D_i = 0 \quad \text{para} \quad 2 \leq i \leq N-1, \quad D_N = -\alpha_b \Delta x y_b \quad (2.42d)$$

El programa de computación puede ser el mismo que el escrito para condiciones de frontera tipo Dirichlet, y solo se deberán considerar en forma específica la ecs. (2.42). En las Figuras 9, 10 y 11 siguientes se muestra el efecto del número de nodos para los casos en que el Módulo de Thiele Φ es 1, 10 y 20. Los cálculos se han hecho para $x = a = 0$, $x = b = 1$, $\alpha_a = 0$ y $y_b = 1$. En cada una de las gráficas el parámetro α_b es constante (0.1, 1 ó 10). Nótese que al hacer $\alpha_a = 0$ la condición de frontera en $x = 0$ es del tipo Newman, y ello es posible aunque el programa fue escrito para una condición de frontera de tipo Cauchy. Por otro lado en $x = 1$, a medida que α_b aumenta la condición de frontera de Cauchy se asemeja a una de Dirichlet. En cada una de las gráficas se muestra como referencia la solución analítica correspondiente a este caso, con una y_b cualquiera, es

$$y = \frac{y_b \alpha_b \cosh(\Phi x)}{\Phi \sinh(\Phi) + \alpha_b \cosh(\Phi)} \quad (2.43)$$

Tabla 1.- Lista de figuras y parámetros utilizados en la evaluación de la solución para las diferentes condiciones de frontera.

Condición de Dirichlet

Figura	Φ	y_a	y_b
8. (a)	1.0	0.0	1.0
(b)	$\sqrt{10.0}$	0.0	1.0
(c)	10.0	0.0	1.0

Condición de Cauchy

Figura	Φ	y_a	y_b	α_a	α_b
9. (a)	1.0	0.0	1.0	0.0	0.1
(b)	1.0	0.0	1.0	0.0	1.0
(c)	1.0	0.0	1.0	0.0	10.0
10. (a)	$\sqrt{10.0}$	0.0	1.0	0.0	0.1
(b)	$\sqrt{10.0}$	0.0	1.0	0.0	1.0
(c)	$\sqrt{10.0}$	0.0	1.0	0.0	10.0
11. (a)	10.0	0.0	1.0	0.0	0.1
(b)	10.0	0.0	1.0	0.0	1.0
(c)	10.0	0.0	1.0	0.0	10.0

A continuación se muestran en forma gráfica los resultados de la evaluación del problema con condiciones de frontera tipo Cauchy.

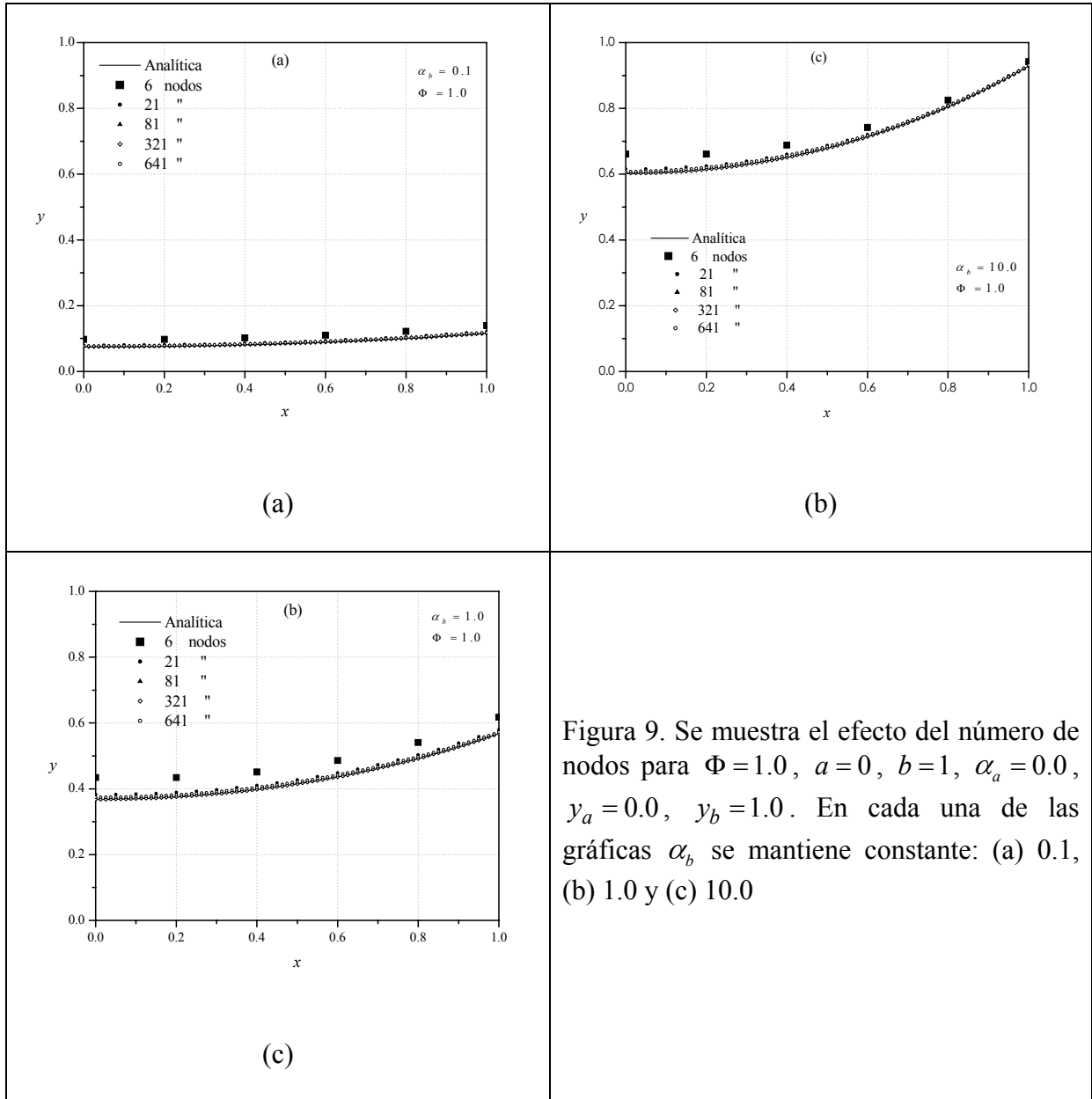


Figura 9. Se muestra el efecto del número de nodos para $\Phi = 1.0$, $a = 0$, $b = 1$, $\alpha_a = 0.0$, $y_a = 0.0$, $y_b = 1.0$. En cada una de las gráficas α_b se mantiene constante: (a) 0.1, (b) 1.0 y (c) 10.0

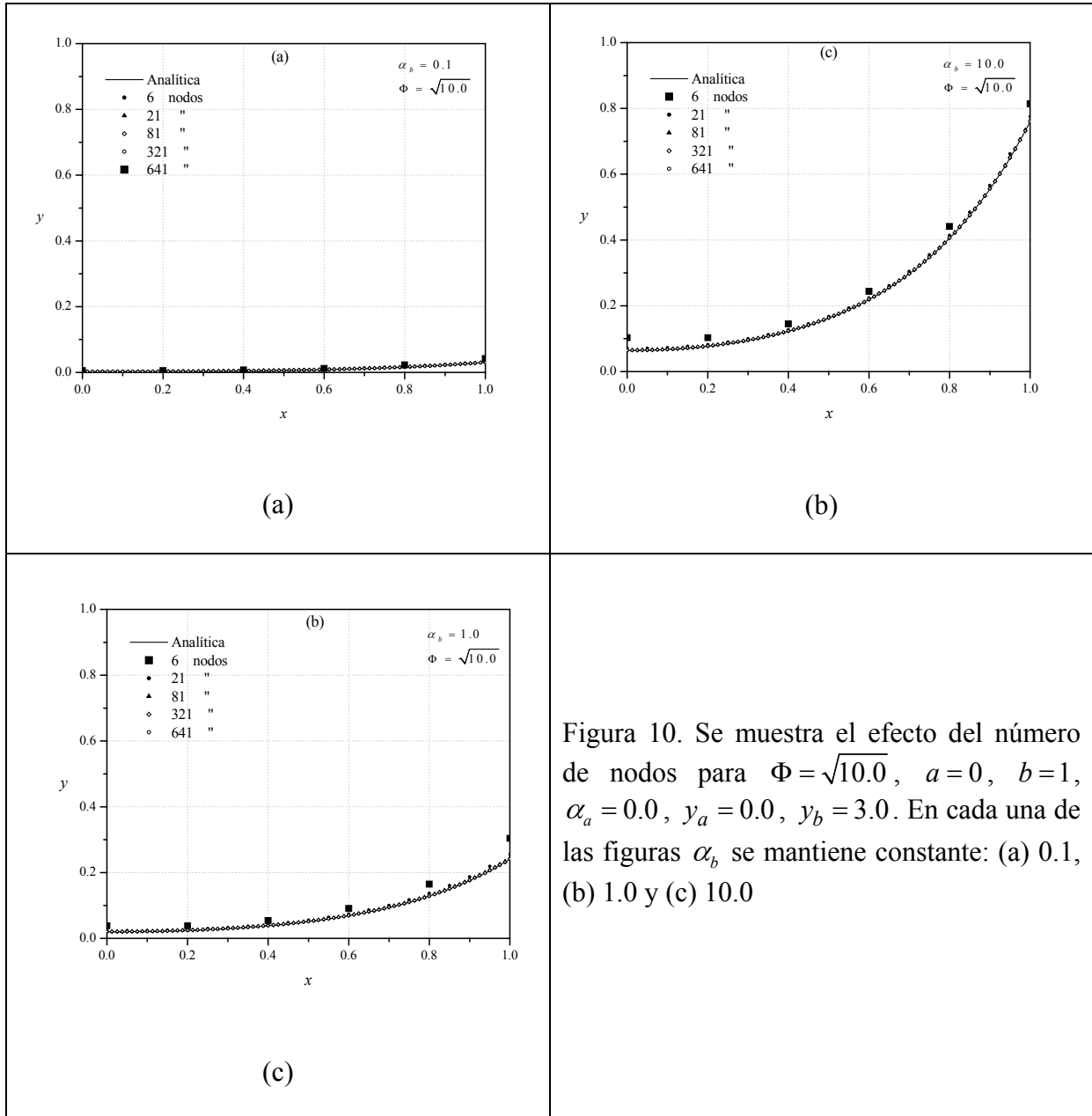


Figura 10. Se muestra el efecto del número de nodos para $\Phi = \sqrt{10.0}$, $a = 0$, $b = 1$, $\alpha_a = 0.0$, $y_a = 0.0$, $y_b = 3.0$. En cada una de las figuras α_b se mantiene constante: (a) 0.1, (b) 1.0 y (c) 10.0

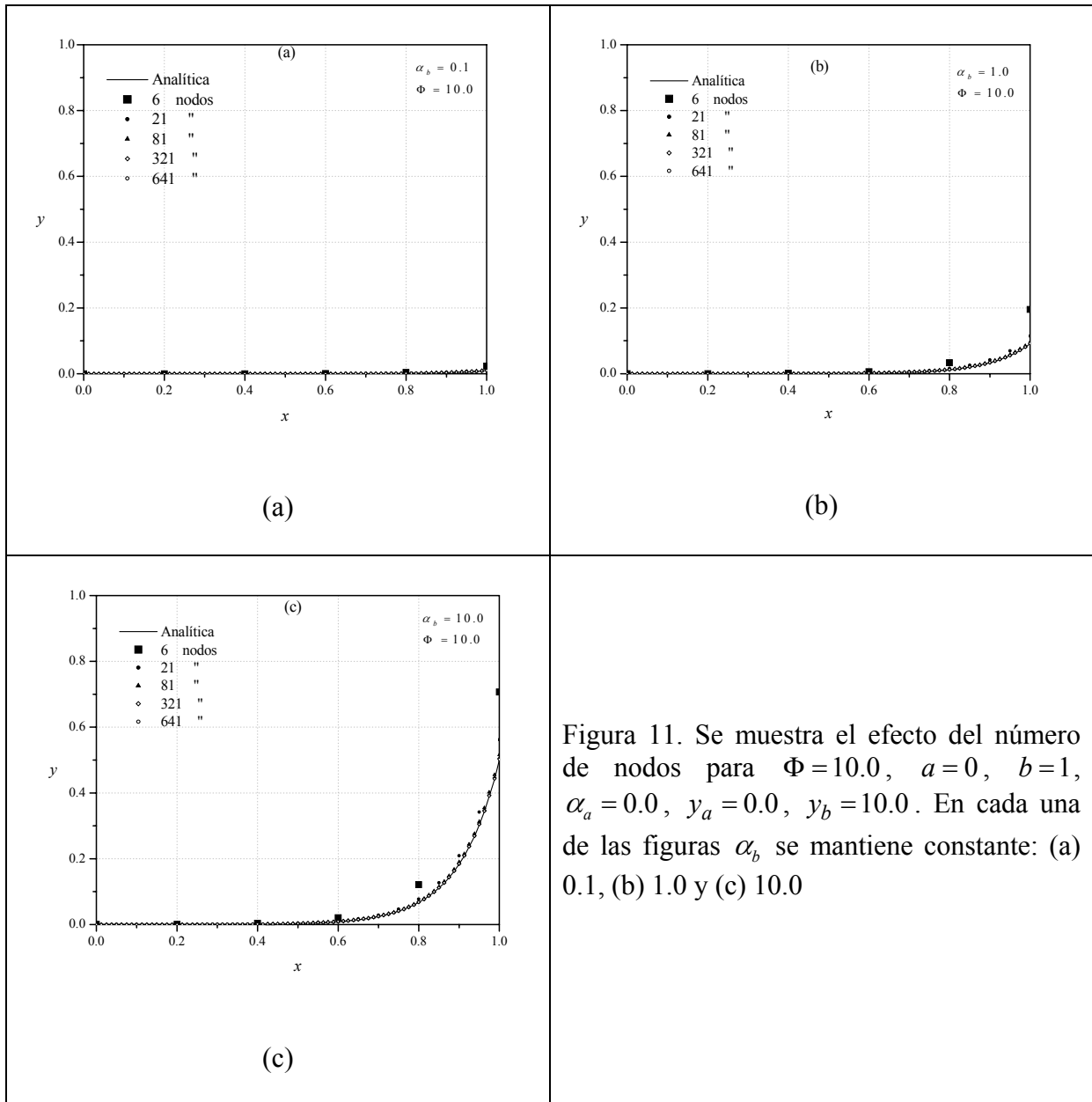


Figura 11. Se muestra el efecto del número de nodos para $\Phi = 10.0$, $a = 0$, $b = 1$, $\alpha_a = 0.0$, $y_a = 0.0$, $y_b = 10.0$. En cada una de las figuras α_b se mantiene constante: (a) 0.1, (b) 1.0 y (c) 10.0

La solución de las ecuaciones lineales (2.17) ó (2.41) que representan el problema de valor en la frontera puede lograrse con otros métodos y no solo con el algoritmo de Thomas. La presentación siguiente la realizaremos usando el problema con condiciones de frontera mixtas, ec. (2.41), pero fácilmente puede extenderse a las ec. (2.17). Los métodos siguientes son iterativos y por ello necesitan una suposición inicial indicada por

$$y_i^0 = y_{0,i} \quad \text{para } 1 \leq i \leq N$$

Aquí el superíndice “0” indica la primer suposición para la solución buscada. La primer idea para mejorar esta suposición y los siguientes valores obtenidos es usar las ecuaciones (2.41) de la siguiente manera

$$\text{Para } i=1, \quad y_1^{k+1,calc} = \frac{y_2^k + \alpha_a \Delta x y_a}{1 + \alpha_a \Delta x} \quad (2.43a)$$

$$\text{Para } 2 \leq i \leq N-1 \quad y_i^{k+1,calc} = -(y_{i+1}^k + y_{i-1}^k) / r \quad (2.43b)$$

$$\text{en } i=N, \quad y_N^{k+1,calc} = \frac{y_{N-1}^k + \Delta x \alpha_b y_b}{1 + \Delta x \alpha_b} \quad (2.43c)$$

Nótese que en este esquema los valores calculados a partir de la suposición y_i^0 están indicados por $y_i^{k+1,calc}$. Ahora sepuede usar la siguiente fórmula de interpolación para encontra la supocisión y_i^{k+1}

$$y_i^{k+1} = \omega y_i^{k+1,calc} + (1 - \omega) y_i^k \quad (2.44)$$

Esta fórmula da la posibilidad de tomar como nueva suposición el valor calculado con las ecuaciones discretizadas si $\omega = 1$. También, la nueva suposición será una interpolación de los de los valores supuesto y calculado si $0 < \omega < 1$, o una extrapolación si $\omega > 1$. El esquema dado por las ecuaciones (2.43) y (2.44) es el método de Jacobi aplicado al sistema tridiagonal de ecuaciones que representa el problema de valor de frontera originalmente presentado en las ecuaciones (2.30)-(2.32). Las iteraciones deberán ser repetidas hasta que las supocisiones " y_i^k " y " y_i^{k+1} " sean iguales dentro de una tolerancia aceptable, o sea

$$|y_i^{k+1} - y_i^k| \leq \text{tolerancia}$$

Otra formulación puede ser la siguiente

$$\text{Para } i=1, \quad y_1^{k+1,calc} = \frac{y_2^k + \alpha_a \Delta x y_a}{1 + \alpha_a \Delta x} \quad (2.45a)$$

$$\text{Para } 2 \leq i \leq N-1 \quad y_i^{k+1,calc} = -(y_{i+1}^k + y_{i-1}^k) / r \quad (2.45b)$$

$$\text{en } i = N, \quad y_N^{k+1,calc} = \frac{y_{N-1}^{k+1} + \Delta x \alpha_b y_b}{1 + \Delta x \alpha_b} \quad (2.45c)$$

En este caso se supone que la ecuaciones (2.45) se usan en el orden indicado y que el valor obtenido para y_{i-1}^{k+1} se usa inmediatamente para el cálculo de $y_i^{k+1,calc}$ y por lo tanto para y_i^{k+1} . Este esquema de solución es el método de Gauss-Seidel, este el y el de Jacobi lo veremos en mayor detalle en la solución de ecuaciones diferenciales parciales elípticas por el método de diferencias finitas. Es claro que el algoritmo de Thomas es la forma más directa de resolver el sistema de ecuaciones lineales tridiagonal, los esquemas iterativos no son directos, además introducen nuevos parámetros numéricos como son ω y la tolerancia.

Una vez realizada la introducción anterior revisaremos la aplicación del método de diferencias finitas para la solución de un problema bidimensional y utilizaremos las ideas usadas en la solución del problema unidimensional presentado. Una vez más empezaremos con un problema relativamente sencillo, el incluye la ecuación de Laplace en un dominio rectangular.

3. Solución de la ecuación de Laplace en dos dimensiones

A manera de ejemplo consideraremos el problema de conducción de calor definido por las siguientes ecuaciones y con referencia a la Figura 12.

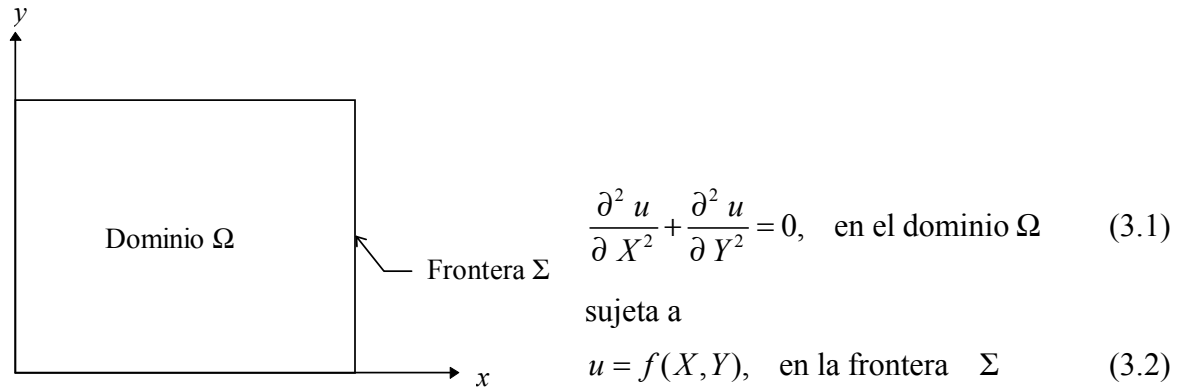


Figura 12. Dominio rectangular en donde es válida la ecuación de Laplace bidimensional del problema.

Supondremos que u , X y Y son la temperatura y coordenadas adimensionales, y se desean encontrar los valores de u en los nodos de la malla computacional mostrada en la siguiente figura:

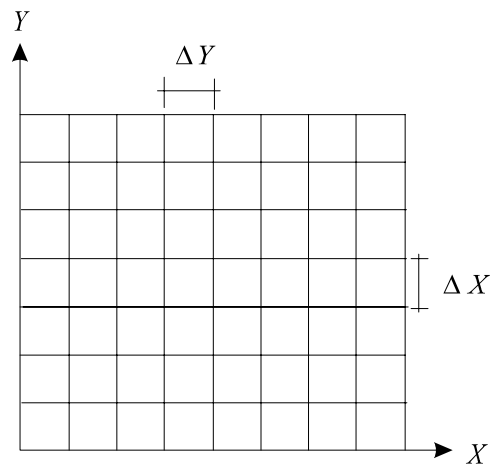


Figura 13. Dominio rectangular discretizado para el método de diferencias finitas.

