

Capítulo 9 Conducción de calor en estado transitorio

En las secciones anterior se trató con sistemas en estado estacionario, es decir, sistemas estables que no están afectados por el tiempo. En esta sección se abordarán alguno de los métodos más representativos para resolver problemas en estado transitorio. El método de la resistencia térmica despreciable el cual establece que la distribución de temperaturas a través del sólido es despreciable, siendo el tiempo la única variable que afecta el sistema. El método de sólido infinito en donde se establece que el sólido es infinito con una superficie identificable, en donde la temperatura lejos de esta superficie se establece como la temperatura del sólido inicial. Finalmente, el método de un sólido con conducción transitoria en donde se establecerán las soluciones analíticas o exactas y aproximadas de los tres sistemas geométricos simples (pared plana, cilindro y esfera).

9.1 Método de la resistencia interna despreciable

En este método se por tanto, solo la transferencia de calor por convección es el único fenómeno que permite la disminución de la temperatura en un sólido.

Para establecer las ecuaciones, considere una pieza metálica caliente de temperatura inicial T_i , la cual se temple al sumergirla en un fluido de temperatura T_∞ , donde $T_i > T_\infty$ (**Figura 9.1**). Una vez que comienza el templado en $t = 0$, la temperatura en la pieza comienza a disminuir en $t > 0$, de tal manera que la transferencia de calor se da únicamente por convección en la interfaz sólido-líquido.

Por consiguiente, suponer que “la temperatura del sólido es espacialmente uniforme en cualquier instante durante el proceso transitorio”, esto significa ausencia de gradiente de temperaturas en el sólido, con lo cual de acuerdo con la Ley de Fourier esto implica la existencia de una conductividad térmica infinita. Es decir, cuando un sólido presenta una elevada conductividad térmica, los gradientes de temperaturas en el sólido son muy pequeños o en algunos casos despreciables, con lo cual la transferencia de calor por conducción es despreciable.

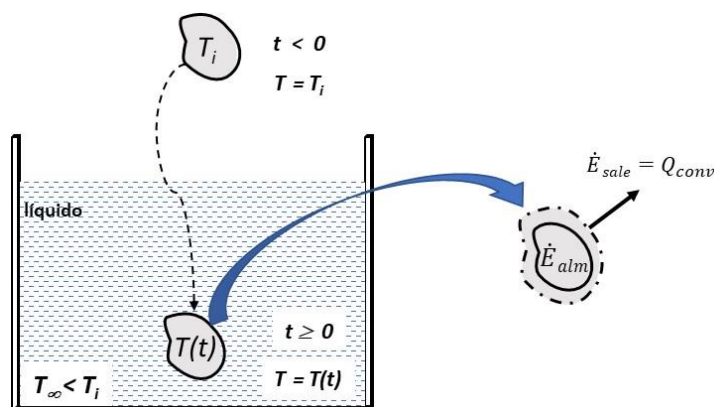


Figura 9.1 Pieza metálica caliente sumergida en un fluido frío.

Aplicando un balance global de energía a la pieza de metal mostrada en la **Figura 9.1**, de la siguiente manera:

$$\dot{E}_{ent} + \dot{E}_g - \dot{E}_{sale} = \frac{dE_{alm}}{dt} = \dot{E}_{alm} \quad (Ec. 9.1)$$

Si, la $\dot{E}_{ent} = 0$ (no hay transferencia de calor del fluido al sólido) y $\dot{E}_g = 0$ (no hay generación de calor), la Ec. 9.1 se reduce a:

$$-\dot{E}_{sale} = \dot{E}_{alm}$$

Es decir,

$$-hA_s(T(t) - T_\infty) = \rho Vc \frac{dT}{dt} \quad (Ec. 9.2)$$

donde, ρVc son propiedades del sólido y A_s es el área superficial a través de la cual se transfiere el calor por convección. Las propiedades termofísicas deberán obtenerse a la temperatura de película (T_f), la cual se determina como:

$$T_f = \frac{T_i + T_\infty}{2} \quad (Ec. 9.3)$$

Al introducir la diferencia de temperaturas en un determinado tiempo, como sigue:

$$\theta(t) = T(t) - T_\infty \quad (Ec. 9.4)$$

Y derivando la ecuación anterior con respecto a t , se obtiene:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\theta}{dt}\right) &= \left(\frac{dT}{dt}\right) - \left(\frac{dT_\infty}{dt}\right) \\ \left(\frac{d\theta}{dt}\right) &= \left(\frac{dT}{dt}\right) \end{aligned} \quad (Ec. 9.5)$$