Entonces se requiere una representación de la ecuación diferencial parcial (EDP) en términos de diferencias finitas, esto se puede lograr usando expansiones en series de

Taylor de la función de dos variables $u(X, Y)$. Por ejemplo, si u tiene derivadas continuas se puede entonces obtener una relación entre $u(X, Y)$ y $u(X + \Delta X, Y)$. Para hacer más compacta la nomenclatura se entenderá que la variable no indicada permanece constante. Así para la expansión

$$u(X + \Delta X) = u(X) + \left(\frac{\partial u}{\partial X} \right) \Delta X + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} \right) \frac{(\Delta X)^2}{2!} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial X^3} \right) \frac{(\Delta X)^3}{3!} + \left(\frac{\partial^4 u}{\partial X^4} \right) \frac{(\Delta X)^4}{4!} + \dots \quad (3.3)$$

se entiende que sus derivadas están evaluadas en X y son para Y constante. En forma análoga puede obtenerse la siguiente relación entre $u(X)$ y $u(X - \Delta X)$

$$u(X - \Delta X) = u(X) - \left(\frac{\partial u}{\partial X} \right) \Delta X + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} \right) \frac{(\Delta X)^2}{2!} - \left(\frac{\partial^3 u}{\partial X^3} \right) \frac{(\Delta X)^3}{3!} + \left(\frac{\partial^4 u}{\partial X^4} \right) \frac{(\Delta X)^4}{4!} + \dots \quad (3.4)$$

La representación esquemática de las relaciones (3.3) y (3.4) es la misma que la de las ecuaciones (2.4) y (2.5) en la Figura 5, solo que en este caso en esa figura debe indicarse que el valor de la coordenada Y , es constante.

Así la representación de la segunda derivada parcial de u , con respecto a X es

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} \right) = \frac{u(X + \Delta X) - 2u(X) + u(X - \Delta X)}{(\Delta X)^2} - \underbrace{\left(\frac{\partial^4 u}{\partial X^4} \right) \frac{(\Delta X)^2}{4!} + \dots}_{\mathcal{O}[(\Delta X)^2]} \quad (3.6)$$

Esta es una representación de la segunda derivada de u en diferencias finitas con error del orden de $(\Delta X)^2$. Debemos notar que si ΔX se hace pequeño, la exactitud de la representación mejorará. Por un procedimiento análogo se puede obtener la segunda derivada de $u(X, Y)$ con respecto a Y : esto es, se realizan expansiones en serie de Taylor en Y manteniendo constante X . El resultado es

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \right) = \frac{u(Y + \Delta Y) - 2u(Y) + u(Y - \Delta Y)}{(\Delta Y)^2} + \mathcal{O}[(\Delta Y)^2] \quad (3.7)$$

Ahora se asignará el índice " i " a cada línea de la malla perpendicular al eje X . Entonces la posición X se relaciona a la separación ΔX por

$$X_i = (i-1)\Delta X \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.8)$$

Similarmente se puede asignar el índice "j" a cada línea de la malla que es perpendicular a lo largo del eje X , de tal manera que

$$Y_j = (j-1)\Delta Y \quad j=1,2,\dots,M \quad (3.9)$$

Usando esta nomenclatura la función $u(X,Y)$ se representará ahora como

$$u(X_i, Y_j) = u_{i,j} \quad (3.10)$$

Entonces las segundas derivadas dadas por las ecuaciones (2.5) y (2.6) toman la forma

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} \right)_{X,Y} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta X)^2} \quad (3.11)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \right)_{X,Y} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta Y)^2} \quad (3.12)$$

y estas son aproximaciones de las segundas derivadas ya que se han despreciado los términos de orden $(\Delta X)^2$ y $(\Delta Y)^2$ y superiores. Usando las ecuaciones (3.11) y (3.12) la ecuación diferencial que pretendemos resolver toma la forma

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta X)^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta Y)^2} = 0 \quad (3.13)$$

Debido a los errores introducidos al aproximar las segundas derivadas esta representación de la ecuación diferencial involucra un error del orden $(\Delta X)^2$ y $(\Delta Y)^2$. De la ecuación (3.13) podemos obtener $u_{i,j}$ como

$$u_{i,j} = \frac{1}{2(1+\lambda)} \left[u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + \lambda(u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) \right] \quad (3.14)$$

En donde

$$\lambda = \left(\frac{\Delta X}{\Delta Y} \right)^2 \quad (3.15)$$

Nótese que si $\Delta X = \Delta Y$, $\lambda = 1$ y por lo tanto $u_{i,j}$ es el promedio de los cuatro valores más cercanos al punto (i,j) . Esto se ejemplifica en la figura siguiente en donde mostramos la celda computacional formada por el nodo (i,j) y sus vecinos más próximos en las direcciones X y Y .

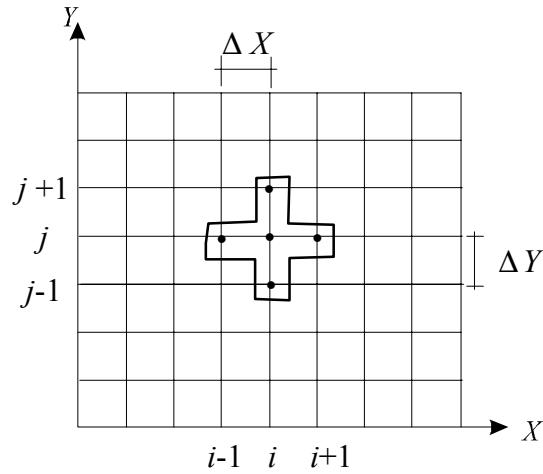


Figura 16. Celda computacional para la solución de la ecuación de Laplace en dos dimensiones.

Los valores en la frontera del dominio Ω están dados por $f(X, Y)$, así que los valores de u en ella pueden escribirse como

$$u_{0,j} = f(0, Y_j)$$

$$u_{N,j} = f(X_N, Y_j) = f(N \Delta X, j \Delta Y)$$

$$u_{i,0} = f(X_i, 0)$$

$$u_{i,M} = f(X_i, Y_M) = f(i \Delta X, M \Delta Y)$$

Esto significa que la ecuación (3.13) o la (3.14) debe resolverse solo para los nodos interiores. Podríamos escribir la ec. (3.14) para cada uno de los nodos en la malla y así obtener un sistema de ecuaciones. Entonces tendríamos que invertir la matriz de coeficientes para encontrar la solución. Sin embargo, hay $M \times N - 2(M + N) + 2$ incógnitas, y si por ejemplo $N = M = 20$, esto significa invertir una matriz correspondiente a 360 incógnitas. Esto es caro, necesita gran capacidad de almacenamiento e involucra un gran error de redondeo. Debe notarse que la naturaleza de los problemas bidimensionales y tridimensionales hacen en general casi imposible el uso de métodos de solución directa, como lo fue el algoritmo de Thomas para el caso de problema unidimensionales.

Por esta razón concentraremos nuestro estudio en métodos iterativos para la solución de sistemas de ecuaciones lineales. El primer método que revisaremos, ya mencionado en la sección anterior, fue presentado originalmente para ser usado en cálculos manuales y es

conocido como el método de relajación. El método no es muy eficiente, pero es muy útil para mostrar la forma en que funcionan los métodos iterativos.

El procedimiento se inicia con una suposición de los valores $u_{i,j}$. Así en la iteración " k -ésima" la función toma el valor $u_{i,j}^k$. Para obtener una nueva estimación de $u_{i,j}^{k+1}$ se escribe la ec. (3.11) en la siguiente forma

$$u_{i,j}^{k+1,calc} = \frac{1}{2(1+\lambda)} \left[u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^k + \lambda(u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k) \right] \quad (3.16)$$

de esta manera el valor calculado $u_{i,j}$ depende solamente de valores previamente estimados. Una vez obtenido el nuevo valor $u_{i,j}$, que designamos $u_{i,j}^{k,calc}$, se tiene la disyuntiva de asignarlo totalmente a $u_{i,j}^{k+1}$, o usarla de otra manera para obtener una nueva estimación. Una de las formas más simples es introducir un parámetro de relajación ω , de manera que

$$u_{i,j}^{k+1} = \omega u_{i,j}^{k+1,calc} + (1-\omega)u_{i,j}^k \quad (3.17)$$

Esta fórmula contiene la posibilidad de asignar el valor calculado al nuevo estimado si $\omega=1$. Cuando $0 < \omega < 1$, la nueva estimación está entre el estimado anterior y el valor calculado. Si $\omega > 1$, entonces se trata de una extrapolación, que se denomina sobre-relajación. La substitución de la ec. (3.16) en la (3.17) da como resultado

$$u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k + \frac{\omega}{2(1+\lambda)} \left[u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^k - 2(1+\lambda)u_{i,j}^k + \lambda(u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k) \right] \quad (3.18)$$

Esta ecuación se puede utilizar repetidamente hasta que $u_{i,j}^k$ y $u_{i,j}^{k+1}$ están suficientemente cerca. Normalmente se puede definir la tolerancia ε como

$$\left| u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k \right| \leq \varepsilon \quad \text{para cualquier } (i, j) \quad (3.19)$$

Los parámetros numéricos del problema son ΔX , ΔY ó λ , ω , y ε ; la solución debe ser independiente de ellos. Es necesario obtener soluciones de $u_{i,j}$ para una serie de valores de ΔX , λ , ε y ω , y entonces demostrar que la solución es esencialmente independiente de ellos.

El método descrito por la ec. (3.17) es conocido como el método de Jacobi, y este tiene la desventaja que converge muy lentamente. También requiere mayor capacidad de almacenamiento que otros métodos puesto que se pueden descartar los valores de $u_{i,j}^k$ hasta que los nuevos valores de dos líneas en la malla se han obtenido. La velocidad de convergencia es muy lenta porque el efecto de las condiciones de frontera penetra una línea en cada iteración. Esto hace que la rapidez de propagación de la información conocida sea muy lenta. Otros métodos se han introducido con la idea de mejorar esta desventaja.

4. Solución iterativa de sistemas de ecuaciones lineales: métodos de Jacobi, Gauss-Seidel, SOR e inversion linea por linea.

La utilización del método de Jacobi para el problema que estamos discutiendo se reduce a estimar $u_{i,j}^{k+1}$ con la siguiente ecuación

$$u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k + \frac{\omega}{2(1+\lambda)} \left[u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^k - 2(1+\lambda)u_{i,j}^k + \lambda(u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k) \right] \quad (4.1)$$

Si los cálculos se inician con la suposición "k", entonces se podrán calcular los valores en $i=1$ para todos los "j" desde 1 a $M-1$ como sigue

$$u_{1,j}^{k+1} = u_{1,j}^k + \frac{\omega}{2(1+\lambda)} \left[u_{2,j}^k + \underbrace{u_{0,j}^k}_{\text{Condición de frontera}} - 2(1+\lambda)u_{1,j}^k + \lambda(u_{1,j+1}^k + u_{1,j-1}^k) \right] \quad (4.2)$$

Condición de frontera

Los valores así obtenidos no se pueden almacenar en el lugar usado por $u_{1,j}^k$ porque estos valores son necesarios para calcular $u_{2,j}^{k+1}$

$$u_{2,j}^{k+1} = u_{2,j}^k + \frac{\omega}{2(1+\lambda)} \left[u_{3,j}^k + u_{1,j}^k - 2(1+\lambda)u_{2,j}^k + \lambda(u_{2,j+1}^k + u_{2,j-1}^k) \right] \quad (4.3)$$

Igualmente los valores de $u_{2,j}^{k+1}$ no pueden ser almacenados en $u_{2,j}^k$ porque son necesarios para calcular $u_{3,j}^{k+1}$ de acuerdo a

$$u_{3,j}^{k+1} = u_{3,j}^k + \frac{\omega}{2(1+\lambda)} \left[u_{4,j}^k + u_{2,j}^k - 2(1+\lambda)u_{3,j}^k + \lambda(u_{3,j+1}^k + u_{3,j-1}^k) \right] \quad (4.4)$$

así después de obtener $u_{i+1,j}^{k+1}$ se puede hacer la siguiente substitución de información

$$u_{i,j}^k \leftarrow u_{i,j}^{k+1} \quad (4.5)$$

Concluimos entonces que el método de Jacobi requiere memoria extra para almacenar información. Además las condiciones de frontera no afectan rápidamente los valores correspondientes a los nodos interiores. Por ejemplo, solamente $u_{i,j}^{k+1}$ es afectada por $u_{o,j}^k$ en la ecuación (3.18). Un problema adicional es la inestabilidad del método para $\omega > 1$, por lo que

$$\omega < 1 \quad \text{para el metodo de Jacobi} \quad (4.6)$$

Una alternativa al uso del método de Jacobi lo constituye el esquema de Gauss-Seidel el cual converge mucho más rápidamente. En este método los valores de $u_{i,j}^k$ en la ec. (4.1) se reemplazan por los valores de $u_{i,j}^{k+1}$ obtenidos en esa misma iteración. Así es posible reemplazar en la ec. (4.1) $u_{i-1,j}^k$ por $u_{i-1,j}^{k+1}$, y $u_{i,j-1}^k$ por $u_{i,j-1}^{k+1}$. Por lo cual la ec. (4.1) se transforma a

$$u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k + \frac{\omega}{2(1+\lambda)} \left[u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^{k+1} - 2(1+\lambda)u_{i,j}^k + \lambda(u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^{k+1}) \right] \quad (4.7)$$

Nótese que la substitución implica que la solución para las $u_{i,j}^k$ se está realizando avanzando de $i=1$ hasta $i=N-1$, y que dentro de una columna se avanza de $j=1$ a $j=M-1$.

En esta forma los valores se pueden renovar con los recientemente calculados. Cuando $\omega=1$ el método se conoce como método de Gauss-Seidel, y si $\omega>1$ el sistema es estable y el método se conoce como método SOR (Successive over-relaxation). Los valores de ω están acotados por

$$1 < \omega < 2 \quad \text{para el metodo de SOR} \quad (4.8)$$

en función del espaciamiento en la malla y las condiciones de frontera.

Otra técnica es el método de inversión de la matriz línea por línea. En está metodología se rescata el algoritmo de Thomas aunque no como método de solución directa. Para este método la ec. (3.14) se escribe como

$$u_{i+1,j} - 2(1+\lambda)u_{i,j} + u_{i-1,j} = -\lambda(u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) \quad (4.9)$$

El miembro derecho se puede escribir evaluado en la iteración " k ". Entonces el miembro izquierdo se usará para evaluar el nuevo estimado de la variable dependiente

$$u_{i+1,j}^{k,calc} - 2(1+\lambda)u_{i,j}^{k,calc} + u_{i-1,j}^{k,calc} = -\lambda(u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k) \quad (4.10)$$

Para " j " dado, esta ecuación representa un sistema tridiagonal de ecuaciones lineales para los valores de $u_{i,j}^{k,calc}$ en diferentes X con Y fijo. Esto se puede observar más claramente si se escriben las ecuaciones para $2 \leq i \leq N-1$, usando la siguiente nomenclatura simplificada

$$\begin{aligned} U_i &= u_{i,j}^{k,calc} \quad \text{para } j \text{ fijo} \\ b_i &= -\lambda(u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k) \\ A_i &= C_i = 1 \\ B_i &= -2(1+\lambda) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Así las ecuaciones para cada " i " son

$$\begin{aligned} i=2 & \quad A_2 U_1 + B_2 U_2 + C_2 U_3 = b_2 \\ i=3 & \quad A_3 U_2 + B_3 U_3 + C_3 U_4 = b_3 \\ i=4 & \quad A_4 U_3 + B_4 U_4 + C_4 U_5 = b_4 \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ i = N-1 \end{array} \quad A_{N-1} U_{N-2} + B_{N-1} U_{N-1} + C_{N-1} U_N = b_{N-1}$$

Además, para cualquier "j" se tiene de las condiciones de frontera

$$U_1 = f(0, j \Delta Y), \text{ así } B_1 = 1, A_1 = C_1 = 0, \text{ y } b_1 = f(0, j \Delta Y)$$

$$U_N = f(N \Delta X, j \Delta Y), \text{ así } B_N = 1, A_N = C_N = 0, \text{ y } b_N = f(N \Delta X, j \Delta Y) \quad (4.13)$$

Substituyendo las condiciones de frontera dadas por las ecs. (3.3) en la ec. (4.10), el sistema de ecuaciones se puede describir en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & B_3 & C_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_4 & B_4 & C_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{N-2} & B_{N-2} & C_{N-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{N-1} & B_{N-1} & C_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ . \\ . \\ . \\ U_{N-1} \\ U_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ . \\ . \\ . \\ b_{N-1} \\ b_N \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Una nueva representación del sistema de ecuaciones lineales dado por las ecs. (4.12) es

$$\{M_{ij}\} \{U_j\} = \{b_i\} \quad (4.15)$$

Cuya solución es

$$\{U_i\} = \{M_{ij}\}^{-1} \{b_j\} \quad (4.16)$$

Entonces la nueva estimación del campo $u_{i,j}^{k,calc}$ para el renglón "j" es

$$u_{i,j}^{k,calc} = M_{i,p}^{-1} b_{p,j} \quad (4.17)$$

El proceso de inversión de $\{M_{ij}\}$ puede repetirse para $j = 1, 2, 3, \dots, M-1$ con los cambios apropiados en $\{b_j\}$. Entonces se puede utilizar relajación para calcular la nueva estimación de la solución

$$u_{i,j}^{k+1} = \omega u_{i,j}^{k,calc} + (1-\omega) u_{i,j}^k \quad (4.18)$$

Este proceso se repite hasta alcanzar convergencia. Como la matriz es tridiagonal, la inversa se puede obtener fácilmente por eliminación Gaussiana. Las fórmulas resultantes

son las mencionadas anteriormente y es claro que en este caso se repite la solución de un sistema de N ecuaciones.

Finalizaremos esta parte con algunos ejemplos, pero antes presentaremos la estructura de llamado de las rutinas principales que podría contener un programa para resolver una ecuación elíptica usando el método de inversión línea por línea:

1. Llamar rutina de lectura de datos $(N, M, \Delta X, \Delta Y, \omega, \varepsilon, k_{\max})$
2. Llamar rutina de cálculo de coeficientes A_i, B_i, C_i con ecuaciones (4.11) y (4.13)
3. Inicio del ciclo de iteración $k \leftarrow 0$
4. Inicia ciclo 1
 - Para $j = 2$ a $M - 1$
 - Llamar rutina de cálculo de coeficiente b_i , con ecuaciones (4.11) y (4.13)
 - Llamar rutina con algoritmo de Thomas para encontrar los N valores de U_i para luego $u_{i,j}^{k,calc} \leftarrow U_i$
 - Termina ciclo 1
5. Llamar rutina para cálculo de $u_{i,j}^{k+1}$ y $\text{error} = u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k$.
6. $k \leftarrow k + 1$, revisar si se alcanzó al número límite de iteraciones $k_{\max}$, y tomar la decisión pertinente: parar el programa o regresar al paso 4.
7. Si el error en $2 \leq i \leq N - 1$ y $2 \leq j \leq M - 1$ satisface el criterio de convergencia, entonces se terminó el cálculo y se puede llamar a la rutina de escritura de resultados, de otra manera deberá irse al inicio del ciclo 1 tomando como valor del campo $u_{i,j}$ el acabado de obtener en la iteración anterior.

Solución de una ecuación diferencial elíptica con condiciones de frontera tipo Dirichlet usando el método de inversión línea por línea.

Ejemplos

A continuación ejemplificamos para la malla mostrada en la figura cada uno de los métodos discutidos en esta sección. En este ejemplo se resolverán para $u_{i,j}^k$ avanzando renglón por renglón, primero para $j = 1$ y luego para $j = 2$.

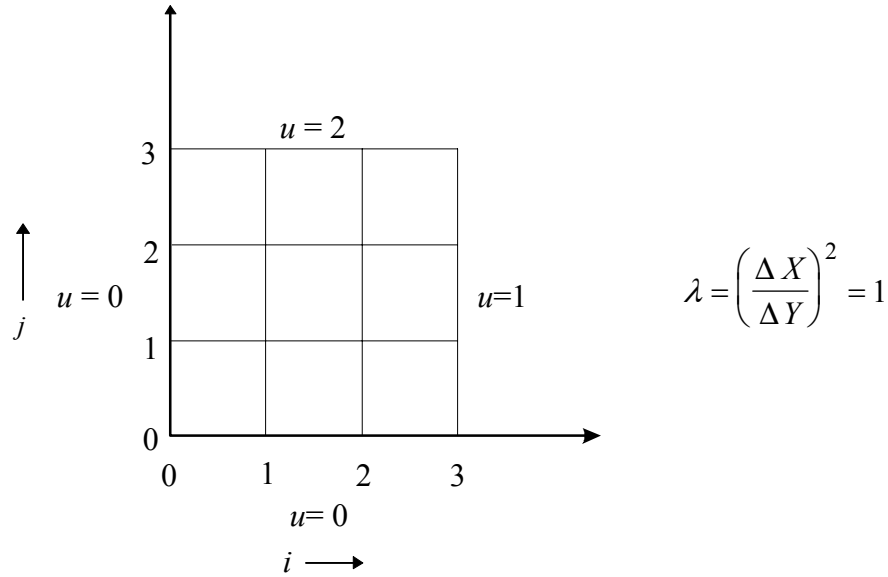


Figura 17. Malla computacional con $N = 3$ y $M = 3$.