Por tanto, al sustituir la Ec. 9.4 y 9.5, en la Ec. 9.2, se obtiene:

$$-\theta(t) = \frac{\rho Vc}{hA_s} \frac{d\theta}{dt} \quad (Ec. 9.6)$$

donde, en $t = 0$, el exceso de temperatura inicial es:

$$\theta_i = T_i - T_\infty \quad (\text{Ec. 9.7})$$

Al separar las derivadas en la Ec. 9.6, integrarla y evaluarlas desde θ_i hasta $\theta(t)$ se obtiene:

$$\frac{\rho V c}{h A_s} \int_{\theta_i}^{\theta} \frac{d\theta}{\theta} = - \int_0^t dt$$

$$\frac{\rho V c}{h A_s} \ln \frac{\theta_i}{\theta} = t \quad (\text{Ec. 9.8})$$

o,

$$\frac{\theta(t)}{\theta_i} = \frac{T(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \exp \left[- \left(\frac{h A_s}{\rho V c} \right) t \right] \quad (\text{Ec. 9.9})$$

Por lo tanto, la Ec. 9.8 permite determinar el tiempo que requiere el sólido para alcanzar alguna temperatura en la superficie del sólido ($T(t)$), ó a la inversa, para calcular la temperatura que alcanza el sólido en algún tiempo t (Ec. 9.9).

También, en la Ec. 9.9, la cantidad $\frac{h A_s}{\rho V c}$ se interpreta como una *constante térmica de tiempo*, que se expresa como:

$$\tau_t = \left(\frac{1}{h A_s} \right) (\rho V c) = R_t C_t \quad (\text{Ec. 9.10})$$

donde, R_t es la resistencia a la transferencia de calor por convección, y C_t es la resistencia interna despreciable del sólido. Un aumento en R_t o C_t , significa que el sólido se enfriará mas lentamente y por tanto el tiempo que se requiere para alcanzar el equilibrio térmico ($\theta = 0$) se verá incrementado, como se puede observar en la **Figura 9.2** (Incropera, 2006)

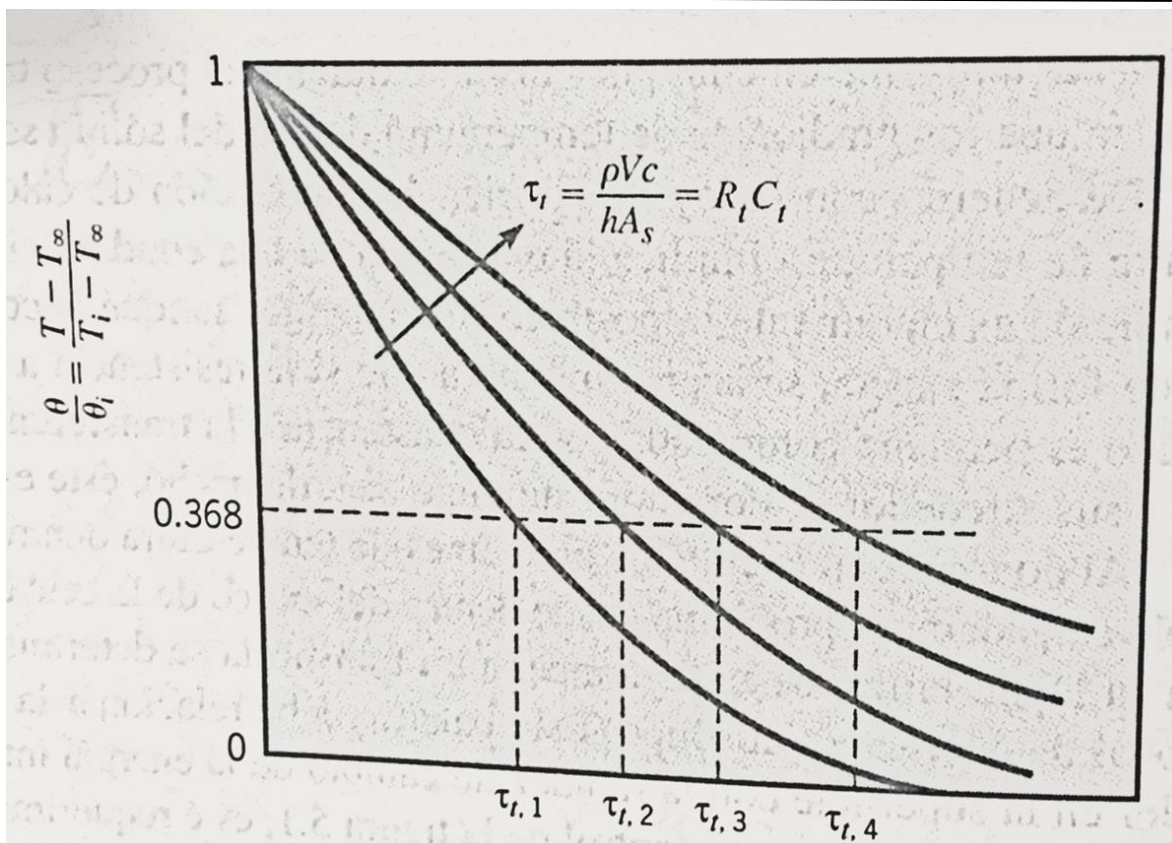


Figura 9.2 Diferencia entre las temperaturas del sólido y el fluido en función de la constante térmica de tiempo.

Mientras, la transferencia total de energía $\dot{Q}_t$, en un intervalo de tiempo, se determina como:

$$\dot{Q}_t = \int_0^t A_s \dot{q} dt = h A_s \int_0^t \theta(t) dt \quad (\text{Ec. 9.11})$$

Que al despejar $\theta(t)$ de la Ec. 9.9, y sustituirla en la Ec. 9.11, se obtiene:

$$\dot{Q}_t = \int_0^t A_s \dot{q} dt = h A_s \int_0^t \left[\exp \left[- \left(\frac{h A_s}{\rho V c} \right) t \right] \theta_i \right] dt$$

Al integrarla, resulta en:

$$\dot{Q}_t = (\rho V c) \theta_t \left[1 - \exp \left(\frac{t}{\tau_t} \right) \right] \quad (\text{Ec. 9.12})$$

donde, θ_t es el exceso de temperatura en un determinado tiempo.

$$\theta_t = T(t) - T_{\infty} \quad (Ec. 9.13)$$

Otro punto que debemos considerar en el uso de la Ec. 9.9 es su validez, ya que no es válida para cualquier caso de conducción transitoria. Para ello, considere la conducción de calor en estado estable en una pared plana de área superficial A , este criterio se extiende fácilmente a los procesos transitorios, (**Figura 9.3**). En la Figura 9.3, la temperatura en la superficie $x = 0$ se mantiene constante, $T_{s,1}$, y la temperatura en $x = L$, $T_{s,2} < T_{s,1}$, que se expone a un fluido de temperatura T_{∞} siendo menor a $T_{s,1}$, y coeficiente de transferencia de calor h .

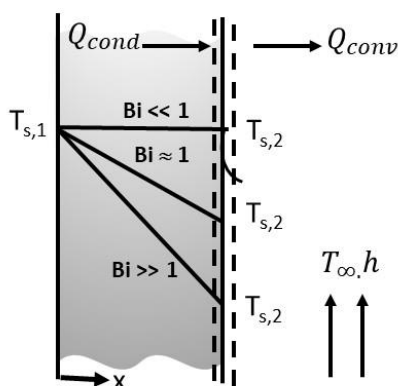


Figura 9.3 Conducción de calor en estado estable en una pared plana de área superficial A a diferentes números de Biot.

En condiciones estacionarias, el balance de energía en la superficie $x = L$ se reduce a:

$$\dot{Q}_{cond} = \dot{Q}_{conv}$$

es decir,

$$\frac{kA}{L}(T_{s,1} - T_{s,2}) = hA(T_{s,2} - T_{\infty})$$

donde k es la conductividad térmica del sólido, que al reacomodar se obtiene:

$$\frac{(T_{s,1} - T_{s,2})}{(T_{s,2} - T_{\infty})} = \frac{\frac{L}{kA}}{1/hA} = \frac{R_{cond}}{R_{conv}} = \frac{hL}{k} \equiv Bi \quad (Ec. 9.14)$$

donde, Bi es el número de Biot y k es la conductividad térmica del material. El número de Biot es un grupo adimensional que proporciona una medida de la caída de temperatura en el sólido en relación con la diferencia de temperatura entre la superficie y el fluido, además también se puede interpretar como una razón de la resistencia térmica por conducción a la transferencia de calor por convección.

Si el número de $Bi \ll 1$, la resistencia térmica a la conducción de calor dentro del sólido es mucho menor a la resistencia térmica a la convección en la capa límite del fluido, por lo tanto, es razonable suponer que la distribución de temperaturas es uniforme a través del sólido, por tanto el gradiente de temperaturas es pequeño, como se muestra en la **Figura 9.3**.