Método de Jacobi

$$u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k + \frac{1}{4} \left[u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^k - 4u_{i,j}^k + u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k \right]$$

Para $j = 1$

$$u_{1,1}^{k+1} = u_{1,1}^k + \frac{1}{4} \left[u_{2,2}^k + \underbrace{u_{0,1}^k}_0 - 4u_{1,1}^k + u_{1,2}^k + \underbrace{u_{1,0}^k}_0 \right]$$

$$u_{2,1}^{k+1} = u_{2,1}^k + \frac{1}{4} \left[\underbrace{u_{3,1}^k}_1 + u_{1,1}^k - 4u_{2,1}^k + u_{2,2}^k + \underbrace{u_{2,0}^k}_0 \right]$$

Método de Gauss-Seidel

$$u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k + \frac{1}{4} \left[u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^{k+1} - 4u_{i,j}^k + u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^{k+1} \right]$$

Para $j = 1$

$$u_{1,1}^{k+1} = u_{1,1}^k + \frac{1}{4} [u_{2,2}^k + \underbrace{u_{0,1}^{k+1}}_0 - 4u_{1,1}^k + u_{1,2}^k + \underbrace{u_{1,0}^{k+1}}_0]$$

$$u_{2,1}^{k+1} = u_{2,1}^k + \frac{1}{4} [\underbrace{u_{3,1}^k}_1 + u_{1,1}^{k+1} - 4u_{2,1}^k + u_{2,2}^k + \underbrace{u_{2,0}^{k+1}}_0]$$

Con $\omega \neq 1$ esto es el método SOR.

Método de inversión línea por línea

$$u_{i+1,j}^{k,calc} - 2(1+\lambda)u_{i,j}^{k,calc} + u_{i-1,j}^{k,calc} = -\lambda(u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k)$$

Para $j = 1$

$$i = 1 \quad \underbrace{U_0}_0 - 4U_1 + U_2 = -(u_{1,2}^k + \underbrace{u_{1,0}^k}_0) = b_1$$

$$i = 2 \quad U_1 - 4U_2 + \underbrace{U_3}_1 = -(u_{2,2}^k + \underbrace{u_{2,0}^k}_0) = b_2$$

O en forma matricial

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}$$

Para $j = 2$

$$i = 1 \quad \underbrace{U_0}_0 - 4U_1 + U_2 = -(u_{1,3}^k + \underbrace{u_{1,1}^k}_2) = b_1$$

$$i = 2 \quad U_1 - 4U_2 + \underbrace{U_3}_1 = -(u_{2,3}^k + \underbrace{u_{2,1}^k}_2) = b_2$$

O en forma matricial

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}$$

Método de inversión directa de la matriz

$$u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j} + \lambda(u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}) = 0$$

Para $j = 1$

$$i = 1 \quad u_{2,1} - 2u_{1,1} + \underbrace{u_{0,1}}_0 + \lambda(u_{1,2} - 2u_{1,1} + \underbrace{u_{1,0}}_0) = 0$$

$$u_{2,1} - 4u_{1,1} + u_{1,2} = 0$$

$$i = 2 \quad \underbrace{u_{3,1}}_1 - 2u_{2,1} + u_{1,1} + (u_{2,2} - 2u_{2,1} + \underbrace{u_{2,0}}_0) = 0$$

$$-4u_{2,1} + u_{1,1} + u_{2,2} = -1$$

Para $j = 2$

$$i = 1 \quad u_{2,2} - 2u_{1,2} + \underbrace{u_{0,2}}_0 + \lambda(\underbrace{u_{1,3}}_2 - 2u_{1,2} + u_{1,1}) = 0$$

$$u_{2,2} - 4u_{1,2} + u_{1,1} = -2$$

$$i = 2 \quad \underbrace{u_{3,2}}_1 - 2u_{2,2} + u_{1,2} + (\underbrace{u_{2,3}}_2 - 2u_{2,2} + u_{2,1}) = 0$$

$$-4u_{2,2} + u_{1,2} + u_{2,1} = -3$$

Escribiendo en forma matricial las ecuaciones correspondientes a los cuatro nodos internos de este problema se obtiene

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{1,2} \\ u_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

5. El Algoritmo de Thomas para la inversión de matrices tridiagonales

Se vio anteriormente la necesidad de invertir una matriz de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} B_1 & C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & B_3 & C_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_n & B_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ U_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ D_n \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

en donde $n = N$, pero también la fórmula pueden adaptarse para el caso $n = N - 2$.

La solución del sistema se puede obtener por eliminación Gaussiana. El procedimiento se inicia resolviendo para U_1 la ecuación correspondiente al renglón 1 del sistema matricial mostrado arriba.

$$U_1 = \left(\frac{D_1}{B_1} \right) - \left(\frac{C_1}{B_1} \right) U_2 \quad (5.2)$$

Es conveniente definir

$$\omega_1 = B_1^{-1} \quad b_1 = \omega_1 C_1 \quad g_1 = \omega_1 D_1 \quad (5.3)$$

De tal manera que

$$U_1 = g_1 - b_1 U_2 \quad (5.4)$$

Usando esta para reemplazar U_1 en la segunda ecuación del sistema se obtiene

$$A_2 (g_1 - b_1 U_2) + B_2 U_2 + C_2 U_3 = D_2 \quad (5.5)$$

Resolviendo para U_2

$$U_2 = \left(\frac{D_2 - A_2 g_1}{B_2 - A_2 b_1} \right) - \left(\frac{C_2}{B_2 - A_2 b_1} \right) U_3 \quad (5.6)$$

Para escribir esta en forma compacta es conveniente definir

$$\omega_2 = (B_2 - A_2 b_1)^{-1} \quad b_2 = \omega_2 C_2 \quad g_2 = \omega_2 (D_2 - A_2 g_1) \quad (5.7)$$

Por lo que

$$U_2 = g_2 - b_2 U_3 \quad (5.8)$$

La substitución de esta ecuación en la tercera del sistema para eliminar U_3 nos conduce a

$$U_3 = g_3 - b_3 U_4 \quad (5.9)$$

en donde se han introducido las definiciones

$$\omega_3 = (B_3 - A_3 b_2)^{-1} \quad b_3 = \omega_3 C_3 \quad g_3 = \omega_3 (D_3 - A_3 g_2) \quad (5.10)$$

Podemos concluir que la repetición del procedimiento descrito nos lleva a las expresiones

$$U_i = g_i - b_i U_{i+1} \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \dots, n-1 \quad (5.11)$$

en donde

$$\omega_1 = B_1^{-1} \quad b_1 = \omega_1 C_1 \quad g_1 = \omega_1 D_1 \quad (5.12)$$

$$\omega_i = (B_i - A_i b_{i-1})^{-1} \quad b_i = \omega_i C_i \quad g_i = \omega_i (D_i - A_i g_{i-1}) \quad \text{para } i = 2, 3, \dots, n-1 \quad (5.13)$$

La última ecuación, correspondiente a $i = n$

$$A_n U_{n-1} + B_n U_n = D_n \quad (5.14)$$

Que puede ser escrita en términos solo de U_n como

$$A_n (g_{n-1} - b_{n-1} U_n) + B_n U_n = D_n \quad (5.15)$$

De esta se obtiene

$$U_n = \frac{D_n - A_n g_{n-1}}{B_n - A_n b_{n-1}} = g_n \quad (5.16)$$

Entonces U_n se puede obtener directamente y obtener el resto de las incógnitas de la siguiente forma

$$\begin{aligned} U_{n-1} &= g_{n-1} - b_{n-1} U_n \\ U_{n-2} &= g_{n-2} - b_{n-2} U_{n-1} \\ &\vdots \\ U_1 &= g_1 - b_1 U_2 \end{aligned} \quad (5.17)$$

Ejemplo: aplicación del algoritmo de Thomas

Se tiene el siguiente sistema tridiagonal en forma matricial para $n = 3$

$$\begin{aligned} \lambda &= 1 \\ A_i &= C_i = 1 \quad n = 3 \\ B_i &= -4 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Usando la ecuación (5.3)

$$\omega_1 = -0.25 \quad b_1 = -0.25 \quad g_1 = -0.25$$

Ahora usando las ecuaciones (5.13)

$$\omega_2 = \frac{1}{-4 + (1)(+0.25)} = -\frac{1}{15/4} = -\frac{4}{15}$$

$$b_2 = -\frac{4}{15} \quad g_1 = -\frac{4}{15} [0 - (1)(-1/4)] = -\frac{1}{15}$$

$$g_3 = \frac{1 - (1)(-1/15)}{-4 - (1)(-4/15)} = -\frac{16/15}{-56/15} = -\frac{2}{7}$$

La última de las incógnitas se obtiene de la ecuación (5.16)

$$U_3 = g_3 = -\frac{2}{7}$$

Las otras dos incógnitas se obtienen de la ecuación (5.11)

$$U_2 = g_2 - b_2 U_3 = -\frac{1}{15} - \left(-\frac{4}{15}\right) \left(-\frac{2}{7}\right) = \frac{-7-8}{15 \times 7} = -\frac{1}{7}$$

$$U_1 = g_1 - b_1 U_2 = -\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) \left(-\frac{1}{7}\right) = \frac{-7-1}{7 \times 4} = -\frac{8}{7 \times 4} = -\frac{2}{7}$$

Por lo que el vector solución es

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/7 \\ -1/7 \\ -2/7 \end{pmatrix}$$

6. Incorporación de condiciones de frontera

Supóngase que se desea resolver el problema definido en la siguiente figura

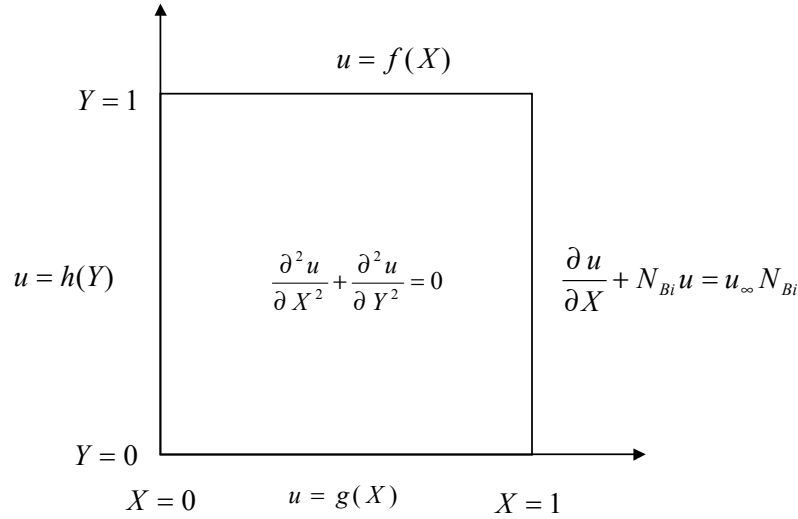


Figura 18. Dominio del problema definido por la ecuación de Laplace y condiciones de frontera homogéneas.

En este las condiciones de frontera no homogéneas, para el caso de ecuaciones diferenciales parciales ya se ha revisado como tratar las tres que son del tipo de Dirichlet. La del tipo de Cauchy se revisó para el ejemplo de la solución de la ecuación unidimensional de difusión con reacción. Sin embargo, se revisará una forma alternativa para incorporar las que son del tipo mixto o de Cauchy. El valor de u en $X=1$ se desconoce pero está sujeto a la condición de frontera, por lo que en este caso se debe resolver para $u_{i,j}$ ($j=1,2,3,\dots,M-1$ y $i=1,2,3,\dots,N$). En la siguiente figura con puntos se han marcado los nodos en donde se desconocen los valores de $u_{i,j}$;

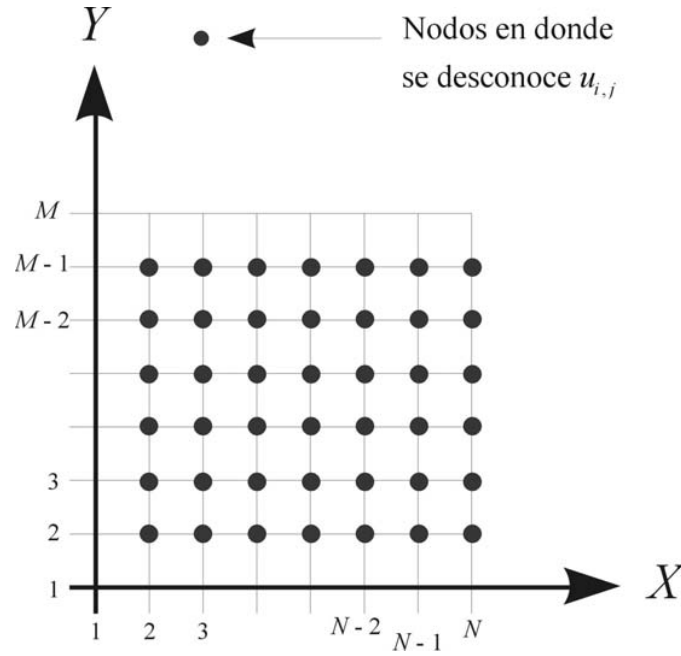


Figura 19. Dominio discretizado y nodos donde se desconoce $u_{i,j}$.

En $X = 1$, se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial X} + N_{Bi} u = u_{\infty} N_{Bi} \quad (6.1)$$

Para incorporar esta al procedimiento de solución se escribe la siguiente expansión en series de Taylor

$$u(1 - \Delta X) = u(1) - \left(\frac{\partial u}{\partial X} \right)_{X=1} \Delta X + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} \right)_{X=1} \frac{(\Delta X)^2}{2!} - \dots \quad (6.2)$$

De esta se obtiene

$$\left(\frac{\partial u}{\partial X} \right)_{X=1} = \frac{u(1) - u(1 - \Delta X)}{\Delta X} + \mathcal{O}(\Delta X) \quad (6.3)$$

Que en notación indicial la aproximación de la derivada toma la forma

$$\left(\frac{\partial u}{\partial X} \right)_{N,j} \cong \frac{u_{N,j} - u_{N-1,j}}{\Delta X} \quad (6.4)$$

Nótese que esta fórmula se dedujo antes para una derivada ordinaria, ec. (2.37). La substitución de (6.4) en la ec. (6.1) nos lleva a

$$\frac{u_{N,j} - u_{N-1,j}}{\Delta X} + N_{Bi} u_{N,j} = N_{Bi} u_{\infty} \quad (6.5)$$

de la cual se puede obtener $u_{N,j}$ como

$$u_{N,j} = \frac{u_{N-1,j} + \Delta X N_{Bi} u_{\infty}}{1 + N_{Bi} \Delta X} \quad (6.6)$$

Nótese que cuando $N_{Bi} \gg 1$

$$u_{N,j} \rightarrow u_{\infty} \quad \text{Condición de Dirichlet} \quad (6.7)$$

y cuando $N_{Bi} \ll 1$

$$u_{N,j} \rightarrow u_{N-1,j} \quad \text{Condición homogénea de Newman} \quad (6.8)$$

La ecuación (6.6) se puede usar para eliminar $u_{N,j}$ como incógnita en la representación de la ecuación diferencial en diferencias finitas para $i = N-1$. De esta forma en el método de inversión línea por línea, si $\Delta X = \Delta Y$, las ecuaciones del renglón "j" toman la siguiente forma

Para $1 < i < N-1$

$$u_{i+1,j}^{k,calc} - 4u_{i,j}^{k,calc} + u_{i-1,j}^{k,calc} = -(u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k) \quad (6.9)$$

Para $i = 2$

$$u_{1,j}^{k,calc} - 4u_{2,j}^{k,calc} + u_{3,j}^{k,calc} = -(u_{2,j+1}^k + u_{2,j-1}^k) \quad (6.10)$$

Pero como $u_{1,j} = h(Y_j) = h_j$ la ecuación (6.10) toma la forma

$$-4u_{2,j}^{k,calc} + u_{3,j}^{k,calc} = -(u_{2,j+1}^k + u_{2,j-1}^k) - h_j \quad (6.11)$$

Para $i = N-1$

$$u_{N-2,j}^{k,calc} - 4u_{N-1,j}^{k,calc} + u_{N,j}^{k,calc} = -(u_{N-1,j+1}^k + u_{N-1,j-1}^k)$$

Substitución de la ecuación (6.6) para eliminar $u_{N,j}^{k,calc}$ da como resultado

$$u_{N-2,j}^{k,calc} - \left(4 - \frac{1}{1 + N_{Bi} \Delta X}\right) 4u_{N-1,j}^{k,calc} = -(u_{N-1,j+1}^k + u_{N-1,j-1}^k) - \frac{u_{\infty} N_{Bi} \Delta X}{1 + N_{Bi} \Delta X}$$

Así la matriz es todavía tridiagonal, pero con las siguientes consideraciones

$$U_i = u_{i,j}^{k,calc}$$

$$b_i = u_{N-1,j+1}^k + u_{N-1,j-1}^k \quad (6.13)$$

$$h = h_j$$

Con la siguiente representación matricial

$$\begin{pmatrix}
 -4 & 1 & 0 & 0 & & & & & \\
 1 & -4 & 1 & 0 & & & & & \\
 0 & 1 & -4 & 1 & & & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
 & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\
 & & & & & 0 & 1 & -4 & 1 \\
 & & & & & 0 & 0 & 1 & -(4 + \frac{1}{1 + N_{Bi} \Delta X})
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 U_2 \\
 U_3 \\
 U_4 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 U_{N-2} \\
 U_{N-1}
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 b_2 - h \\
 b_3 \\
 b_4 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 b_{N-2} \\
 b_{N-1} + \frac{u_\infty N_{Bi} \Delta X}{1 + N_{Bi} \Delta X}
 \end{pmatrix}$$


 Efecto de la condición de frontera

(6.14)

Otra forma de tratar la condición de frontera es introducir una línea más en la malla en $i = N + 1$, tal como se muestra en la siguiente figura

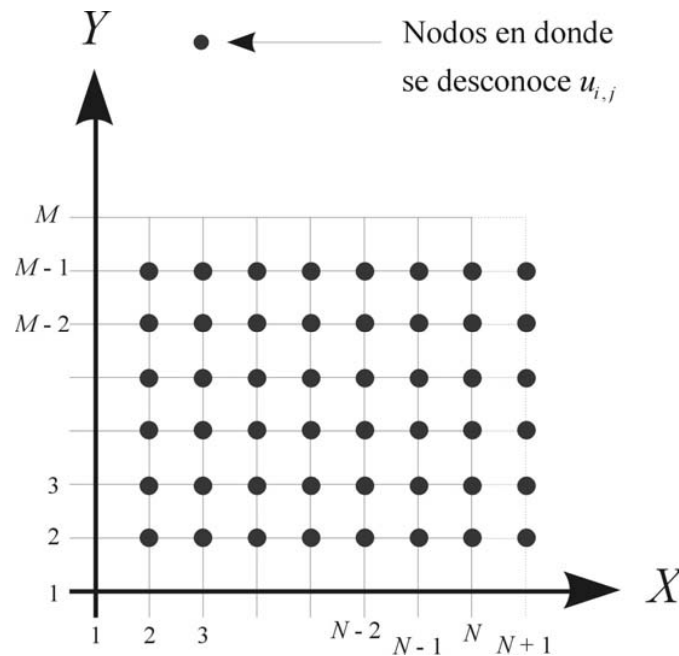


Figura 20. Dominio discretizado con columna adicional para incluir condición de frontera de Newman o Cauchy.

Usando una expresión central para la derivada en $X = 1$, se obtiene

$$\left(\frac{\partial u}{\partial X}\right)_{X=1} = \frac{u(1+\Delta X) - u(1-\Delta X)}{2\Delta X} + \mathcal{O}[(\Delta X)^2] \quad (6.15)$$

1. Llamar rutina de lectura de datos $(N, M, \Delta X, \Delta Y, \omega, \varepsilon, k_{\max}, N_{Bi}, u_{\infty})$
2. Llamar rutina de cálculo de coeficientes A_i, B_i, C_i para $2 \leq i \leq N-1$ de acuerdo a las ecuaciones (6.13) y A_N, B_N, C_N con (6.21)
3. Inicio del ciclo de iteración $k = 0$
4. Inicia ciclo 1
 Para $j = 2$ a $M-1$
 Llamar rutina de cálculo de coeficiente b_i , con las ecuaciones (5.3) para $2 \leq i \leq N-1$ y (6.21) para $i = N$
 Llamar rutina con algoritmo de Thomas para encontrar los $N-1$ valores de U_i para luego $u_{i,j}^{k,calc} \leftarrow U_{i-1}$. Tener especial cuidado al asignar los coeficientes del sistema tridiagonal a los de la rutina de Thomas ya que los de la ecuación empiezan en $i = 2$.
 Termina ciclo 1
5. Llamar rutina para cálculo de $u_{i,j}^{k+1}$ y error $u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k$.
6. $k \leftarrow k+1$, revisar si se alcanzó al número límite de iteraciones $k_{\max}$, y tomar la decisión pertinente: parar el programa o regresar al paso 4.
7. Si el error en $2 \leq i \leq N+1$ y $2 \leq j \leq M-1$ satisface el criterio de convergencia, entonces se terminó el cálculo y se puede llamar a la rutina de escritura de resultados, de otra manera deberá irse al inicio del ciclo 1 en tomando como valor del campo $u_{i,j}$ el acabado de obtener en la interacción anterior.

Solución de una ecuación diferencial elíptica con condiciones de frontera tipo Dirichlet en tres fronteras y tipo Cauchy en $X=1$ usando el método de inversion línea por línea.

7. El método explícito para la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales parabólicas

Se comenzara con el caso más sencillo, definido como

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq \ell \quad (7.1)$$

con condiciones de frontera

$$\text{en } x = 0 \quad T = g_1(t) \quad (7.2)$$

$$\text{en } x = \ell \quad T = g_2(t) \quad (7.3)$$

Y condición inicial de frontera

$$\text{para } t = 0 \quad T = f(x) \quad (7.4)$$

En esta clase de dominios, el tiempo es una variable independiente cuyo dominio es semi infinito. El objetivo es resolver la ec. (7.1) por un método de diferencias finitas en el cual el espaciamiento en el tiempo y la posición sean constantes.

Introduciendo las siguientes variables adimensionales

$$\tau = \frac{\alpha t}{\ell^2}, \quad X = \frac{x}{\ell}, \quad u = \frac{T}{T_0} \quad (7.5)$$

El problema dado por las ecs. (7.1)-(7.4) toma la siguiente forma

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} \quad (7.6)$$

$$\text{en } X = 0 \quad u = G_1(\tau) \quad (7.7)$$

$$\text{en } X = 1 \quad u = G_2(\tau) \quad (7.8)$$

$$\text{para } \tau = 0 \quad u = F(x) \quad (7.9)$$

Los métodos para resolver numéricamente ecuaciones diferenciales parabólicas se clasifican en implícitos y explícitos. Los métodos explícitos son más sencillos de manejar y por esta razón serán los primeros que se discutirán.

Este método se basa en que la derivada con respecto al tiempo se representa en diferencias finitas con una fórmula adelantada. De esta forma se involucra la variable independiente u en los instantes τ y $\tau + \Delta\tau$. La expansión en series de Taylor utilizando esta idea es

$$u(\tau + \Delta\tau) = u(\tau) + \frac{\partial u}{\partial \tau} \Delta\tau + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} (\Delta\tau)^2 + \dots \quad (7.10)$$

de la cual se obtiene

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{u(\tau + \Delta\tau) - u(\tau)}{\Delta\tau} - \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \Delta\tau + \dots \quad (7.11)$$

Es conveniente ahora introducir el uso de los siguientes índices: “ i ” para la posición en “ X ”, y el superíndice “ k ” para el instante τ . De acuerdo a ello

$$X_i = i \Delta X, \quad \text{para } i = 0, 1, 2, \dots, N \quad (7.12)$$

y
$$\tau^k = k \Delta \tau, \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots, \infty \quad (7.13)$$

Con esta nomenclatura la variable dependiente toma la forma

$$u(X_i, \tau^k) = u_i^k \quad (7.14)$$

y la derivada dada por la ec. (7.11) será ahora

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)_i^k = \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta \tau} + \mathcal{O}(\Delta \tau) \quad (7.15)$$

Para la derivada con respecto a X se obtuvo anteriormente

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} \right)_i^k = \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{(\Delta X)^2} + \mathcal{O}[(\Delta X)^2] \quad (7.16)$$

Usando las ecs. (7.15) y (7.16) en la ecuación diferencial dada por la ec. (7.1), se obtiene la representación de esta en diferencias finitas es

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta \tau} = \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{(\Delta X)^2} + \mathcal{O}[(\Delta X)^2] + \mathcal{O}(\Delta \tau) \quad (7.17)$$

Si $\tau + \Delta \tau$ y ΔX son suficientemente pequeños

$$u_i^{k+1} = u_i^k + r[u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k] \quad (7.18)$$

en la cual el parámetro numérico r está definido por

$$r = \frac{\Delta \tau}{(\Delta X)^2} \quad (7.19)$$

Nótese que la función en el instante “ $k+1$ ” y la posición “ i ” puede ser calculada totalmente de los valores de la temperatura en el instante “ k ”. O sea que la condición inicial $u^0 = F(X)$ es suficiente para calcular los valores u^1 con la ec. (7.18). Análogamente u^2 se calcula de u^1 , u^1 , u^2 , etc. Esto es lo que se entiende por el método explícito, y la celda computacional correspondiente se muestra en la figura siguiente

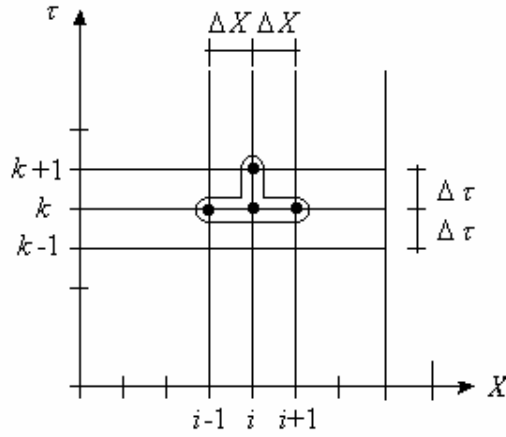


Figura 21. Celda computacional para el método explícito.

Este método es muy simple de programar, pero a menos que r sea muy pequeño la solución será inestable. Cuando las condiciones de frontera son del tipo de Dirichlet el criterio para estabilidad es

$$\frac{\Delta \tau}{(\Delta X)^2} = r \leq \frac{1}{2} \quad (7.20)$$

Si se especifica una condición de flujo el criterio se transforma a

$$r < \frac{1}{2} \quad (7.19)$$

O sea la estabilidad de la solución depende de las condiciones de frontera y de la ecuación diferencial. Como un ejemplo supóngase que $r = 1/2$, $G_1 = G_2 = 0$ y $F(X) = 1$, entonces la ec. (7.16) toma la forma

$$u_i^{k+1} = \frac{1}{2}(u_{i+1}^k + u_{i-1}^k) \quad (7.20)$$

De acuerdo con esta ecuación los valores u_i para el instante “ $k+1$ ” se pueden obtener gráficamente al interpolar linealmente entre los valores u_{i+1}^k y u_{i-1}^k , como se muestra en la figura siguiente

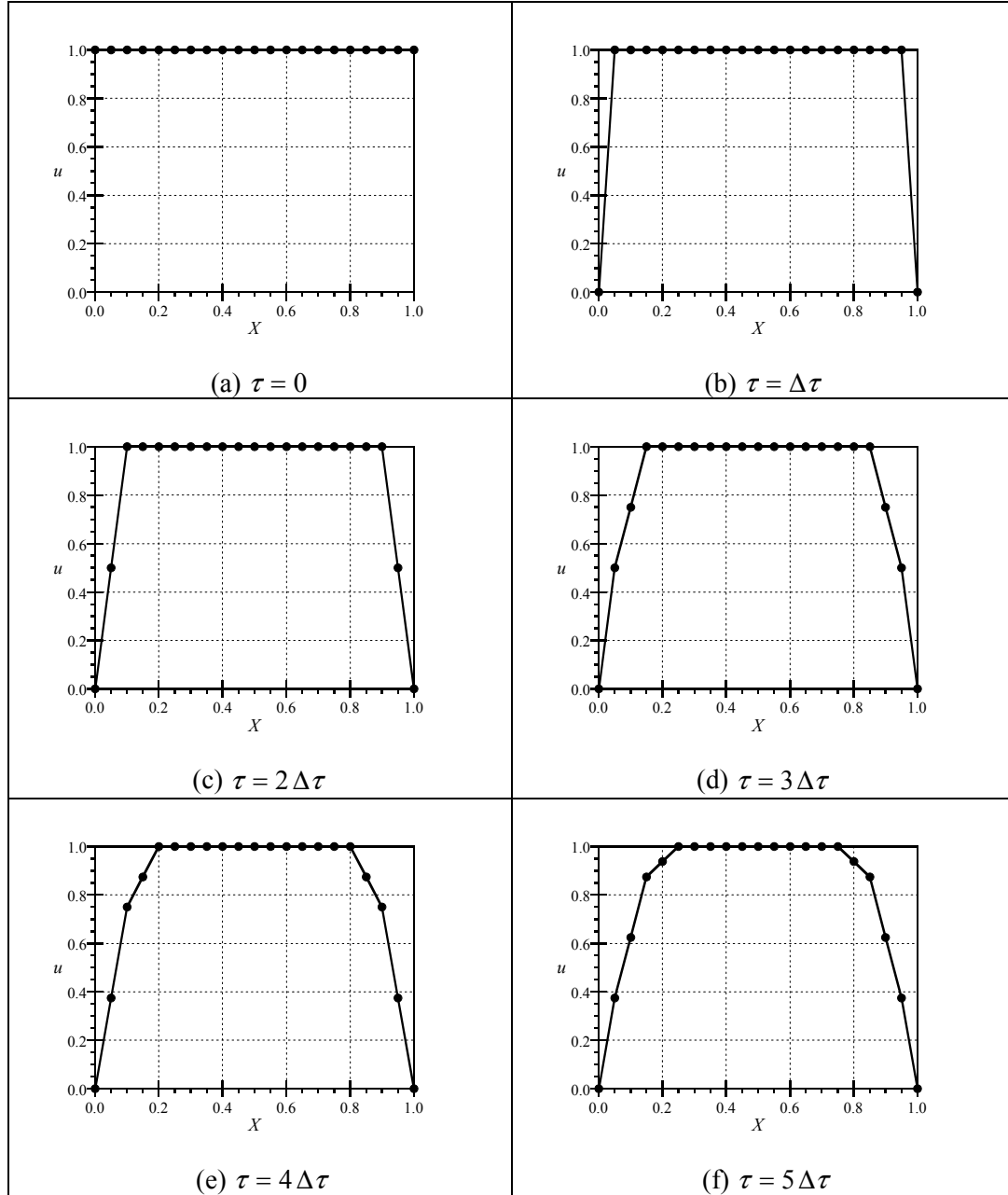


Figura. 22. Predicción del perfil de $U(X, \tau)$ dada por un método de diferencias finitas totalmente explícito en los instantes cercanos a $\tau=0$, partir del planteamiento dado por las ecuaciones (7.6)-(7.9). Datos $N = 21$, $r = 1/2$ y $G_1 = G_2 = F = 0$

La gran desventaja del método explícito es que si se incrementa el número de puntos en X , se tendrá que disminuir drásticamente el valor de $\tau + \Delta\tau$, por ejemplo si se usan 20 puntos en la dirección X

$$\Delta X = \frac{1}{20} = 0.05$$

Y por lo tanto el máximo valor de $\tau + \Delta\tau$ es

$$\tau = \frac{1}{2}(25 \times 10^{-4}) = 1.25 \times 10^{-3}$$

Esto significa que para alcanzar $\tau + \Delta\tau$ se necesitan $\approx 10^4$ incrementos en el tiempo. Esto es muy lento, y por supuesto nada práctico si se pretende alcanzar valores de $\tau \geq 10^3$.

Una alternativa para solventar la anterior desventaja de los métodos explícitos son los métodos implícitos. Pero antes de revisar estos métodos es interesante analizar un problema bidimensional con la formulación implícita, por ejemplo

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \quad (7.21)$$

Toma la siguiente forma en diferencias finitas si se usa discretización hacia adelante en el tiempo y discretización centrada en el espacio

$$\frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\Delta \tau} = \frac{u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k}{(\Delta X)^2} + \frac{u_{i,j+1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k}{(\Delta Y)^2} \quad (7.22)$$

Si $\Delta X = \Delta Y$ y $r = \Delta \tau / (\Delta X)^2$, la ecuación (7.22) toma la siguiente forma

$$\frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\Delta \tau} = \frac{u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k}{(\Delta X)^2} + \frac{u_{i,j+1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k}{(\Delta Y)^2} \quad (7.23)$$

Nótese que esta expresión es idéntica a la obtenida por el método de Jacobi, para la ecuación de Laplace en dos dimensiones, si se define

$$r = \frac{\omega}{4} \quad (7.24)$$

En la discusión del método de Jacobi se mencionó que $\omega < 1$ para obtener soluciones estables, o sea esto implica que

$$r = \frac{\omega}{4} \quad (7.25)$$

es la condición de estabilidad para un método explícito aplicado a una ecuación parabólica con dependencia temporal y dos dimensiones espaciales.

En seguida se muestra el esbozo del programa para resolver el problema dado por la ecuaciones (7.6)-(7.9) con el esquema completamente explícito:

1. Llamar rutina de lectura de datos $(N, r, \tau_{\max})$
2. Inicio del ciclo de iteración $k = 0$
3. Inicia ciclo 1
 Para $i = 2$ a $N - 1$

$$\text{Obtener } u_i^{k+1} = u_i^k + r[u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k]$$
 Termina ciclo 1
4. $k \leftarrow k + 1$, $\tau \leftarrow k \Delta \tau$, revisar si τ alcanzó al tiempo límite $\tau_{\max}$, y tomar la decisión pertinente: volver a inicio del ciclo 1 (paso 3) o parar el programa.
5. Se podrá optar por escribir el perfil de $u(X, \tau)$ en los instantes deseados.

Solución de una ecuación diferencial parabólica unidimensional con condiciones de frontera tipo Dirichlet con un esquema totalmente explícito.

Es interesante ver que el cambio del programa acabado de mostrar para la solución del problema bidimensional siguiendo es menor. Esto se aprecia en el siguiente esbozo:

1. Llamar rutina de lectura de datos $(N, M, r, \tau_{\max})$ [supone $\Delta X = \Delta Y$]
2. Inicio del ciclo de iteración, $k \leftarrow 0$
3. Inicia ciclo 1
 Para $i = 2$ a $N - 1$
 Para $j = 2$ a $M - 1$

$$\text{Obtener } u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k + r(u_{i+1,j}^k - 4u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k)$$
 Termina ciclo 1
3. $k \leftarrow k + 1$, $\tau \leftarrow k \Delta \tau$, revisar si τ alcanzó al tiempo límite $\tau_{\max}$, y tomar la decisión pertinente: volver a inicio del ciclo 1 (paso 3) o parar el programa.
4. Se podrá optar por escribir el perfil de $u(X, Y, \tau)$ en los instantes deseados.

Solución de una ecuación diferencial parabólica bidimensional con condiciones de frontera tipo Dirichlet con un esquema totalmente explícito.

8. Métodos implícitos para solución de ecuaciones diferenciales parabólicas

Estos métodos están basados en representar la derivada temporal en términos de la función en los instantes τ y $\tau - \Delta\tau$, así en series de Taylor

$$u(\tau - \Delta\tau) = u(\tau) + \frac{\partial u}{\partial \tau}(-\Delta\tau) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}(-\Delta\tau)^2 + \dots \quad (8.1)$$

De esta ecuación se puede obtener

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{u(\tau) - u(\tau - \Delta\tau)}{\Delta\tau} + \mathcal{O}(\Delta\tau) \quad (8.2)$$

Usando los índices para la posición y el tiempo definidos anteriormente

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)_i^k = \frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{\Delta\tau} + \mathcal{O}(\Delta\tau) \quad (8.3)$$

Usando la fórmula de discretización central para la segunda derivada con respecto a X , se encuentra que la ec. (7.6) toma la siguiente forma

$$-u_i^{k-1} = -u_i^k + r[u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k] \quad (8.4)$$

en donde r una vez más es $r = \Delta\tau / (\Delta X)^2$. Para poder calcular u_i^k la ec. (8.4) se debe escribir como un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales

$$ru_{i-1}^k - (1 + 2r)u_i^k + ru_{i+1}^k = -u_i^{k-1}, \quad \text{para } i = 2, 3, \dots, N-1 \quad (8.5)$$

en donde N es el número de nodos usados en la dirección X . La celda computacional del método implícito se muestra en la siguiente figura

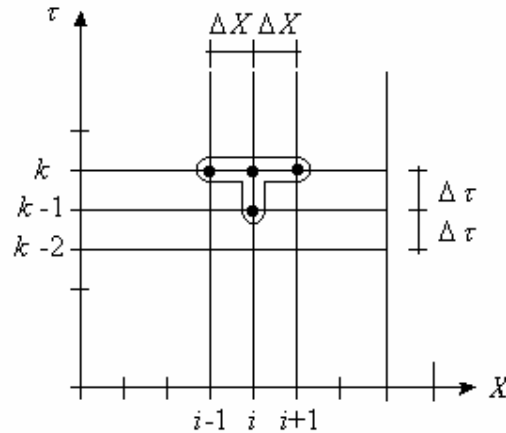


Figura 23. Celda computacional para el método implícito.

Si $N = 8$ (o sea 7 incrementos y 8 nodos) se tendrá la siguiente malla

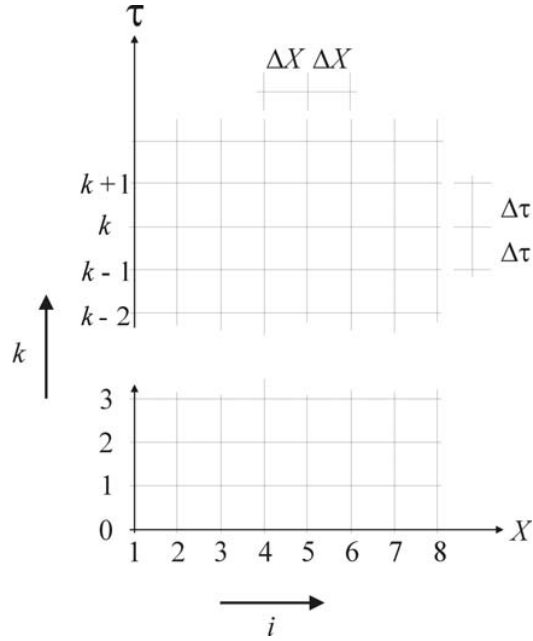


Figura 24. Malla computacional para la solución de una ecuación parabólica unidimensional con discretización de 7 incrementos.

Y las ecs. (8.5) toman la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 i = 2 \quad & r u_1^k - (1 + 2r) u_2^k + r u_3^k = -u_2^{k-1} \\
 i = 3 \quad & r u_2^k - (1 + 2r) u_3^k + r u_4^k = -u_3^{k-1} \\
 i = 4 \quad & r u_3^k - (1 + 2r) u_4^k + r u_5^k = -u_4^{k-1} \\
 i = 5 \quad & r u_4^k - (1 + 2r) u_5^k + r u_6^k = -u_5^{k-1} \\
 i = 6 \quad & r u_5^k - (1 + 2r) u_6^k + r u_7^k = -u_6^{k-1} \\
 i = 7 \quad & r u_6^k - (1 + 2r) u_7^k + r u_8^k = -u_7^{k-1}
 \end{aligned} \tag{8.6}$$

Este sistema podrá resolverse si se incorporan las condiciones de frontera e inicial. Por ejemplo si $G_1(\tau)$ y $G_2(\tau)$ en $X = 0, 1$ respectivamente, para $\tau > 0$; y $F(X)$ en $\tau = 0$ para $0 \leq X \leq 1$. Entonces el sistema de ecuaciones en forma matricial es:

$$\begin{pmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 r & -r & r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & r & -r & r & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & r & -r & r & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & r & -r & r & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & r & -r & r & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & -r & r \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 u_1^k \\
 u_2^k \\
 u_3^k \\
 u_4^k \\
 u_5^k \\
 u_6^k \\
 u_7^k \\
 u_8^k
 \end{pmatrix}
 = -
 \begin{pmatrix}
 -G_2(\tau^k) \\
 u_2^{k-1} \\
 u_3^{k-1} \\
 u_4^{k-1} \\
 u_5^{k-1} \\
 u_6^{k-1} \\
 u_7^{k-1} \\
 -G_2(\tau^k)
 \end{pmatrix}
 \quad (8.7)$$

En general para una discretización con N nodos las ecuaciones de los coeficientes en el sistema tridiagonal formado por las incógnitas $U_i = u_i^k$ tendrán la siguiente forma

$$A_1 = C_1 = 0, \quad B_1 = 1, \quad D_1 = G_1(\tau) \quad (8.8a)$$

$$A_i = C_i = r, \quad B_i = -(1 + 2r), \quad D_i = -u_i^{k-1}, \quad \text{para } 2 \leq i \leq N-1 \quad (8.8b)$$

$$A_N = C_N = 0, \quad B_N = 1, \quad D_N = G_2(\tau) \quad (8.8c)$$

Nótese que este es un sistema tridiagonal el cual puede ser resuelto con el algoritmo de Thomas. En notación matricial compacta el sistema (8.7) es

$$\{A_{ij}\} \{u_j^k\} = -\{u_i^{k-1}\} \quad (8.9)$$

La condición inicial está dada por $\{u_j^0\}$, así que $\{u_j^1\}$ se obtendrá por

$$\{u_i^1\} = -\{A_{ij}\}^{-1} \{u_j^0\} \quad (8.10)$$

Y para el siguiente instante

$$\{u_i^2\} = -\{A_{ij}\}^{-1} \{u_j^1\} \quad (8.11)$$

En esta forma se avanza a lo largo del tiempo, integrando la dependencia en X de una sola vez para cada instante.

Este método es uniformemente estable para cualquier valor de r . Sin embargo cuando $\Delta\tau$ se aumente la solución es menos precisa. La razón para esto es que el error en la primera derivada con respecto al tiempo es de orden $\Delta\tau$, y el error en la segunda derivada con respecto a X es del orden $(\Delta X)^2$.

La precisión en el método explícito en general es mucho mejor, así que una combinación de los métodos explícito e implícito parece una buena posibilidad para mantener la estabilidad, pero consiguiendo una solución precisa. Un esquema numérico que consigue lo anterior es el planteado en el método de Crank-Nicholson.

El esbozo del programa de computación es el siguiente:

1. Llamar rutina de lectura de datos $(N, r, \tau_{\max})$
2. Llamar rutina de cálculo de coeficientes A_i, B_i, C_i para $1 \leq i \leq N$ con las ecuaciones (8.8)
3. Inicio del ciclo de iteración, $k \leftarrow 0$
Inicializar coeficiente D_i para $2 \leq i \leq N-1$, ecs. (8.8), con condición inicial $F(X)$ en $\tau = 0$ para $0 \leq X \leq 1$.
4. Evaluar coeficientes D_1 y D_N usando las ecuaciones (8.8a) y (8.8c).
Llamar rutina con algoritmo de Thomas para encontrar los N valores de U_i para entonces $u_i^k \leftarrow U_i$.
5. $k \leftarrow k+1$, $\tau \leftarrow k \Delta \tau$, revisar si τ alcanzó al tiempo límite $\tau_{\max}$, y tomar la decisión pertinente: volver al paso 4 o parar el programa.
6. Se podrá optar por escribir el perfil de $u(X, \tau)$ en los instantes deseados.