Para números de Bi mayores, los gradientes de temperaturas a través del sólido son mucho más grande por tanto la resistencia a la conducción es más grande que la resistencia a la convección en la capa límite del fluido.

Por tanto, el método de la resistencia despreciable puede ser utilizado, si la siguiente condición se satisface:

$$Bi = \frac{hL_c}{k} < 0.1 \quad (Ec. 9.15)$$

donde, L_c es la longitud característica, que se define como:

$$L_c = \frac{V}{A_s} \quad (Ec. 9.16)$$

donde, V es el volumen del sólido y A_s es el área a través de la cual se transfiere en calor.

En configuraciones geométricas simples, la L_c se determina de la siguiente manera:

Pared plana: $L_c = L/2$ (para una pared plana $2L$)

Cilindro: $L_c = r_0/2$ (r_0 es el radio externo)

Esfera: $L_c = r_0/3$ (r_0 es el radio externo)

Al sustituir L_c en el exponente de la Ec. 9.9, se obtiene lo siguiente:

$$\frac{hA_s t}{\rho V c} = \frac{ht}{\rho c L_c} \frac{L_c k}{k} = \frac{hL_c}{k} \frac{k}{\rho c} \frac{t}{L_c^2} = \frac{hL_c}{k} \frac{\alpha t}{L_c^2} = Bi * Fo \quad (Ec. 9.17)$$

donde, Fo es el número de Fourier, el cual se define como un tiempo sin dimensión que junto con el número de Biot caracteriza los problemas de conducción transitoria.

$$Fo = \frac{\alpha t}{L_c^2} \quad (Ec. 9.18)$$

Al sustituir la Ec. 9.17 en la Ec. 9.9, obtenemos:

$$\frac{\theta(t)}{\theta_i} = \frac{T(t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = \exp[-Bi * Fo] \quad (Ec. 9.19)$$

En la **Figura 9.4** se observa el registro de la evolución del tiempo vs la temperatura en un cuerpo de temperatura inicial T_0 (o T_i) y expuesto a un fluido de temperatura T_{∞} .

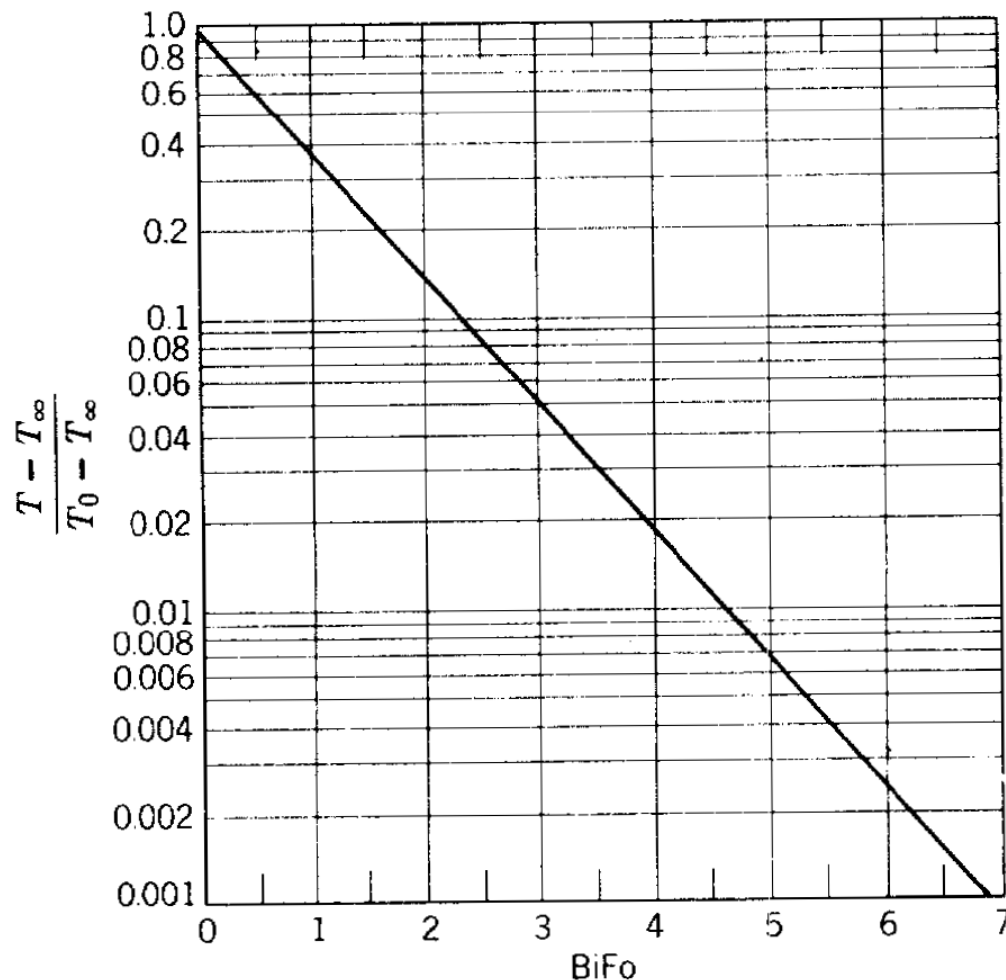


Figura 9.4 Histórico de la evolución tiempo vs temperatura en un cuerpo de temperatura inicial T_0 y expuesto a un entorno de temperatura T_{∞} .

9.2 Sólidos semi-infinitos

Un sólido semi-infinito es aquel que se define como un sólido que se extiende hasta el infinito en todas sus direcciones, excepto una, que le denominaremos superficie identificable, como se muestra en la **Figura 9.5**. En esta superficie al imponer un cambio súbito de condiciones ocurrirá una conducción unidimensional dentro del sólido.

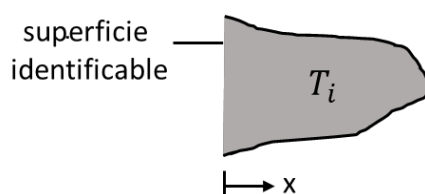


Figura 9.5 Sólido semi-infinito con superficie identificable.

Este método de sólido semi-infinito es un método útil para la resolución de problemas prácticos, se aprovecha para aproximar la respuesta transitoria de un sólido finito, como una pared gruesa, en la cual las temperaturas en la pared (a bastante distancia de la superficie) no son afectadas por el cambio en las condiciones de la superficie.

Si consideramos una pared plana como un sólido semi-infinito con una superficie identificable en $x = 0$, como se muestra en la **Figura 9.5**. De tal manera como lo analizamos previamente, la ecuación que rige este sistema en estado transitorio con conducción de calor unidimensional en x y conductividad térmica constante, como sigue:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{Ec. 4.14})$$

Para darle solución a la ecuación parcial de segundo orden, homogénea y de parámetros constantes es necesario establecer dos condiciones de frontera y una condición inicial, que se establecen como sigue:

Condición inicial (C.I):

$$\text{en } t \leq 0 \quad T = T_i \quad \text{para toda } x \quad (\text{Ec. 9.20})$$

Condiciones de frontera (C.F.):

C.F.1.:

Para establecer esta condición dependerá de las condiciones específicas presentes en la superficie identificable, $x = 0$, de las cuales hablaremos más adelante.

C.F.2

$$\text{en } x = \infty \quad T = T_i \quad \text{para toda } t > 0 \quad (\text{Ec. 9.21})$$

Esta condición de frontera establece que la temperatura de la superficie alejada de la superficie identificable es igual a la temperatura inicial, T_i .

Regresando a la C.F.1, como se mencionó previamente para establecer esta condición de frontera dependerá de las condiciones específicas presentes en $x = 0$, con lo cual definiremos tres casos: *caso 1*: aplicación de una temperatura específica constante y uniforme, *caso 2*: aplicación de un flujo de calor superficial constante, y *caso 3*: aplicación en la superficie de un fluido caracterizado por $T_\infty \neq T_i$ y coeficiente de transferencia de calor por convección h , como se muestra en la **Figura 9.6**. Dependiendo de las condiciones aplicadas en la superficie identificable mencionadas previamente, la C.F.1 se establecen de distinta manera como sigue:

Caso 1:

$$\text{C.F.1:} \quad \text{en } x = 0; \quad T(0, t) = T_s \quad (\text{Ec. 9.22})$$

Caso 2:

$$\text{C.F.1:} \quad \text{en } x = 0; \quad -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \dot{q}_0 \quad (\text{Ec. 9.23})$$

Caso 3:

$$\text{C.F.1:} \quad \text{en } x = 0; \quad -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = h[T_\infty - T(0, t)] \quad (\text{Ec. 9.24})$$