Solución de una ecuación diferencial parabólica unidimensional con condiciones de frontera tipo Dirichlet con un esquema totalmente implícito.

9. El Método de Crank-Nicholson

Se introduce el método con la idea de resolver el problema planteado por las ecuaciones (7.6)-(7.9). Para ello, consideraremos las siguientes expansiones en series de Taylor

$$u(\tau + \frac{\Delta\tau}{2}) = u(\tau) + \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{\Delta\tau}{2} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} (\frac{\Delta\tau}{2})^2 + \dots \quad (9.1)$$

$$u(\tau - \frac{\Delta\tau}{2}) = u(\tau) - \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{\Delta\tau}{2} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} (\frac{\Delta\tau}{2})^2 - \dots \quad (9.2)$$

La resta de estas dos ecuaciones da como resultado

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right) = \frac{u(\tau + \Delta\tau/2) - u(\tau - \Delta\tau/2)}{\Delta\tau} + \mathcal{O}[(\Delta\tau)^2] \quad (9.3)$$

De esta ecuación podemos obtener

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)_i^k = \frac{u_i^{k+1/2} - u_i^{k-1/2}}{\Delta\tau} + \mathcal{O}[(\Delta\tau)^2] \quad (9.4)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)_i^{k+1/2} = \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta\tau} + \mathcal{O}[(\Delta\tau)^2] \quad (9.5)$$

La ecuación diferencial que se intenta resolver, ec. (7.6), se escribirá ahora como

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)_i^{k+1/2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} \right)_i^{k+1/2} \quad (9.6)$$

Donde el miembro derecho se aproximará como

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)_i^{k+1/2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} \right)_i^k + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} \right)_i^{k+1} \right] \quad (9.7)$$

Así que la ec. (9.6) toma la forma

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta\tau} = \frac{1}{2} \frac{u_{i+1,j}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1} + u_{i-1,j}^{k+1}}{(\Delta X)^2} + \frac{1}{2} \frac{u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k}{(\Delta X)^2} \quad (9.8)$$

Que se puede arreglar como

$$\left(\frac{r}{2} \right) u_{i-1}^{k+1} - (1+r) u_i^{k+1} + \left(\frac{r}{2} \right) u_{i+1}^{k+1} = - \left[\left(\frac{r}{2} \right) u_{i-1}^k + (1-r) u_i^k + \left(\frac{r}{2} \right) u_{i+1}^k \right] \quad (9.9)$$

Esta ecuación es de la forma tridiagonal, y se puede usar para $i = 1$ a N , de tal manera que el sistema se puede resolver para encontrar $\{u_j^1\}$, $\{u_j^2\}$, $\{u_j^3\}$, etc. Nótese que la ec. (9.6) también podría escribirse como

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)_i^{k+1/2} &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}\right)_i^{k+1/2} = (1-\lambda)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}\right)_i^k + \lambda\left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}\right)_i^{k+1} \\ \text{ó} \quad \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta \tau} &= (1-\lambda)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}\right)_i^k + \lambda\left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}\right)_i^{k+1} \end{aligned} \quad (9.10)$$

En donde si $\lambda = 0$ se obtiene el método explícito,

si $\lambda = 1$ se obtiene el método implícito,

y si $\lambda = \frac{1}{2}$ se obtiene el método de Crank-Nicholson.

Las regiones de estabilidad se muestran en la siguiente figura

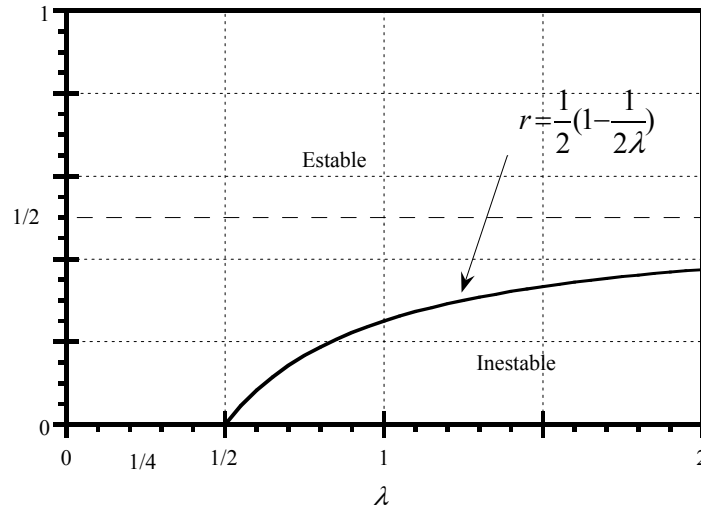


Figura 25. Región en donde el método de Crank-Nicholson es estable.

Para $\lambda = 0$ el método da soluciones completamente estables, pero la solución puede tener comportamiento oscilatorio. La región de este tipo de soluciones se muestra a continuación

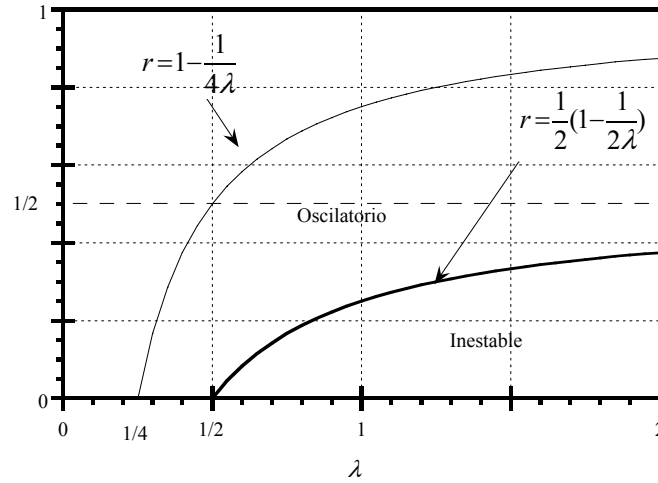


Figura 26. Región en donde con el método de Crank-Nicholson se obtienen soluciones estables pero oscilatorias.

El método de Crank-Nicholson es uno de los más recurridos para resolver ecuaciones parabólicas porque tiene buenas características de estabilidad y precisión de segundo orden.

Para el problema planteado, por las ecs. (7.6)-(7.9), los coeficientes de la matriz tridiagonal están dados por

$$A_1 = C_1 = 0, \quad B_1 = 1, \quad D_1 = G_1(\tau) \quad (9.11a)$$

$$\text{para } 2 \leq i \leq N-1, \begin{cases} A_i = C_i = \frac{r}{2}, & B_i = -(1+r), \\ D_i = -\left[\left(\frac{r}{2}\right)u_{i-1}^k + (1-r)u_i^k + \left(\frac{r}{2}\right)u_{i+1}^k \right] \end{cases} \quad (9.11b)$$

$$A_N = C_N = 0, \quad B_N = 1, \quad D_N = G_2(\tau) \quad (9.11c)$$

El esbozo para el programa planteado con estas ecuaciones se muestra a continuación y es de notarse la similitud con el programa que se escribiría para el método implícito. De hecho el mismo programa puede usarse para ambos métodos y aún el método totalmente explícito si se es suficientemente cuidadoso para transferir la información y el valor adecuado del parámetro λ (0,1,1/2) que define el método.

1. Llamar rutina de lectura de datos $(N, r, \tau_{\max})$
2. Llamar rutina de cálculo de coeficientes A_i, B_i, C_i para $1 \leq i \leq N$ con ecuaciones (9.11)
3. Inicio del ciclo de iteración, $k \leftarrow 0$
Inicializar coeficiente D_i para $2 \leq i \leq N-1$, ecs. (9.11), con condición inicial $F(X)$ en $\tau = 0$ para $0 \leq X \leq 1$.
4. Evaluar coeficientes D_1 y D_N usando las ecuaciones (9.11a) y (9.11c).
Llamar rutina con algoritmo de Thomas para encontrar los N valores de U_i para luego $u_i^{k+1} \leftarrow U_i$.
5. $k \leftarrow k+1$, $\tau \leftarrow k \Delta \tau$, revisar si τ alcanzó al tiempo límite $\tau_{\max}$, y tomar la decisión pertinente: volver al paso 4 o parar el programa.
6. Se podrá optar por escribir el perfil de $u(X, \tau)$ en los instantes deseados.

Solución de una ecuación diferencial parabólica unidimensional con condiciones de frontera tipo Dirichlet con un esquema de Crack-Nicholson

10. El método implícito de dirección alternada (ADI)

En la integración de ecuaciones diferenciales parciales en dos o tres dimensiones se puede usar el método de inversión de línea por línea, pero es necesario introducir una nueva idea. El método que usa esta idea es el método implícito de integración alternante. Con el objeto de demostrar el funcionamiento del método se considera el problema definido por la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \quad (10.1)$$

Y las condiciones de frontera e inicial

$$\text{en } X = 0 \quad u = G_1(\tau) \quad (10.2)$$

$$\text{en } X = 1 \quad u = G_2(\tau) \quad (10.3)$$

$$\text{en } Y = 0 \quad u = H_1(\tau) \quad (10.4)$$

$$\text{en } Y = \alpha \quad u = H_2(\tau) \quad (10.5)$$

$$\text{para } \tau = 0 \quad u = F(X, Y) \quad (10.6)$$

La función u depende de X, Y y τ , por lo tanto

$$u = u(X_i, Y_j, \tau^k) = u_{i,j}^k \quad (10.7)$$

en donde

$$\tau^k = k \Delta \tau, \quad X_i = (i-1) \Delta X, \quad Y_j = (j-1) \Delta Y \quad (10.8)$$

Entonces

$$\Delta X = 1/(N-1), \quad \Delta Y = \alpha/(M-1)$$

El método ADI involucra el cálculo de valores de u para tiempos intermedios a " k " y " $k+1$ " por integración en la dirección Y . Estos resultados intermedios se usan para encontrar los valores de u en el nuevo instante por integración en la dirección X .

Esta idea se expresa como

$$\text{Paso I} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)_{i,j}^{k+1/2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} \right)_{i,j}^k + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \right)_{i,j}^{k+1/2} \quad (10.9)$$

$$\text{Paso II} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)_{i,j}^{k+1} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} \right)_{i,j}^{k+1} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \right)_{i,j}^{k+1/2} \quad (10.11)$$

En forma discretizada las ecuaciones son

$$\text{Paso I} \quad \frac{u_{i,j}^{k+1/2} - u_{i,j}^k}{\Delta \tau / 2} = \left[\frac{u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k}{(\Delta X)^2} \right] + \left[\frac{u_{i,j+1}^{k+1/2} - 2u_{i,j}^{k+1/2} + u_{i,j-1}^{k+1/2}}{(\Delta Y)^2} \right] \quad (10.12)$$

$$\text{Paso II} \quad \frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^{k+1/2}}{\Delta \tau / 2} = \left[\frac{u_{i+1,j}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1} + u_{i-1,j}^{k+1}}{(\Delta X)^2} \right] + \left[\frac{u_{i,j+1}^{k+1/2} - 2u_{i,j}^{k+1/2} + u_{i,j-1}^{k+1/2}}{(\Delta Y)^2} \right] \quad (10.13)$$

Estas dos ecuaciones fácilmente se pueden escribir en forma tridiagonal

Paso I

$$\left(\frac{r}{2} \right) u_{i,j-1}^{k+1/2} - (1+r) u_{i,j}^{k+1/2} + \left(\frac{r}{2} \right) u_{i,j+1}^{k+1/2} = - \left[\left(\frac{r}{2} \right) u_{i-1,j}^k + (1-r) u_{i,j}^k + \left(\frac{r}{2} \right) u_{i+1,j}^k \right] \quad (10.14)$$

Paso II

$$\left(\frac{r}{2} \right) u_{i-1,j}^{k+1} - (1+r) u_{i,j}^{k+1} + \left(\frac{r}{2} \right) u_{i+1,j}^{k+1} = - \left[\left(\frac{r}{2} \right) u_{i,j+1}^{k+1/2} + (1-r) u_{i,j}^{k+1/2} + \left(\frac{r}{2} \right) u_{i,j-1}^{k+1/2} \right] \quad (10.15)$$

En donde

$$r = \frac{\Delta \tau}{(\Delta X)^2} = \frac{\Delta \tau}{(\Delta Y)^2}$$

Tanto la ec. (10.14) como la (10.15) son válidas para cada (i, j) en $2 \leq i \leq N-1$ y $2 \leq j \leq M-1$.

La integración en cada una de las direcciones se realizará como se muestra esquemáticamente en la figura siguiente y de acuerdo a las ecuaciones descritas a continuación:

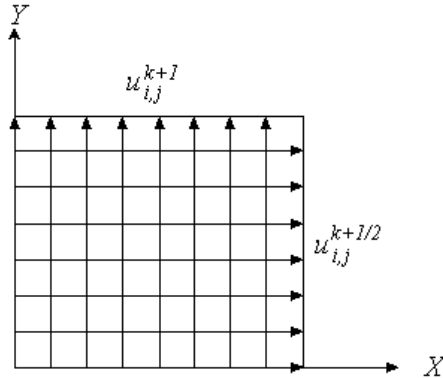


Figura 27. Diagrama que muestra en forma esquemática que los valores en el instante $k+1/2$ se obtienen al resolver las ecuaciones primero columna por columna, y después los valores correspondientes al instante $k+1$ al resolver las ecuaciones renglón por renglón.

Paso I

Las incógnitas son $u_{i,j}^{k+1/2}$, así para cada "i" en $2 \leq i \leq N-1$, debe resolverse un sistema tridiagonal de M ecuaciones del tipo

$$A_{Xj} U_{j-1} + B_{Xj} U_j + C_{Xj} U_{j+1} = D_{Xj}, \quad \text{para } 1 \leq j \leq M$$

En donde $U_j = u_{i,j}^{k+1/2}$, y los coeficientes están dados por

$$A_{X1} = C_{X1} = 0, \quad B_{X1} = 1, \quad D_{X1} = H_1(\tau^k) \quad (10.28a)$$

$$\text{para } 2 \leq j \leq M-1, \begin{cases} A_{Xj} = C_{Xj} = \frac{r}{2}, & B_{Xj} = -(1+r) \\ D_{Xj} = -\left[\left(\frac{r}{2} \right) u_{i-1,j}^k + (1-r) u_{i,j}^k + \left(\frac{r}{2} \right) u_{i+1,j}^k \right] \end{cases} \quad (10.28b)$$

$$A_{XM} = C_{XM} = 0, \quad B_{XM} = 1, \quad D_{XM} = H_2(\tau^k) \quad (10.28c)$$

Paso II

Las incógnitas son $u_{i,j}^{k+1}$, así para cada "j" en $2 \leq j \leq M-1$, debe resolverse un sistema tridiagonal de N ecuaciones del tipo

$$A_{Yi} U_{i-1} + B_{Yi} U_i + C_{Yi} U_{i+1} = D_{Yi}, \quad \text{para } 1 \leq i \leq N$$

En donde $U_i = u_{i,j}^{k+1}$, y los coeficientes están dados por

$$A_{Y1} = C_{Y1} = 0, \quad B_{Y1} = 1, \quad D_{Y1} = G_1(\tau^{k+1}) \quad (10.29a)$$

$$\text{para } 2 \leq i \leq N-1, \begin{cases} A_{Yi} = C_{Yi} = \frac{r}{2}, & B_{Yi} = -(1+r) \\ D_{Yi} = -\left[\left(\frac{r}{2} \right) u_{i,j+1}^{k+1/2} + (1-r) u_{i,j}^{k+1/2} + \left(\frac{r}{2} \right) u_{i,j-1}^{k+1/2} \right] \end{cases} \quad (10.29b)$$

$$A_{YN} = C_{YN} = 0, \quad B_{YN} = 1, \quad D_{YN} = G_2(\tau^{k+1}) \quad (10.29c)$$

Ahora se muestra un esbozo del programa de computación:

1. Llamar rutina de lectura de datos $(N, M, r, \tau_{\max})$
2. Evaluar coeficientes A_x , B_x y C_x para $1 \leq i \leq N$ con ecs. (10.28) y coeficientes A_y , B_y y C_y para $1 \leq j \leq M$ con ecuaciones (10.29).
3. Inicio del ciclo de iteración: $k = 0$, $u_{i,j}^0 \leftarrow F(X_i, Y_j)$ para todo el dominio.
4. Ciclo de barrido en X
 - Inicio de ciclo 1
 - Para $2 \leq i \leq N - 1$
 - Obtener D_{xj} para $1 \leq j \leq M$ usando las ecs. (10.28).
 - Llamar rutina con algoritmo de Thomas para encontrar los M valores de U_j y luego $u_{i,j}^{k+1/2} \leftarrow U_j$.
 - Final del ciclo 1
5. Ciclo de barrido en Y
 - Inicio de ciclo 2
 - Para $2 \leq j \leq M - 1$
 - Obtener D_{yi} para $1 \leq i \leq N$ usando las ecs. (10.29).
 - Llamar rutina con algoritmo de Thomas para encontrar los N valores de U_i y luego $u_{i,j}^{k+1} \leftarrow U_i$.
 - Final del ciclo 2
6. $k \leftarrow k + 1$, $\tau \leftarrow k \Delta \tau$, revisar si τ alcanzó al tiempo límite $\tau_{\max}$, y tomar la decisión pertinente: volver al paso 4 o parar el programa.
7. Se podrá optar por escribir el perfil de $u(X, Y, \tau)$ en los instantes deseados.

Solución de una ecuación diferencial parabólica bidimensional con condiciones de frontera tipo Dirichlet con un esquema ADI

El método ADI es estable para cualquier valor de r , y aunque no es obvio es de segundo orden en $\Delta\tau$, ΔX y ΔY . Este método también se puede utilizar para la solución de ecuaciones diferenciales elípticas al introducir artificialmente el término de acumulación y puede considerarse una variación del método inversión línea por línea. Por ejemplo, en el caso de que se desee resolver el problema planteado por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = 0 \quad (10.30)$$

Y las condiciones de frontera e inicial

$$\text{en } X = 0 \quad u = G_1(\tau) \quad (10.31)$$

$$\text{en } X = 1 \quad u = G_2(\tau) \quad (10.32)$$

$$\text{en } Y = 0 \quad u = H_1(\tau) \quad (10.33)$$

$$\text{en } Y = \alpha \quad u = H_2(\tau) \quad (10.34)$$

La solución puede buscarse con el método ADI, para ello se agrega el término de acumulación a la ecuación diferencial (10.30) para obtener

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \quad (10.30^*)$$

Para tener completa la definición del ahora problema de valor inicial es necesario agregar también una condición inicial, por ejemplo

$$\text{para } \tau = 0 \quad u = u_0 = \text{constante} \quad (10.35)$$

Esta puede ser cualquiera puesto que lo que se requiere es la solución en estado estacionario de la ec. (10.30*) y un problema lineal solo tiene una solución. En este punto debemos reconocer que la búsqueda del estado estacionario de la ec. (10.30), que es la solución del problema original puede hacerse con el método ADI tal como lo discutimos al inicio de esta sección. El proceso de solución puede acelerarse ya que no se requieren los valores intermedios entre el inicio y el estado estacionario y por ello puede un $\Delta\tau$ mucho más grande que el requerido para visualizar los detalles del comportamiento dinámico. Así el programa para encontrar la solución del problema planteado por las ecuaciones (10.30)-(10.34) es esencialmente el mismo que se esbozó en la página anterior, ya que solo debe adicionarse una rutina para probar si el estado estacionario fue alcanzado.

11. Métodos numéricos para ecuaciones diferenciales parciales no-lineales

Una posibilidad para resolver problemas con ecuaciones diferenciales parciales no-lineales es primero encontrar la forma de linealizarlas de tal manera que se puedan usar los métodos de solución revisados anteriormente. Consideraremos el siguiente problema dado por una ecuación de tipo parabólico y con una de sus condiciones de frontera de tipo mixta:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial X} \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial X} \right) \quad (11.1)$$

Con condiciones de frontera

$$\text{En } X=1 \quad \beta \frac{\partial u}{\partial X} + \gamma u = \sigma \quad (11.2)$$

$$\text{En } X=0 \quad u = 0 \quad (11.3)$$

y la condición inicial

$$\text{Cuando } \tau = 0 \quad u = F(X) \quad (11.4)$$

Los coeficientes α , β , γ y σ son funciones de la variable dependiente u .

Para la solución se usará un esquema basado en el método de Crank-Nicholson o sus análogos. Así la ec. (11.1) en diferencias finitas es

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)_i^{k+1/2} &= (1-\lambda) \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial X} \right) \right]_i^k + \lambda \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial X} \right) \right]_i^{k+1} \\ \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta \tau} &= (1-\lambda) \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial X} \right) \right]_i^k + \lambda \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial X} \right) \right]_i^{k+1} \end{aligned} \quad (11.5)$$

$\lambda = 0, 1$, ó $\frac{1}{2}$,

La forma más simple de linealización de la ecuación diferencial es evaluar $\alpha(u_i^{k+1})$ en el instante previo, o sea

$$\alpha(u_i^{k+1}) \approx \alpha(u_i^k)$$

Esto introduce un error que decrecerá cuando $\Delta \tau$ se haga pequeño. Pero valores pequeños para $\Delta \tau$ significan tiempos de computación grandes, por lo tanto es adecuado buscar otra forma, una de ellas es el método de linealización de Richtmeyer que revisaremos a continuación. El mismo tipo de linealización podría intentarse en la condición de frontera, y claro el precio a pagar sería el ya mencionado. Una mejor opción es la presentada a continuación.