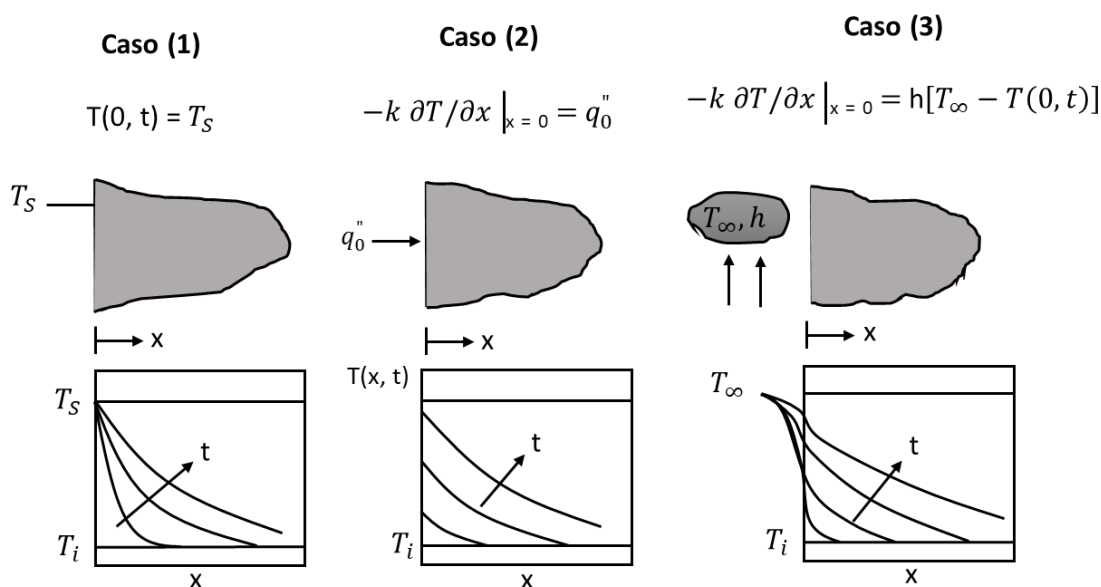


Figura 9.6 Caso (1): Aplicación de una temperatura superficial constante $T_s \neq T_i$, Caso (2): aplicación de un flujo de calor superficial constante, $\dot{q}_0$, y Caso (3): exposición de la superficie a un fluido caracterizado por $T_\infty \neq T_i$ y el coeficiente de convección h .

Como ejemplo, resolveremos la ecuación para el *caso 1* considerando una pared plana con temperatura inicial T_i y temperatura superficial constante T_s como sigue:

Condición inicial (C.I.) : en $t \leq 0$; $T = T_i$ para toda x

C.F.1:

en $x = 0$; $T = T_s$ para toda $t > 0$

C.F.2:

en $x = \infty$; $T = T_i$ para toda $t > 0$

Partiremos primero introduciendo una diferencia de temperatura adimensional, definido como:

$$\theta = \frac{T(x, t) - T_i}{T_s - T_i} \quad (\text{Ec. 9.25})$$

De modo que, al derivar dos veces la Ec. 9.24 con respecto a x y una vez con respecto al tiempo, y sustituyendo en la Ec.4.14, esta se convierte en:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (\text{Ec. 9.26})$$

Por tanto, las condiciones de frontera y condición inicial para darle solución a la Ec. 9.26, se establecerán de la siguiente manera:

Condición inicial (C.I.) : en $t \leq 0$ $\theta = 0$ para toda x

C.F.1: en $x = 0$ $\theta = 1$ para toda $t > 0$

C.F.2: en $x = \infty$ $\theta = 0$ para toda $t > 0$

La Ec. 9.25 se resolverá mediante el método de combinación de variables, por tanto, la solución a esta ecuación debe ser de la forma:

$$\theta = \theta(x, t; \alpha) \quad (\text{Ec. 9.27})$$

Sin embargo, ya que θ es una función adimensional, las cantidades x , t y α siempre deben aparecer en una combinación adimensional. Las únicas combinaciones adimensionales de estas tres cantidades son $\frac{x}{\sqrt{\alpha t}}$ o potencias o múltiplos de esto. Por tanto, se puede concluir que:

$$\theta = \theta(\eta),$$

donde,

$$\eta = \frac{x}{(4\alpha t)^{1/2}} \quad (\text{Ec. 9.28})$$

Para convertir la Ec. 9.25 en términos de la “variable combinada”, η , es necesario derivar la Ec. 9.27 con respecto a x (dos veces) y con respecto al tiempo (una vez), como sigue:

Si,

$$\eta = x/(4\alpha t)^{1/2}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{(4\alpha t)^{1/2}}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{d\theta}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{(4\alpha t)^{1/2}} \frac{d\theta}{d\eta}$$

Segunda derivada de θ con respecto a x :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{d}{d\eta} \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} \right] \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{d}{d\eta} \left[\frac{1}{(4\alpha t)^{1/2}} \frac{d\theta}{d\eta} \right] \left[\frac{1}{(4\alpha t)^{1/2}} \right] = \frac{1}{4\alpha t} \frac{d^2 \theta}{d\eta^2} \quad (\text{Ec. 9.29})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{d\theta}{d\eta}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{x}{(4\alpha t)^{1/2}} \right] = \frac{\partial}{\partial t} [x(4\alpha t)^{-1/2}] = (4^{-1/2})(\alpha^{-1/2})(x) \left(-\frac{1}{2} t^{-3/2} \right)$$

$$\frac{\partial t^{-1/2}}{\partial t} = -\frac{1}{2} t^{-3/2}$$

Primera derivada de θ con respecto al tiempo, t :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{d\theta}{d\eta} = -\frac{x}{2t(4\alpha t)^{1/2}} \frac{d\theta}{d\eta} \quad (\text{Ec. 9.30})$$

Sustituyendo la Ec. 9.28 y 9.29, en la Ec. 9.25, se obtiene:

$$\frac{d^2 \theta}{d\eta^2} \frac{1}{4\alpha t} = \frac{1}{\alpha} \left[-\frac{x}{2t(4\alpha t)^{1/2}} \frac{d\theta}{d\eta} \right]$$

$$\frac{d^2 \theta}{d\eta^2} = \frac{1}{\alpha} \left[-\frac{x}{2t(4\alpha t)^{1/2}} \frac{d\theta}{d\eta} \right] 4\alpha t$$

$$\frac{d^2 \theta}{d\eta^2} = -2\eta \frac{d\theta}{d\eta} \quad (\text{Ec. 9.31})$$

Note que la ecuación anterior solo está en función de la variable combinada, por ello, la Ec. 9.30 se resolverá como una derivada ordinaria. Por tanto, para darle solución a la Ec.9.31, debemos establecer dos condiciones de fronteras como sigue:

$$\text{C.F.1} \quad \text{en } \eta = 0; \quad \theta = 1$$

$$\text{C.F.2} \quad \text{en } \eta = \infty; \quad \theta = 0$$

Como la Ec. 9.31 es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, su solución está dada en el apéndice C del libro de Bird (Bird, 2016), ecuación C.1-8, como sigue:

$$y = C_1 \int_0^x \exp(-\bar{x}^2) d\bar{x} + C_2$$

donde, C_1 y C_2 son las constantes de integración, $\bar{x}$ es la variable muda y x la variable unidimensional (espesor del sólido semi-infinito).

Por tanto, para el caso que estamos analizando, la solución general es la siguiente:

$$\theta = C_1 \int_0^\eta \exp(-\bar{u}^2) d\bar{u} + C_2 \quad (\text{Ec. 9.32})$$

donde, $\bar{u}$ es la variable muda. Para determinar las constantes de integración C_1 y C_2 , a la solución general se aplican las dos condiciones de frontera establecidas previamente, de la siguiente manera:

Al aplicar la primera condición de frontera en la Ec. 9.32, donde cuando $\eta = 0 \rightarrow \theta = 1$, se obtiene que:

$$C_2 = T_s \quad (\text{Ec. 9.33})$$

Por tanto, sustituyendo la Ec. 9.33 en la Ec. 9.32, se obtiene la siguiente ecuación resultante:

$$T = C_1 \int_0^\eta \exp(-\bar{u}^2) d\bar{u} + T_s \quad (\text{Ec. 9.34})$$

Al aplicar, la segunda condición de frontera, $T(\eta = \infty) = T_i$, y al aplicarla en la Ec. 9.31 se obtiene:

$$T_i = C_1 \int_0^{\infty} \exp(-\bar{u}^2) d\bar{u} + T_s \quad (\text{Ec. 9.35})$$

donde, la solución a la integral definida es la siguiente:

$$\int_0^{\infty} \exp(-\bar{u}^2) d\bar{u} = \frac{\pi^{1/2}}{2}$$

Por tanto, sustituyendo la solución anterior en la Ec. 9.35, se obtiene:

$$T_i = C_1 \left(\frac{\pi^{1/2}}{2} \right) + T_s$$

donde, despejando C_1 , de la ecuación anterior da como resultado:

$$C_1 = \frac{2(T_i - T_s)}{\pi^{1/2}} \quad (\text{Ec. 9.36})$$

Sustituyendo C_1 y C_2 en la Ec. 9.32 (solución general), se obtiene:

$$\theta = \frac{T(x,t) - T_s}{T_i - T_s} = \left(2/\pi^{1/2} \right) \int_0^{\eta} \exp(-\bar{u}^2) d\bar{u} \equiv \text{erf } \eta \quad (\text{Ec. 9.37})$$