Método de linealización de Richtmeyer

En este método se utilizan series de Taylor para expandir la parte del término difusivo evaluada en el instante “ $k + 1$ ” de la manera siguiente

$$\left(\alpha \frac{\partial u}{\partial X} \right)_i^{k+1} \approx \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial X} \right)_i^k + \Delta \tau \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial X} \right) \right]_i^k \quad (11.6)$$

$$\approx \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial X} \right)_i^k + \Delta \tau \left[\alpha_i^k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial X} \right)_i^k + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \tau} \right)_i^k \left(\frac{\partial u}{\partial X} \right)_i^k \right] \quad (11.7)$$

$$\approx \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial X} \right)_i^k + \Delta \tau \left[\alpha_i^k \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)_i^k + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u} \right)_i^k \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)_i^k \left(\frac{\partial u}{\partial X} \right)_i^k \right] \quad (11.8)$$

Para la derivada $\frac{\partial u}{\partial \tau}$ se usa

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)_i^k = \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta \tau} = \frac{\Delta u_i^{k+1}}{\Delta \tau} \quad (11.9)$$

Aquí se ha introducido la nueva variable dependiente

$$\Delta u_i^{k+1} = u_i^{k+1} - u_i^k \quad (11.10)$$

De esta forma la ec. (11.9) toma la siguiente forma

$$\left(\alpha \frac{\partial u}{\partial X} \right)_i^{k+1} \approx \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial X} \right)_i^k + \alpha_i^k \left(\frac{\partial}{\partial X} \Delta u_i^{k+1} \right) + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u} \right)_i^k \left(\frac{\partial u}{\partial X} \right)_i^k \Delta u_i^{k+1} \quad (11.11)$$

Usando esta expresión en la ec. (11.5) que es la representación de la ecuación diferencial (11.1) se obtiene para $\lambda = 1$ (Método implícito)

$$\begin{aligned} \frac{\Delta u_i^{k+1}}{\Delta \tau} &= \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial X} \right)_i^k + \alpha_i^k \left(\frac{\partial}{\partial X} \Delta u_i^{k+1} \right) + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u} \right)_i^k \left(\frac{\partial u}{\partial X} \right)_i^k \Delta u_i^{k+1} \right\} \\ \text{ó} \quad \frac{\Delta u_i^{k+1}}{\Delta \tau} &= \underbrace{\frac{\partial}{\partial X} \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial X} \right)_i^k}_{\text{Primer término}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial X} \left(\alpha_i^k \frac{\partial}{\partial X} \Delta u_i^{k+1} \right)}_{\text{Segundo término}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial X} \left(\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u} \right)_i^k \left(\frac{\partial u}{\partial X} \right)_i^k \Delta u_i^{k+1} \right)}_{\text{Tercer término}} \quad (11.12) \end{aligned}$$

Ahora se deben obtener las derivadas con respecto a X de cada uno de los tres términos representados entre corchetes del miembro derecho, así

Primer término:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X} \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial X} \right)_i &= \frac{\alpha_{i+1/2}^k \left(\frac{\partial u}{\partial X} \right)_{i+1/2}^k - \alpha_{i-1/2}^k \left(\frac{\partial u}{\partial X} \right)_{i-1/2}^k}{\Delta X} \\ &= \frac{\alpha_{i+1/2}^k (u_{i+1}^k - u_i^k) - \alpha_{i-1/2}^k (u_i^k - u_{i-1}^k)}{(\Delta X)^2} \end{aligned} \quad (11.13)$$

Segundo término:

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\alpha_i^k \frac{\partial}{\partial X} \Delta u_i^{k+1} \right) = \frac{\alpha_{i+1/2}^k (\Delta u_{i+1}^{k+1} - \Delta u_i^{k+1}) - \alpha_{i-1/2}^k (\Delta u_i^{k+1} - \Delta u_{i-1}^{k+1})}{(\Delta X)^2} \quad (11.14)$$

Tercer término:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u} \right)_i^k \left(\frac{\partial u}{\partial X} \right)_i^k \Delta u_i^{k+1} \right\} &= \\ &= \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u} \right)_{i+1/2}^k (u_{i+1}^k - u_i^k) \Delta u_{i+1/2}^{k+1} - \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u} \right)_{i-1/2}^k (u_i^k - u_{i-1}^k) \Delta u_{i-1/2}^{k+1} \right] / (\Delta X)^2 \end{aligned} \quad (11.15)$$

Debemos hacer notar en el desarrollo de las ecuaciones (11.13)-(11.15), el uso de fórmulas de diferenciación central para las primeras derivadas. La idea detrás de ello es que las fórmulas obtenidas deben reducirse a las desarrolladas para el caso en que el coeficiente difusivo sea constante.

Para las variables obtenidas en medio de dos nodos se puede usar la representación

$$\Delta u_{i+1/2}^{k+1} \approx \frac{\Delta u_{i+1}^{k+1} + \Delta u_i^{k+1}}{2} \quad (11.16)$$

$$\Delta u_{i-1/2}^{k+1} \approx \frac{\Delta u_i^{k+1} + \Delta u_{i-1}^{k+1}}{2} \quad (11.17)$$

Utilizando las ecuaciones (11.13) a (11.17) en la ecuación (11.12) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\Delta u_i^{k+1}}{\Delta \tau} &= \frac{\alpha_{i+1/2}^k (u_{i+1}^k - u_i^k) - \alpha_{i-1/2}^k (u_i^k - u_{i-1}^k)}{(\Delta X)^2} \\ &\quad + \frac{\alpha_{i+1/2}^k (\Delta u_{i+1}^{k+1} - \Delta u_i^{k+1}) - \alpha_{i-1/2}^k (\Delta u_i^{k+1} - \Delta u_{i-1}^{k+1})}{(\Delta X)^2} \\ &\quad + \frac{1}{2(\Delta X)^2} \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u} \right)_{i+1/2}^k (u_{i+1}^k - u_i^k) (\Delta u_{i+1}^{k+1} + \Delta u_i^{k+1}) \right. \end{aligned}$$

$$-\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right)_{i-1/2}^k (u_i^k - u_{i-1}^k) (\Delta u_i^{k+1} + \Delta u_{i-1}^{k+1}) \Bigg] \quad (11.18)$$

Esta ecuación se puede reorganizar para obtener una ecuación algebraica para los Δu_{i+1}^{k+1} de forma tridiagonal

$$\begin{aligned} \Delta u_i^{k+1} & \left\{ 1 + r(\alpha_{i+1/2}^k + \alpha_{i-1/2}^k) - \left(\frac{r}{2}\right)(u_{i+1}^k - u_i^k) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right)_{i+1/2}^k + \left(\frac{r}{2}\right)(u_i^k - u_{i-1}^k) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right)_{i-1/2}^k \right\} \\ & - \Delta u_{i+1}^{k+1} \left\{ r \alpha_{i+1/2}^k + \left(\frac{r}{2}\right)(u_{i+1}^k - u_i^k) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right)_{i+1/2}^k \right\} \\ & - \Delta u_{i-1}^{k+1} \left\{ r \alpha_{i-1/2}^k + \left(\frac{r}{2}\right)(u_i^k - u_{i-1}^k) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right)_{i-1/2}^k \right\} = \\ & = r \left\{ \alpha_{i+1/2}^k (u_{i+1}^{k+1} - u_i^{k+1}) - \alpha_{i-1/2}^k (u_i^{k+1} - u_{i-1}^{k+1}) \right\} \quad (11.19) \end{aligned}$$

Nótese que la ec. (11.19) es de la forma

$$A_i^k \Delta u_{i-1}^{k+1} + B_i^k \Delta u_i^{k+1} + C_i^k \Delta u_{i+1}^{k+1} = D_i^k \quad (11.20)$$

Este es un sistema tridiagonal de ecuaciones lineales, pero ahora los coeficientes son dependientes del tiempo y la posición; en una malla de N nodos están dados para $2 \leq i \leq N-1$ por las siguientes fórmulas

$$A_i^k = - \left\{ r \alpha_{i-1/2}^k + \left(\frac{r}{2}\right)(u_i^k - u_{i-1}^k) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right)_{i-1/2}^k \right\} \quad (11.21a)$$

$$B_i^k = 1 + r(\alpha_{i+1/2}^k + \alpha_{i-1/2}^k) - \left(\frac{r}{2}\right)(u_{i+1}^k - u_i^k) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right)_{i+1/2}^k + \left(\frac{r}{2}\right)(u_i^k - u_{i-1}^k) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right)_{i-1/2}^k \quad (11.21b)$$

$$C_i^k = - \left\{ r \alpha_{i+1/2}^k + \left(\frac{r}{2}\right)(u_{i+1}^k - u_i^k) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right)_{i+1/2}^k \right\} \quad (11.21c)$$

$$D_i^k = r \left\{ \alpha_{i+1/2}^k (u_{i+1}^{k+1} - u_i^{k+1}) - \alpha_{i-1/2}^k (u_i^{k+1} - u_{i-1}^{k+1}) \right\} \quad (11.21d)$$

El valor de u_i^{k+1} se obtendrá con la ec. (11.10), una vez se adicionen las ecuaciones para los nodos 1 y N y ellas junto con las ecuaciones (11.20) se resuelvan

$$u_i^{k+1} = u_i^k + \Delta u_i^{k+1} \quad (11.22)$$

Nótese que los coeficientes de la matriz se deben recalculan antes de resolver las ecuaciones para un nuevo instante,

Condiciones de frontera

Ahora trataremos la condición de frontera no lineal dada por la ec. (11.2)

$$\text{En } X=1 \quad \beta \frac{\partial u}{\partial X} + \gamma u = \sigma \quad (11.23)$$

En el instante τ^{k+1}

$$\left(\beta \frac{\partial u}{\partial X} \right)_N^{k+1} + (\gamma u)_N^{k+1} = (\sigma)_N^{k+1}, \quad \text{para } k \geq 0 \quad (11.24)$$

Usando series de Taylor para la expansión en el tiempo, el término con la derivada espacial es

$$\left(\beta \frac{\partial u}{\partial X} \right)_N^{k+1} \approx \left(\beta \frac{\partial u}{\partial X} \right)_N^k + \Delta \tau \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\beta \frac{\partial u}{\partial X} \right) \right]_N^k \quad (11.25)$$

$$\text{ó} \quad \left[\beta \frac{\partial u}{\partial X} \right]_N^{k+1} \approx \left[\beta \frac{\partial u}{\partial X} \right]_N^k + \Delta \tau \left\{ \left(\frac{\partial \beta}{\partial u} \right)_N^k \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)_N^k \left(\frac{\partial u}{\partial X} \right)_N^k + \beta_N^k \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial u}{\partial X} \right)_N^k \right\}$$

que puede también escribirse como

$$\left[\beta \frac{\partial u}{\partial X} \right]_N^{k+1} \approx \left[\beta \frac{\partial u}{\partial X} \right]_N^k + \left(\frac{\partial \beta}{\partial u} \right)_N^k \left(\frac{\partial u}{\partial X} \right)_N^k \Delta u_N^{k+1} + \beta_N^k \frac{\partial}{\partial X} \Delta u_N^{k+1} \quad (11.26)$$

En forma similar

$$\begin{aligned} (\gamma u)_N^{k+1} &\approx (\gamma u)_N^k + \Delta \tau \left[\frac{\partial}{\partial \tau} (\gamma u) \right]_N^k \\ &\approx (\gamma u)_N^k + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial u} \right)_N^k u_N^k \Delta u_N^{k+1} + \gamma_N^k \Delta u_N^{k+1} \end{aligned} \quad (11.27)$$

y el último término en (11.24)

$$(\sigma)_N^{k+1} \approx (\sigma)_N^k + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u} \right)_N^k \Delta u_N^{k+1} \quad (11.28)$$

La substitución de las ecuaciones (11.25) a (11.28) en (11.24) da como resultado

$$\begin{aligned} &\left[\beta \frac{\partial u}{\partial X} \right]_N^k + \left(\frac{\partial \beta}{\partial u} \right)_N^k \left(\frac{\partial u}{\partial X} \right)_N^k \Delta u_N^{k+1} + \beta_N^k \frac{\partial}{\partial X} \Delta u_N^{k+1} \\ &+ (\gamma u)_N^k + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial u} \right)_N^k u_N^k \Delta u_N^{k+1} + \gamma_N^k \Delta u_N^{k+1} = (\sigma)_N^k + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u} \right)_N^k \Delta u_N^{k+1} \end{aligned} \quad (11.29)$$

Donde los tres términos señalados se cancelan porque la ecuación (11.22) también es válida para el instante “ τ^k ”. La ecuación (11.29) se reduce a

$$\beta_N^k \frac{\partial}{\partial X} \Delta u_N^{k+1} + \Omega_N^k \Delta u_N^{k+1} = 0 \quad (11.30)$$

donde

$$\Omega_N^k = \left(\frac{\partial \beta}{\partial u} \right)_N^k \left(\frac{\partial u}{\partial X} \right)_N^k + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial u} \right)_N^k u_N^k + \gamma_N^k - \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u} \right)_N^k \quad (11.31)$$

Nótese que la ecuación (11.30) es una condición de frontera lineal para Δu_i^{k+1} , y se puede discretizar espacialmente usando una fórmula de diferenciación hacia atrás para obtener

$$\beta_N^k (\Delta u_N^{k+1} - \Delta u_{N-1}^{k+1}) + \Omega_N^k \Delta X \Delta u_N^{k+1} = 0$$

$$\text{ó} \quad \Delta u_N^{k+1} (\beta_N^k + \Omega_N^k \Delta X) - \Delta u_{N-1}^{k+1} \beta_N^k = 0 \quad (11.32)$$

Los coeficientes de esta ecuación en su forma tridiagonal son

$$A_N^k = -\beta_N^k, B_N^k = (\beta_N^k + \Omega_N^k \Delta X), C_N^k = D_N^k = 0 \quad (11.33)$$

La ecuación para el nodo 1 se obtiene al representar la derivada en $X = 0$ en diferencias finitas, reconocer que es válida para cualquier instante $\tau > 0$ e involucrar la ec. (11.10), así

$$\Delta u_2^{k+1} - \Delta u_1^{k+1} = 0 \quad (11.34)$$

Y por esto los coeficientes de la primer ecuación del sistema tridiagonal son

$$A_1^k = 0, B_1^k = -1, C_1^k = +1, D_1^k = 0 \quad (11.35)$$

Debe notarse que el esquema que se acaba de discutir puede usarse para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales si se usa la idea del falso estado transitorio, esto es introducir el término de acumulación. Claro que en este caso pueden existir varios estados estacionarios y su búsqueda dependerá de la condición inicial usada.

El esbozo de un programa para resolver el problema planteado por las ecuaciones (11.1)-(11.4) se presenta a continuación:

1. Llamar rutina de lectura de datos $(N, r, \tau_{\max})$
2. Inicio del ciclo de iteración: $k = 0$, $u_i^0 \leftarrow F(X_i)$ para $1 \leq i \leq N$.
3. Llamar rutinas de evaluación de los coeficientes del sistema tridiagonal
 A_1^k, B_1^k, C_1^k y D_1^k con ecs. (11.34)
 A_i^k, B_i^k, C_i^k y D_i^k para $2 \leq i \leq N-1$ con ecs. (11.21)
 A_N^k, B_N^k, C_N^k y D_N^k con ecs. (11.33)
4. Llamar rutina con algoritmo de Thomas para encontrar los N valores de U_i para luego
 $\Delta u_i^{k+1} \leftarrow U_i$, entonces obtener el campo en el nuevo instante con $u_i^{k+1} = u_i^k + \Delta u_i^{k+1}$.
5. $k \leftarrow k+1$, $\tau \leftarrow k \Delta \tau$, revisar si τ alcanzó al tiempo límite $\tau_{\max}$, y tomar la decisión pertinente: volver al paso 3 o parar el programa.
6. Se podrá optar por escribir el perfil de $u(X, \tau)$ en los instantes deseados.

Nótese que se requiere la incorporación de rutinas para obtener los coeficientes α , β , γ y σ , así como sus derivadas.

Solución de una ecuación diferencial no lineal parabólica unidimensional con condiciones de frontera tipo mixta no lineal con un esquema totalmente implícito

Problemas propuestos

En los problemas que incluyen programas de cómputo debe entregarse un reporte escrito que incluya el programa, resultados y discusión, y no deben faltar las ecuaciones discretizadas y un esbozo del método de solución seguido.

Problema 1

El siguiente problema de valor en la frontera es un modelo para una partícula catalítica con sección transversal cuadrada y reacción irreversible de primer orden. El módulo de Thiele se representa con ϕ .

Ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial Y^2} = \phi^2 C, \text{ en } \begin{matrix} 0 \leq X \leq 1 \\ 0 \leq Y \leq 1 \end{matrix} \quad (1)$$

Condiciones de frontera:

$$\text{En } X = 1, C = 1 \quad (2)$$

$$\text{En } X = 0, C = 1 \quad (3)$$

$$\text{En } Y = 1, C = 1 \quad (4)$$

$$\text{En } Y = 0, C = 1 \quad (5)$$

El problema se muestra en forma adimensional. Se requiere:

- Escribir la ecuación diferencial en su representación en diferencias finitas.
- Resolver el sistema de ecuaciones generado en forma directa (sin iteraciones) para encontrar el perfil de concentración. Utilice una red con $\Delta X = \Delta Y = 0.25$ y $\phi = 1$.
- Grafique el perfil de concentración para $Y = 0.25, 0.5$ y 0.75 .

Problema 2

Resuelva manualmente el siguiente sistema de ecuaciones usando el algoritmo de Thomas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Problema 3.

Utilizando diferencias centrales alrededor del nodo " i " encuentre una fórmula para la representación en diferencias finitas del término radial en el operador nabla. La fórmula deben ser útil para coordenadas cilíndricas y esféricas y debe indicarse las condiciones bajo las cuales se recupera la fórmula obtenida para coordenadas cartesianas.

Problema 4.

Este problema está basado en la idea de que hay muchas situaciones en las que es necesario usar soluciones numéricas con mallas con espaciamiento variable entre los nodos. Deduce, utilizando series de Taylor, las fórmulas para la representación en diferencias finitas de la segunda y la primer deriva espacial alrededor del nodo " j ". Ahora a diferencia de lo revisado en el texto debe considerarse que el espaciamiento entre el nodo " j " y el " $j+1$ " es diferente al entre los nodos " j " e " $j-1$ ". Incluye las tres posibilidades para la primer derivada e indica claramente como es que se recuperan las fórmulas para el caso de espaciamiento constante.

Problema 5.

Escribe una rutina en FORTRAN que use el algoritmo de Thomas para resolver un sistema de M ecuaciones tridiagonales. Usando la misma rutina pruébala, además de con el problema 2, con tres sistemas diferentes de 5 o más ecuaciones. El programa debe leer los datos de un archivo y poder realizar las cuatro soluciones pedidas en una sola corrida.

Problema 6.

Escriba un programa en FORTRAN para resolver el problema planteado en la introducción de la sección de métodos numéricos:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \Phi^2 y = 0, \quad \text{en } a < x < b \quad (2.30)$$

Sujeta a las condiciones de frontera tipo Cauchy dadas por

$$\text{en } x = a, \quad \frac{dy}{dx} = \alpha_a (y - y_a) \quad (2.31)$$

$$\text{en } x = b, \quad -\frac{dy}{dx} = \alpha_b (y - y_b) \quad (2.32)$$

El reporte entregado deben presentarse gráficas que demuestren la capacidad del programa para reproducir los resultados presentados en la sección 2.

Problema 7.

Escriba un programa en FORTRAN para resolver el problema 1 de este grupo y presente resultados para Φ igual a 0.1, 1 y 10. Haga un análisis de convergencia de los resultados.

Problema 8

Escriba una fórmula implícita utilizando diferencias finitas para el siguiente problema

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial X} \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial X} \right) \quad (1)$$

en donde $\alpha(u) = u$, y las condiciones de frontera son:

$$\text{en } X=1, \quad \frac{\partial u}{\partial X} + N_{Bi} u = u^4 \quad (2)$$

$$\text{en } X=0, \quad u = 0 \quad (3)$$

$$\text{cuando } \tau = 0 \quad u = f(X) \quad (4)$$

Inclúyase en la formulación la consideración de la inversión como matriz tridiagonal.

Problema 9

Use un método de diferencias finitas totalmente explícito para resolver el problema dado por la ecuación diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - \phi^2 u \quad (1)$$

y las siguientes condiciones de frontera:

$$\text{en } X=0, \quad u = 1 \quad (2)$$

$$\text{en } X=1, \quad u = 0 \quad (3)$$

$$\text{cuando } \tau = 0 \quad u = 0 \quad (4)$$

Problema 10

Escriba, para el problema 9, una formulación Crank-Nicholson considerando α constante.

Problema 11

Escriba un programa en FORTRAN para resolver el siguiente problema de valor en la frontera:

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} = 0 \quad \text{en} \quad \begin{array}{l} 0 \leq \xi \leq \zeta \\ 0 \leq Z \leq 1 \end{array} \quad (1)$$

sujeta a:

$$\text{en } Z = 1, \quad u = 0 \quad \text{para} \quad 0 < \xi < \zeta \quad (2)$$

$$\text{en } Z = 0, \quad u = 1 \quad \text{para} \quad 0 < \xi < \zeta \quad (2)$$

$$\text{en } \xi = \zeta, \quad u = 0, \quad \text{para} \quad 0 \leq Z \leq 1 \quad (3)$$

Es recomendable involucrar el método de inversión línea por línea.

Problema 12

Escriba un programa en FORTRAN para resolver, usando el método ADI, el siguiente problema de valor en la frontera:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \quad \text{en} \quad \begin{array}{l} 0 \leq \xi \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{array} \quad (1)$$

sujeta a:

$$\text{cuando } \tau = 0 \quad u = 0 \quad (2)$$

$$\text{en } \xi = 1 \quad u = 1 \quad (3)$$

Problema 13

Escriba un programa en FORTRAN para resolver, usando el método ADI, el siguiente problema de valor en la frontera:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} \quad (1)$$

sujeta a

$$\text{en } Z = 0 \quad u = 1 \quad (2)$$

$$\text{en } Z = 1 \quad u = 0 \quad (3)$$

$$\text{en } \xi = \zeta \quad u = 0 \quad (4)$$

$$\text{cuando } \tau=0 \quad u = 1 \quad (5)$$

Problema 14

Elabore un programa en FORTRAN para resolver por el método de diferencias finitas el problema definido a continuación:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) - \Phi^2 u, \quad \text{en } 0 \leq \xi \leq 1$$

$$\text{Cuando } \tau = 0 \quad u = 0$$

$$\text{En } \xi=0 \quad \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$$

$$\text{En } \xi=1 \quad u = 1$$

En la presentación de resultados considere los valores 0.1, 1.0 y 10 para el parámetro Φ . Use mallas de 11, 21, 41 y 81 nodos y discuta su efecto en la convergencia de los resultados para cada valor del parámetro Φ . Presente gráficas de los perfiles de u para los instantes $\tau = 0.1, 0.5$ y 1.0 .

Problema 15

Plantea tres posibilidades para la solución numérica del siguiente problema usando el método de diferencias finitas e involucrando el algoritmo de Thomas para resolver las ecuaciones algebraicas resultantes de la discretización de la ecuación diferencial y las condiciones de frontera.

El problema está dado por

$$\frac{d^2 U}{dX^2} - \Phi^2 \frac{U}{\kappa_m + U} = 0, \quad \text{en } 0 < X < 1 \quad (1)$$

$$\text{en } X = 0, \quad \text{en } \frac{dU}{dX} = 0 \quad (2)$$

$$\text{en } X = 1, \quad \text{en } U = U_f \quad (3)$$

Debes escribir claramente las ecuaciones discretizadas y mostrar los pasos principales a considerar en el programa de cómputo. No olvides indicar los ciclos de convergencia si es que los hay.

Escribe un programa de cómputo y evalúa la eficiencia de cada una de la alternativas propuestas.

Problema 16

Plantea tres posibilidades para la solución numérica del siguiente problema usando el método de diferencias finitas e involucrando el algoritmo de Thomas para resolver las ecuaciones algebraicas resultantes de la discretización de la ecuación diferencial y las condiciones de frontera.

El problema está dado por

$$\frac{d^2 U}{dX^2} - \Phi^2 U^2 = 0, \quad \text{en } 0 < X < 1 \quad (1)$$

$$\text{en } X = 0, \quad \text{en } \frac{dU}{dX} = Bi(U - U_0) \quad (2)$$

$$\text{en } X = 1, \quad \text{en } -\frac{dU}{dX} = Bi(U - U_1) \quad (3)$$

Debes escribir claramente las ecuaciones discretizadas y mostrar los pasos principales a considerar en el programa de cómputo. No olvides indicar los ciclos de convergencia si es que los hay.

Escribe un programa en FORTRAN y analiza cuantas iteraciones son necesarias para alcanzar la convergencia, esto en función de la forma para linealizar y del módulo de Thiele Φ .

Problema 17

El siguiente modelo puede usarse para estimar el efecto de mojado no uniforme en una partícula esférica

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^2 \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\xi^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) - \Phi^2 U$$

Con la condiciones de frontera e inicial siguientes

$$\text{En } \xi = 1 \quad U = U_\infty(\theta, \tau) \quad \text{para } \tau > 0$$

$$U \text{ es finita en } 0 \leq \xi \leq 1$$

Cuando $\tau = 0 \quad U = 0 \quad \text{para } 0 \leq \xi \leq 1$

Escribe un programa en FORTRAN usando el método ADI para encontrar el perfil de concentración $U(\xi, \theta, \tau)$ y el factor de efectividad $\eta(\tau)$. Usa la solución obtenida bajo la suposición del falso estado estacionario en la concentración de la partícula, es decir que el término de acumulación se desprecia, para probar el programa

Problema 18

En muchas situaciones prácticas las partículas catalíticas están suspendidas en un fluido dentro de un tanque agitado. En el caso de partículas esféricas un modelo adimensional está dado por

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^2 \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) - \Phi^2 U$$

Sujeta a la condición de frontera

$$\text{En } \xi = 1 \quad -\frac{dU}{d\xi} = Bi(U - U_f)$$

En donde la concentración del fluido U_f , está gobernada por la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dU_f}{d\tau} = \tau_R^{-1} (U_{in}(\tau) - U_f) + \psi_p (U - U_f)$$

En esta ecuación τ_R y ψ_p son constantes que indican el tiempo de residencia adimensional y un número de Biot modificado respectivamente.

Las condiciones inicial para $U_f(\tau)$ y $U(\xi, \tau)$ son

Cuando $\tau = 0 \quad U = 0 \quad \text{para } 0 \leq \xi \leq 1$

Cuando $\tau = 0 \quad U_f = 0$

Escribe un programa en FORTRAN para encontrar $U_f(\tau)$ y $U(\xi, \tau)$, pueba el programa con la solución obtenida usando los métodos de linealización sugeridos en los problemas 37 a 40 propuestos en el Capítulo IV.

Problema 19

Escribe un programa en FORTRAN para encontrar $U_f(\tau)$ y $U(\xi, \tau)$ de la solución del problema planteado en el problema 18. Solo que en este caso se debe considerar que la expresión cinética es no lineal. Pruebe que el programa reproduzca la solución correspondiente al estado estacionario con la solución obtenida usando los métodos de

linealización sugeridos en los problemas 37 a 40 propuestos en el Capítulo IV. Presente resultados para tres expresiones cinéticas diferentes.

Bibliografía

1. Arfken, George
Mathematical Methods for Physicists
University Press, Inc., San Diego, California, 1985
Third Edition
2. Aris, Rutherford
Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics
Dover Publications, Inc.
New York, 1989
3. Churchill, Ruel V.
Operational Mathematics
McGraw-Hill Kogakusha
Tokyo, Japan
Third edition, 1972
4. Greenberg, Michael D.
Advanced Engineering Mathematics
Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1988
5. Hildebrand, Francis B.
Advanced Calculus for Applications
Prentice-Hall, Inc.
Englewood Cliffs, New Jersey. 1976
6. Kreyszig, Erwin
Advanced Engineering Mathematics
John Wiley & Sons, Inc., New York
Eighth Edition, 1999.
7. Lebedev, N.N.
Special Functions and Their Applications
Dover Publications, Inc.
New York, 1972
8. Rice, Richard G. and Do, Duong D.
Applied Mathematics and Modelling for Chemical Engineers
Wiley & Sons, Inc.
New York, 1995
9. Simmonds, James G.
A Brief on Tensor Analysis
Springer-Verlag, New York, 1994
Second Edition

10. Smith, G.D.
Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods
Claredon Press, Oxford
Third edition, 1985
11. Spiegel, Murray R.
Vector Analysis
Schaum's outline series
McGraw-Hill Book Company, 1959.
12. Spiegel, Murray R.
Manual de Fórmulas y Tablas Matemáticas
Serie Schaum
McGraw-Hill/ Interamericana de México, S.A. de C.V., 1991.
13. Varma, Arvind and Morbidelli, Massimo
Mathematical Methods in Chemical Engineering
Oxford University Press, 1997
14. Zill, D.G. and Cullen, M.R.
Advanced Engineering Mathematics
Jones and Bartlett Publishers, 2000

Textos de Ingeniería Química

15. Slattery, J.C.
Advanced Transport Phenomena
Cambridge University Press, 1999
16. Bird, R.B., Stewart, W.E. and Lightfoot, E.N.
Transport Phenomena
John Wiley & Sons, 1960.

Artículos

- 1998, Marroquín de la Rosa, J.O., Viveros García, T. and Ochoa Tapia, J.A., Evaluation of isothermal effectiveness factors for nonlinear kinetics using an approximate method, *Ind. Engng. Chem. Res.* **37**, 3780-3781.

- 1999, Marroquín de la Rosa, J.O., Viveros García, T. and Ochoa Tapia, J.A., A linear approximation method to evaluate isothermal effectiveness factors, *Chem. Engng. Commun.* **174**, 53-60.
- 2002, Marroquín de la Rosa, J.O., Morones Escobar, R., Viveros García, T. and Ochoa-Tapia, J.A., An analytic solution to the transient diffusion-reaction problem in particles dispersed in a slurry reactor, *Chem. Engng. Sci.* **57**, 1409-1417.
- 2002, Morales Cabrera, M.A., Pérez Cisneros, E.S. and Ochoa Tapia, J.A., Approximate method for the solution of facilitated transport problems in membranes, *Ind. Engng. Chem. Res.* **41**, 4626-4631.
- 2005, Morales Cabrera, M.A., Pérez Cisneros, E.S. and Ochoa Tapia, J.A., An approximate solution for the CO_2 facilitated transport in sodium bicarbonate aqueous solutions, *Journal of Membrane Science* **256**, 98-107.
- 2003, Marroquín de la Rosa, J.O., Viveros García, T. and Ochoa-Tapia, J.A., An isothermal global effectiveness factor, *Revista Mexicana de Ingeniería Química*, **2**, 183-191.
- 1996, Ochoa Tapia, J.A. y Alvarez Calderón, J., Algoritmo para la solución de problemas de separaciones cromatográficas, *Avances en Ingeniería Química* **6**, 161-167.
- 2005, Ochoa-Tapia, J.A., Valdés-Parada, F.J. and Alvarez Ramírez, J., Short-Cut Method for the Estimation of Isothermal Effectiveness Factors, *Ind. Engng. Chem. Res.* **44**, 3947-3953.
- 2002 Sales-Cruz, M.A., Pérez-Cisneros, E.S. and Ochoa-Tapia, J.A., An analytic solution for the transient diffusion problem in a multi-layer system, *Revista Mexicana de Ingeniería Química*, **1**, 57-72.
- 2005, Valdés-Parada, F.J., Álvarez-Ramírez, J.J. and Ochoa-Tapia, J.A., An approximate solution for a transient two-phase stirred tank Bioreactor with non-linear kinetics, *Biotechnology Progress* **21**, 1420-1428.

Tesis de posgrado

Sales Cruz, Alfonso Mauricio, “Análisis de la suposición del estado quasi-estacionario para problemas de difusión en sistemas de capas múltiples”. Tesis de Maestría, Posgrado de Ing. Química, División de Ciencias Básicas e Ingeniería, UAM-I, Junio de 2001.

Valdés Parada, Francisco José, “Dinámica de Reactores de dos fases con cinética no lineal aproximada”. Tesis de Maestría, Posgrado de Ing. Química, División de Ciencias Básicas e Ingeniería, UAM-I, Abril de 2004.

Proyectos propuestos para evaluación numérica de soluciones y comparación con soluciones analíticas

0. Comentarios

El objetivo que tienen el desarrollo de los proyectos propuestos, es que el lector constate que las soluciones desarrolladas generan predicciones satisfactorias. Por ello es que se propone, cuando es posible, la comparación de las soluciones analítica y numérica. También se sugiere que se incluyan soluciones aproximadas y que se analice bajo que condiciones estas reproducen o se acercan a las soluciones completas del mismo problema.

Para esto es necesario que en cada reporte presentado por el lector se incluya lo siguiente

1. Definición del problema
2. Métodos de solución analítica y numérica
3. Diagramas de flujo
- 4 Programas desarrollados
5. Metodología de prueba de los programas
5. Resultados y análisis
6. Conclusiones

De ser posible, es recomendable que los resultados sean presentados oralmente a los integrantes del grupo.

Por supuesto los proyectos no están limitados a los sugeridos en esta sección, su número puede ser tan grande como los problemas propuestos al final de los Capítulos III a VI.

Proyecto 1

La aleta de enfriamiento rectangular

En esta tarea debes comparar los perfiles de temperatura adimensional, para el problema de la aleta de enfriamiento rectangular resuelto analíticamente en la Sec. III.6, obtenidos de la siguiente forma:

- a) La temperatura promedio de la solución aproximada, $\langle \theta \rangle$.
- b) La temperatura promedio de la solución analítica exacta, $\langle u \rangle$.
- c) La temperatura promedio de la solución numérica, $\langle u_{num} \rangle$.
- d). La temperatura puntual de la solución analítica exacta, u .
- e) La temperatura puntual de la solución numérica, u_{num} .

Debes entregar al menos las figuras descritas abajo, acompañados de la discusión y resultados. Las figuras deberán contener (a) u y u_{num} (para $X = 0, 0.5$ y 1) vs. Y , y (b) $\langle u_{num} \rangle$, $\langle u \rangle$ y $\langle \theta \rangle$ vs. Y . Además reportarás el factor de efectividad para cada una de los parámetros de las figuras.

Condiciones	N_{Bi}	L / B
1	0.1	1.0
2	1.0	1.0
3	10.0	1.0
4	0.1	10.0
5	1.0	10.0
6	10.0	10.0

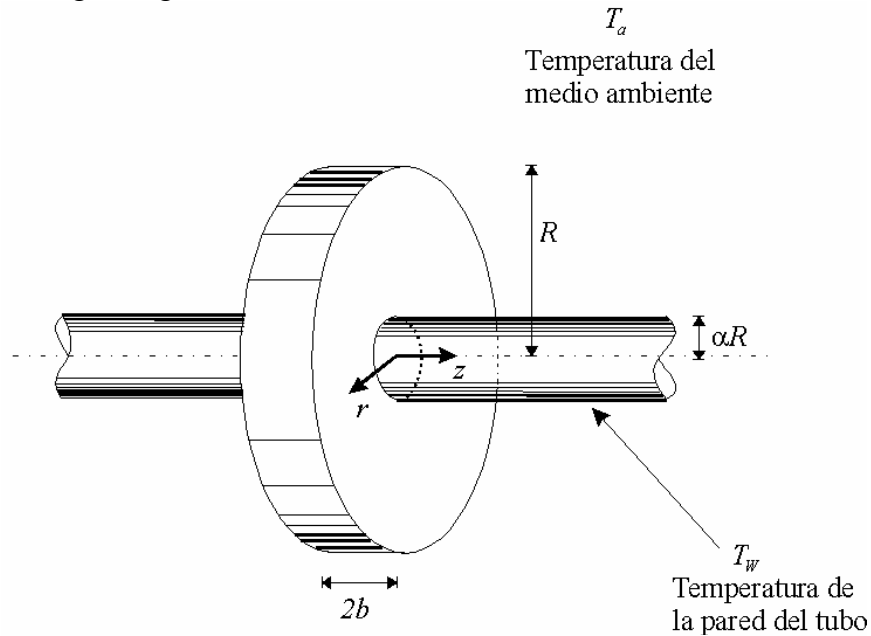
Las primeras seis raíces de $\alpha \tan(\alpha) = N_{Bi}$, son

N_{Bi}	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
0	0.0	3.1416	6.2832	9.4248	12.5664	15.7080
10^{-3}	0.0316	3.1419	6.2833	9.4249	12.5665	15.7080
10^{-2}	0.0998	3.1448	6.2848	9.4258	12.5672	15.7086
10^{-1}	0.3111	3.1731	6.2991	9.4354	12.5743	15.7143
1	0.8603	3.4256	6.4373	9.5293	12.6453	15.7713
10	1.4289	4.3058	7.2281	10.2003	13.2142	16.2594
10^2	1.5552	4.6658	7.7764	10.8871	13.9981	17.1093
∞	1.5708	4.7124	7.5840	10.9956	14.1372	17.2788

Proyecto 2

La aleta de enfriamiento cilíndrica

I. Resuelve el problema de transferencia de calor en una aleta de enfriamiento como la mostrada en la figura siguiente



El problema esta definido por la ecuación diferencial

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, \text{ en } \begin{cases} \alpha R < r < R \\ -b < z < +b \end{cases} \quad (1)$$

sujeta a las condiciones de frontera

$$\text{en } r = \alpha R, \quad T = T_w \quad (2)$$

$$\text{en } r = R, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad (3)$$

$$\text{en } z = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

$$\text{en } z = b, \quad -k \frac{\partial T}{\partial z} = h(T - T_a) \quad (5)$$

Observa que se ha usado en el planteamiento de las condiciones de frontera en z la simetría del campo alrededor de $z = 0$. Reporta el procedimiento para obtener la solución aproximada $\langle \theta \rangle$, y la solución exacta u obtenida por el método de separación de variables. También las fórmulas de temperatura promedio a partir de la solución exacta, $\langle u \rangle$, y las de la eficiencia de la aleta.

II. Escribe un programa de computadora para resolver, por el método de diferencias finitas, el problema anterior.

Debes entregar, junto con el listado y corridas ejemplificando el funcionamiento del programa, las figuras descritas abajo, acompañados de la discusión y resultados. La figuras deberán contener (a) u y u_{num} (para $z/b = 0, 0.5$ y 1) vs. r/R , y (b) $\langle u_{num} \rangle$, $\langle u \rangle$ y $\langle \theta \rangle$ vs. r/R . Además reportarás el factor de efectividad para cada una de los parámetros de las figuras.

Condiciones	$N_{Bi} = hb/k$	$R(1-\alpha)/b$
1	0.1	1.0
2	1.0	1.0
3	10.0	1.0
4	0.1	10.0
5	1.0	10.0
6	10.0	10.0

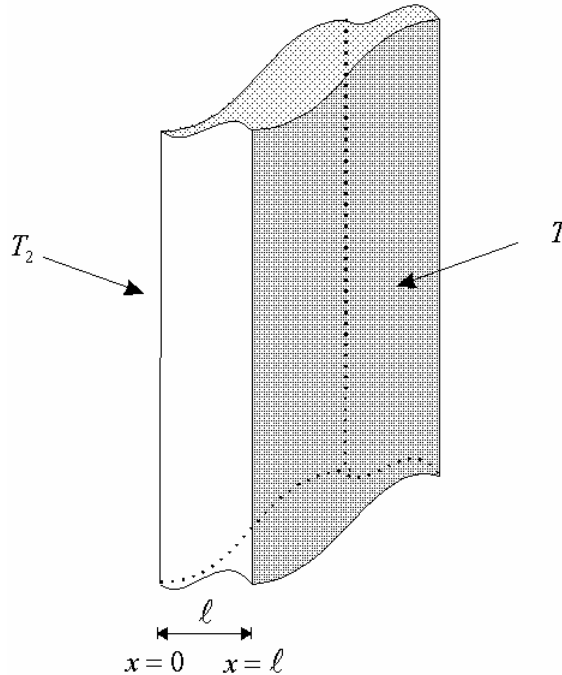
Es casi seguro que deberás utilizar al menos las primeras seis raíces de $\alpha \tan(\alpha) = N_{Bi}$, que son

N_{Bi}	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
0	0.0	3.1416	6.2832	9.4248	12.5664	15.7080
10^{-3}	0.0316	3.1419	6.2833	9.4249	12.5665	15.7080
10^{-2}	0.0998	3.1448	6.2848	9.4258	12.5672	15.7086
10^{-1}	0.3111	3.1731	6.2991	9.4354	12.5743	15.7143
1	0.8603	3.4256	6.4373	9.5293	12.6453	15.7713
10	1.4289	4.3058	7.2281	10.2003	13.2142	16.2594
10^2	1.5552	4.6658	7.7764	10.8871	13.9981	17.1093
∞	1.5708	4.7124	7.5840	10.9956	14.1372	17.2788

Proyecto 3

Transferencia de calor unidimensional transitoria en una placa

I. Resuelve el problema de conducción de calor en una región sólida como la mostrada en la figura siguiente



El problema esta definido por la ecuación diferencial

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad \text{en } 0 < x < \ell \quad (1)$$

sujeta a las condiciones de frontera e inicial

$$\text{en } t = 0, \quad T = T_i \quad (2)$$

$$\text{en } x = 0, \quad +k \frac{\partial T}{\partial x} = h_0(T - T_0) \quad (3)$$

$$\text{en } x = \ell, \quad -k \frac{\partial T}{\partial x} = h_\ell(T - T_\ell) \quad (4)$$

Las temperaturas T_0 y T_ℓ son funciones conocidas del tiempo. Resuelve el problema por el método de variación de parámetros. La solución debe obtenerse en términos de las siguientes variables adimensionales

$$u = \frac{T - T_0}{T_i - T_0} \quad X = \frac{x}{\ell} \quad \tau = t \frac{k}{\rho C_p \ell^2}$$

y de los parámetros

$$N_{Bi0} = \frac{h_0 \ell}{k} \quad N_{Bi\ell} = \frac{h_\ell \ell}{k}$$

Simplifica el resultado para cuando no hay flujo de calor en el extremo $x = 0$, y la resistencia interfacial desde el fluido exterior es despreciable en $x = \ell$.

II. Escribe un programa de computadora para resolver, por el método de diferencias finitas, el problema inicialmente planteado. Debes escribir el programa de tal forma que se pueda optar por el esquema implícito, explícito o el de Crank-Nicholson.

Debes entregar el listado del programa junto con las corridas que ejemplifiquen su funcionamiento.

III. Realiza las corridas siguientes hasta un tiempo tal que se alcance el estado estacionario

Corrida	N_{Bi0}	$N_{Bi\ell}$	T_ℓ / T_i
1	0	0	2
2	0	0.1	2
3	0	1	2
4	0	100	2

Reporta los resultados en forma gráfica de tal manera que se observe en la misma figura el cambio desde el tiempo inicial ($\tau = 0$) hasta alcanzar el estado estacionario.

Compara la solución analítica, encontrada en la parte I, con los resultados numéricos para los mismos tiempos utilizados en la figura anterior.

Una vez más deberás utilizar al menos las primeras seis raíces de $\alpha \tan(\alpha) = N_{Bi}$, que son

N_{Bi}	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
0	0.0	3.1416	6.2832	9.4248	12.5664	15.7080
10^{-3}	0.0316	3.1419	6.2833	9.4249	12.5665	15.7080
10^{-2}	0.0998	3.1448	6.2848	9.4258	12.5672	15.7086
10^{-1}	0.3111	3.1731	6.2991	9.4354	12.5743	15.7143
1	0.8603	3.4256	6.4373	9.5293	12.6453	15.7713
10	1.4289	4.3058	7.2281	10.2003	13.2142	16.2594
10^2	1.5552	4.6658	7.7764	10.8871	13.9981	17.1093
∞	1.5708	4.7124	7.5840	10.9956	14.1372	17.2788

Proyecto 4

Difusión y reacción en placas, cilindros y esferas con coeficientes de transporte y cinética no lineal

Escriba un programa de computación en FORTRAN para resolver el problema de valor en la frontera definido por la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi^\alpha} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^\alpha f(u) \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) - \phi^2 g(u), \quad \text{en } 0 < \xi < 1 \quad (1)$$

sujeta a las siguientes condiciones

$$\text{En } \xi = 1, \quad -\beta(u) \frac{\partial u}{\partial \xi} = \gamma(u)u - \sigma(u)u_\infty(\tau) \quad \text{para } \tau > 0 \quad (2)$$

$$\text{Cuando } \tau = 0, \quad u = 1 \quad \text{para } 0 \leq \xi \leq 1 \quad (3)$$

En la ecuación (1) α es 0 para coordenadas cartesianas, 1 para cilíndricas y 2 para esféricas. En la ecuación (2) $\beta(u)$, $\gamma(u)$, $\sigma(u)$ y $u_\infty(\tau)$ son funciones que deben especificarse

En el esquema numérico considere:

- el método de linearización de Ritchmeyer
- el método de inversión línea por línea
- las funciones $f(u)$, $g(u)$, $\beta(u)$, $\gamma(u)$, $\sigma(u)$ y $u_\infty(\tau)$ como expresiones generales.

Demuestra que el programa puede predecir el estado estacionario para los siguientes casos:

Caso	α	$f(u) = \beta(u)$	$g(u)$	$\gamma(u)$	ϕ^2	$\sigma(u)u_\infty$
1	0	u^2	u^3	0	0	0
2	0	u^2	u^3	0	1	10
3	1	u^2	u^3	0	1	10
4	2	u^2	u^3	0	1	10

Para esta comparación debes notar que los casos planteados tienen solución analítica en el estado estacionario.

Los resultados debes presentarlos en figuras u vs. ξ que muestren el desarrollo de los perfiles desde $\tau = 0$ hasta alcanzar el estado estacionario.

Debes presentar el listado del programa junto con las corridas que muestran el buen funcionamiento del programa. Discute los resultados presentados.

Apéndices

- Apéndice A Resumen de fórmulas para sistemas de coordenadas curvilíneas
- Apéndice B Fórmulas para sistemas de coordenadas cilíndricas y esféricas
- Apéndice C Solución de la ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden
- Apéndice D Deducción de la Regla de Leibnitz

Apéndice A

Resumen de fórmulas sobre sistemas de coordenadas curvilíneas

Para las coordenadas curvilíneas dadas por las expresiones

$$u^1 = f_1(x_1, x_2, x_3), \quad u^2 = f_2(x_1, x_2, x_3), \quad u^3 = f_3(x_1, x_2, x_3) \quad (\text{A.1})$$

con funciones inversas del tipo

$$x_1 = \phi_1(u^1, u^2, u^3), \quad x_2 = \phi_2(u^1, u^2, u^3), \quad x_3 = \phi_3(u^1, u^2, u^3) \quad (\text{A.2})$$

De estas se obtienen las bases vectoriales

$$\mathbf{a}_i = \frac{\partial x_j}{\partial u^i} \mathbf{e}_j \quad (\text{A.3})$$

El diferencial de área en la superficie en donde $\mathbf{a}_j$ y $\mathbf{a}_k$ son tangenciales esta dado por

$$dA_i = [g_{jj} g_{kk} - (g_{kj})^2]^{1/2} du^j du^k \quad (\text{A.4})$$

en donde $i \neq j$ y $j \neq k$. En la fórmula (A.4) g_{kj} son los coeficientes métricos dados por

$$g_{ki} = \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_i \quad (\text{A.5})$$

El diferencial de volumen esta dado por

$$\text{ó} \quad dV = J du^1 du^2 du^3 \quad (\text{A.6})$$

en donde J es el Jacobiano, que se obtiene de la raíz cuadrada del determinante de la matriz de coeficientes métricos siguiente

$$g = \det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Si las bases del sistema coordenado curvilíneo son ortogonales las fórmulas para los diferenciales de área y el diferencial de volumen se simplifican a

$$dA_i = h_j h_k du^j du^k \quad (\text{A.8})$$

En donde $i \neq j, k$, y no hay sumatorias sobre los índices.

$$\text{y} \quad dV = h_1 h_2 h_3 du^1 du^2 du^3 \quad (\text{A.9})$$

Los factores de escala están relacionados a los coeficientes métricos por

$$g^{kj} = \mathbf{a}^k \cdot \mathbf{a}^j \quad (\text{A.10})$$

Operadores diferenciales para sistemas coordenados curvilíneos ortogonales

Gradiente

$$\nabla \varphi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial u^1} \hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial u^2} \hat{\mathbf{e}}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial u^3} \hat{\mathbf{e}}_3 \quad (\text{A.11})$$

Divergencia

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u^1} (F^1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial u^2} (F^2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial u^3} (F^3 h_1 h_2) \right] \quad (\text{A.12})$$

Laplaciano

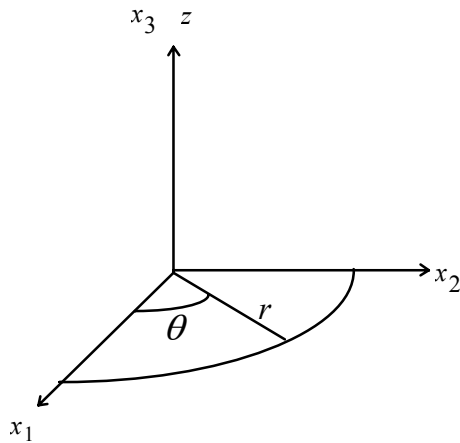
$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial u^1} \right) + \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial u^2} \right) + \frac{\partial}{\partial u^3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial u^3} \right) \right] \quad (\text{A.13})$$

en donde h_1 , h_2 y h_3 son los factores de escala relacionados a los coeficientes métricos por

$$h_i = \sqrt{g_{ii}} \quad \text{sin sumatoria} \quad (\text{A.14})$$

Apéndice B

Sistema de coordenadas cilíndricas



Las ecuaciones para las superficies coordenadas curvilíneas son

$$u^1 = r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

$$u^2 = \theta = \tan^{-1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$$

$$u^3 = z = x_3$$

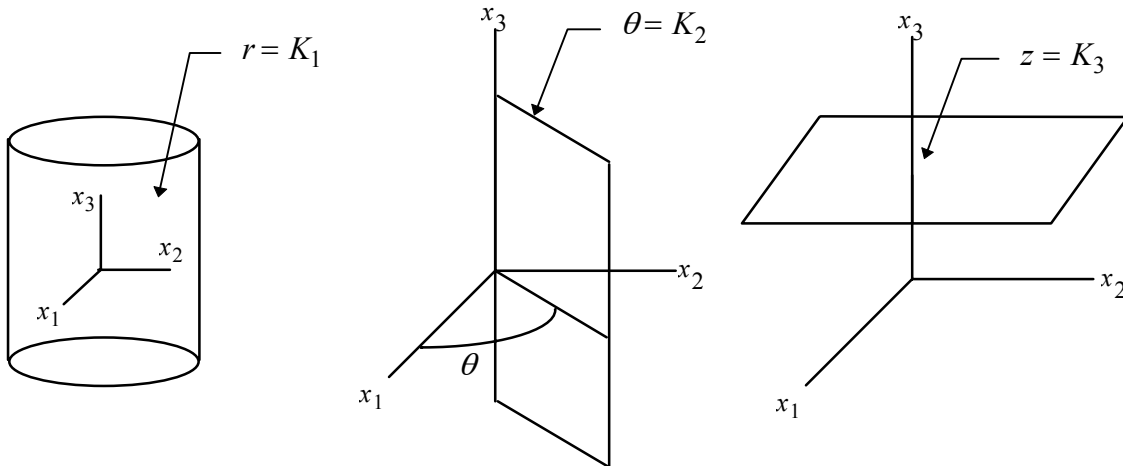
Con funciones inversas

$$x_1 = r \cos \theta = u^1 \cos u^2$$

$$x_2 = r \sin \theta = u^1 \sin u^2$$

$$x_3 = z = u^3$$

Estas superficies coordenadas curvilíneas se muestran esquemáticamente a continuación:



$$u^1 = r$$

$$r \geq 0$$

$$u^2 = \theta$$

$$0 \leq \theta < 2\pi$$

$$u^3 = z$$

$$-\infty < z < +\infty$$

Factores de escala

$$h_1 = 1 \quad h_2 = r \quad h_3 = 1$$

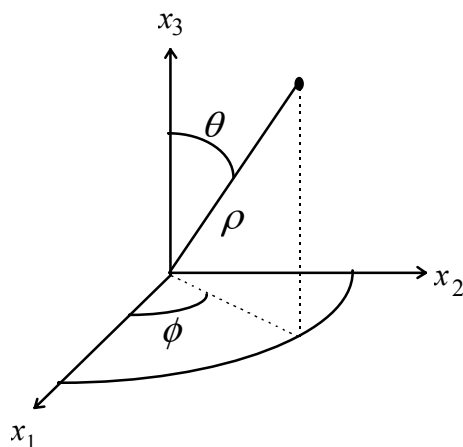
Vectores unitarios en términos de los vectores **i**, **j** y **k**

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{e}}_r = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{e}}_\theta = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_z = \mathbf{k}$$

Sistema de coordenadas esféricas



Las ecuaciones para las superficies coordenadas curvilíneas son

$$u^1 = \rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$$u^2 = \theta = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_3} \right)$$

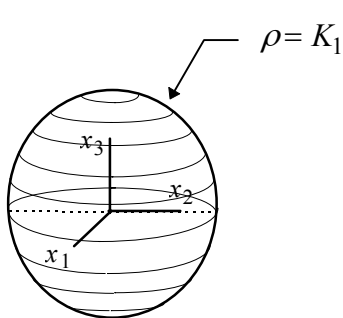
$$u^3 = \phi = \tan^{-1} \left(\frac{x_2}{x_1} \right)$$

Con funciones inversas

$$x_1 = \rho \sin \theta \cos \phi = u^1 \operatorname{senu}^2 \cos u^3$$

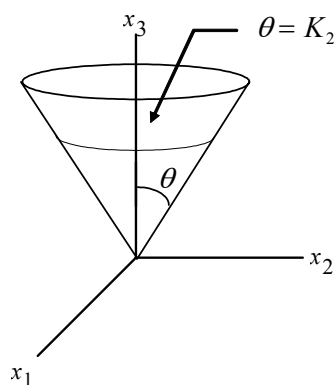
$$x_2 = \rho \sin \theta \sin \phi = u^1 \operatorname{senu}^2 \operatorname{senu}^3$$

$$x_3 = \rho \cos \theta = u^1 \cos u^2$$



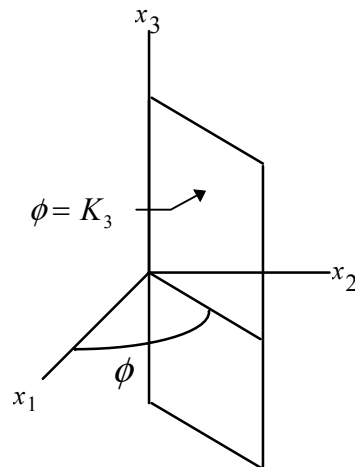
$$u^1 = \rho$$

$$\rho \geq 0$$



$$u^2 = \theta$$

$$0 \leq \theta < \pi$$



$$u^3 = \phi$$

$$0 \leq \phi < 2\pi$$

Factores de escala

$$h_1 = 1 \quad h_2 = r \quad h_3 = r \sin \theta$$

Vectores unitarios en términos de los vectores **i**, **j** y **k**

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{e}}_r = \text{sen } \theta \cos \phi \, \mathbf{i} + \text{sen } \theta \text{sen } \phi \, \mathbf{j} + \cos \theta \, \mathbf{k}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{e}}_\theta = \cos \theta \cos \phi \, \mathbf{i} + \cos \theta \text{sen } \phi \, \mathbf{j} - \text{sen } \theta \, \mathbf{k}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_\phi = -\text{sen } \phi \, \mathbf{i} + \cos \phi \, \mathbf{j}$$

Apéndice C

Solución de la ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden

Un método para resolver una ecuación diferencial ordinaria de primer orden de la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad (D.1)$$

es buscar una función $\mu(x)$, tal que la ecuación (D.1) pueda escribirse en la forma

$$\frac{d}{dx}(\mu y) = \mu Q \quad (D.2)$$

Si esta manera de escribir la ecuación existe, entonces (D.2) puede ser integrada para encontrar

$$\int_{y=\mu_0 y_0}^{y=\mu y} dy = \int_{\zeta=x_0}^{\zeta=x} \mu(\zeta) Q(\zeta) d\zeta \quad (D.3)$$

$$\text{ó} \quad \mu(x)y(x) - \mu_0 y_0 = \int_{\zeta=x_0}^{\zeta=x} \mu(\zeta) Q(\zeta) d\zeta \quad (D.4)$$

De la cual se puede despejar la solución de la ecuación (D.1)

$$y(x) = \mu^{-1}(x) \left[\mu_0 y_0 + \int_{\zeta=x_0}^{\zeta=x} \mu(\zeta) Q(\zeta) d\zeta \right] \quad (D.5)$$

Para encontrar la función $\mu(x)$, se obtiene de (D.2) el siguiente resultado

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dx} y = Q \quad (D.6)$$

De la comparación de (D.1) y (D.6) se concluye que

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dx} = P(x) \quad (D.7)$$

Después de reorganizar esta última ecuación e integrar se obtiene

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int P(x) dx \quad (D.8)$$

La evaluación del miembro izquierdo da como resultado

$$\ln[\mu(x)] = \int P(x) dx$$

de la cual se puede obtener $\mu(x)$ como

$$\mu(x) = \exp \left[\int P(x) dx \right] \quad (\text{D.9})$$

La substitución de este resultado en la ecuación (D.5) da

$$y(x) = \exp \left[- \int P(x) dx \right] \left\{ y_o + \int_{\zeta=x_o}^{\zeta=x} Q(\zeta) \exp \left[\int P(\zeta) d\zeta \right] \right\} \quad (\text{D.10})$$

Apéndice D

Deducción de la regla de Leibnitz

En este apéndice se presenta la deducción de la regla de Leibnitz, esta fórmula es un procedimiento para obtener la derivada de una integral. Hay muchas versiones, y cada una depende de la forma del problema, aquí se revisará solo la forma más sencilla. Se considerará la integral $I(x)$, definida por

$$I(x) = \int_{y=a(x)}^{y=b(x)} f(x, y) dy \quad (\text{E.1})$$

Es muy importante notar que la integral $I(x)$ depende de la variable independiente a través de la dependencia funcional $f(x, y)$, además de la dependencia debido a los límites de integración.

Se desea encontrar la derivada de $I(x)$, o sea

$$\frac{dI}{dx} = \frac{d}{dx} \int_{y=a(x)}^{y=b(x)} f(x, y) dy \quad (\text{E.2})$$

Para encontrar una forma más adecuada se introduce la definición de derivada para expresar (E.2) como

$$\frac{dI}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_{y=a(x+\Delta x)}^{y=b(x+\Delta x)} f(x+\Delta x, y) dy - \int_{y=a(x)}^{y=b(x)} f(x, y) dy}{\Delta x} \quad (\text{E.3})$$

La primera de las integrales en (E.3) se representa como

$$\int_{y=a(x+\Delta x)}^{y=b(x+\Delta x)} f(x+\Delta x, y) dy = \int_{y=a(x+\Delta x)}^{y=a(x)} f(x+\Delta x, y) dy$$

$$+ \int_{y=a(x)}^{y=b(x)} f(x + \Delta x, y) dy + \int_{y=b(x)}^{y=b(x+\Delta x)} f(x + \Delta x, y) dy \quad (E.4)$$

La substitución de la ecuación (E.4) en la (E.3) da como resultado

$$\frac{dI}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_{y=a(x)}^{y=b(x)} [f(x + \Delta x, y) - f(x, y)] dy + \int_{y=b(x)}^{y=b(x+\Delta x)} f(x + \Delta x, y) dy - \int_{y=a(x)}^{y=a(x+\Delta x)} f(x + \Delta x, y) dy}{\Delta x} \quad (E.5)$$

Aquí se debe notar que los límites de integración de la primera integral en (E.5) son independientes de x por lo tanto es posible escribir

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dx} = & \int_{y=a(x)}^{y=b(x)} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \right] dy \\ & + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_{y=b(x)}^{y=b(x+\Delta x)} f(x + \Delta x, y) dy - \int_{y=a(x)}^{y=a(x+\Delta x)} f(x + \Delta x, y) dy}{\Delta x} \end{aligned} \quad (E.6)$$

El primer término en el miembro derecho de la ecuación (E.6) puede simplificarse al introducirse la definición de derivada parcial (nótese, en el límite y permanece constante).

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dx} = & \int_{y=a(x)}^{y=b(x)} \frac{\partial f}{\partial x} dy \\ & + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_{y=b(x)}^{y=b(x+\Delta x)} f(x + \Delta x, y) dy - \int_{y=a(x)}^{y=a(x+\Delta x)} f(x + \Delta x, y) dy}{\Delta x} \end{aligned} \quad (E.7)$$

Ahora las integrales dentro del límite pueden ser evaluadas usando el teorema del valor medio, para encontrar

$$\int_{y=b(x)}^{y=b(x+\Delta x)} f(x+\Delta x, y) dy = f[x+\Delta x, b(x+\xi)] \cdot [b(x+\Delta x) - b(x)] \quad (\text{E.8})$$

$$\int_{y=a(x)}^{y=a(x+\Delta x)} f(x+\Delta x, y) dy = f[x+\Delta x, a(x+\zeta)] \cdot [a(x+\Delta x) - a(x)] \quad (\text{E.9})$$

En las fórmulas (E.8) y (E.9) los parámetros y están acotados de tal forma que

$$0 \leq \xi \leq \Delta x \quad 0 \leq \zeta \leq \Delta x \quad (\text{E.10})$$

Ahora es necesario tomar el límite de (E.8) y (E.9) para $\Delta x \rightarrow 0$, y así obtener formas útiles a emplearse en la ecuación (E.7).

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_{y=b(x)}^{y=b(x+\Delta x)} f(x+\Delta x, y) dy}{\Delta x} &= \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f[x+\Delta x, b(x+\xi)] \cdot [b(x+\Delta x) - b(x)]}{\Delta x} \right\} &= \\ = f(x, b) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{b(x+\Delta x) - b(x)}{\Delta x} \right\} &= \\ = f(x, b) \frac{db}{dx} \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

y de la misma forma

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_{y=a(x)}^{y=a(x+\Delta x)} f(x+\Delta x, y) dy}{\Delta x} = f(x, a) \frac{da}{dx} \quad (\text{E.12})$$

La substitución de (E.11) y (E.12) en (E.7) da como resultado

$$\frac{dI}{dx} = \int_{y=a(x)}^{y=b(x)} \frac{\partial f}{\partial x} dy + f(x, b) \frac{db}{dx} - f(x, a) \frac{da}{dx} \quad (\text{E.13})$$

Esta expresión es una versión de la Regla de Leibnitz. Recuerdese que

$$I(x) = \int_{y=a(x)}^{y=b(x)} f(x, y) dy \quad (\text{E.14})$$

Si los límites de integración son independientes de x , la ecuación (E.1) toma la forma

$$I(x) = \int_{y=a}^{y=b} f(x, y) dy \quad (\text{E.15})$$

y la Regla de Leibnitz para este caso especial se reduce a

$$\frac{d I}{d x} = \int_{y=a}^{y=b} \frac{\partial f}{\partial x} dy \quad (\text{E.16})$$

En el análisis de problemas de conducción de calor en estado estacionario se pueden encontrar integrales de la forma

$$I(t) = \int_{y=0}^{y=t} f(y) dy \quad (\text{E.17})$$

Con la regla de Leibnitz se obtiene

$$\frac{d I}{d t} = \int_{y=0}^{y=t} \frac{\partial f}{\partial t} dy + f(t) \frac{d(t)}{d t} - f(0) \frac{d(0)}{d t}$$

Por lo que

$$\frac{d I}{d t} = f(t) \quad (\text{E.18})$$

Esto porque f no depende de t , y así $\frac{d f}{d t} = 0$.