Donde, la función de error se define como:

$$\text{erf } x = \frac{\int_0^x \exp(-\bar{x}^2) d\bar{x}}{\int_0^{\infty} \exp(-\bar{x}^2) d\bar{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-\bar{x}^2) d\bar{x}$$

Donde, $\bar{x}$ es la variable muda.

De tal manera, que la Ec. 9.37 se puede escribir como:

$$\theta = \frac{T(x, t) - T_s}{T_i - T_s} = \text{erf } \eta = \text{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}} \right) = \text{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \right) \quad (\text{Ec. 9.38})$$

Note que en otros textos encontrarán la Ec. 9.38 en términos de la función de error complementaria (erfc), que se define como:

$$\text{erfc } \eta = 1 - \text{erf } \eta \quad (\text{Ec.9.39})$$

es decir, la Ec. 9.38 queda expresada como sigue en términos de la función de error complementaria:

$$\theta = \frac{T(x, t) - T_s}{T_i - T_s} = 1 - \text{erf } \eta = \text{erfc} \left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}} \right)$$

Los valores de la función de error y función de error complementaria ya se encuentran tabulados en la literatura para diferentes valores de η , los cuales se muestran en la **Tabla 9.1** y **9.2**, respectivamente.

Tabla 9.1 Valores de la función de error.

η	$\text{erf } \eta$	η	$\text{erf } \eta$	η	$\text{erf } \eta$
0.00	0.00000	0.36	0.38933	1.04	0.85865
0.02	0.02256	0.38	0.40901	1.08	0.87333
0.04	0.04511	0.40	0.42839	1.12	0.88679
0.06	0.01676	0.42	0.46622	1.16	0.89910
0.08	0.09008	0.48	0.50275	1.20	0.91031
0.10	0.11246	0.52	0.53790	1.30	0.93401
0.12	0.13476	0.56	0.57162	1.40	0.95228
0.14	0.15695	0.60	0.60386	1.50	0.96611
0.16	0.17901	0.64	0.63459	1.60	0.97635
0.18	0.20094	0.68	0.66378	1.70	0.98379
0.20	0.22270	0.72	0.69143	1.80	0.98909
0.22	0.24430	0.76	0.71754	1.90	0.99279
0.24	0.26570	0.80	0.74210	2.00	0.99532
0.26	0.28690	0.84	0.76514	2.20	0.99814
0.28	0.30788	0.88	0.78669	2.40	0.99931
0.30	0.32863	0.92	0.80677	5.60	0.99976
0.32	0.34913	0.96	0.82542	2.80	0.99992
0.34	0.36936	1.00	0.84270	3.00	0.99998

Tabla 9.2 Valores de la función de error complementaria.

η	$\text{erfc } \eta$	η	$\text{erfc } \eta$	η	$\text{erfc } \eta$
0	1	0.36	0.6107	1.04	0.1414
0.02	0.9774	0.38	0.591	1.08	0.1267
0.04	0.9549	0.4	0.5716	1.12	0.1132
0.06	0.9332	0.42	0.5538	1.16	0.1009
0.08	0.9099	0.48	0.4973	1.2	0.0897
0.1	0.8875	0.52	0.4621	1.3	0.066
0.12	0.8652	0.56	0.4284	1.4	0.0477
0.14	0.8431	0.6	0.3961	1.5	0.0339
0.16	0.821	0.64	0.3654	1.6	0.0236
0.18	0.7991	0.68	0.3362	1.7	0.0162
0.2	0.7773	0.72	0.3086	1.8	0.0109
0.22	0.7557	0.76	0.2825	1.9	0.0072
0.24	0.7343	0.8	0.2579	2	0.0047
0.26	0.7131	0.84	0.2349	2.2	0.0019
0.28	0.6921	0.88	0.2133	2.4	0.0007
0.3	0.6714	0.92	0.1932	5.6	0.0002
0.32	0.6509	0.96	0.1746	2.8	8E-05
0.34	0.6306	1	0.1573	3	2E-05

Por otro lado, el *flux de calor* en la superficie identificable se obtiene con la aplicación de la ley de Fourier en $x = 0$, en cuyo caso:

$$\dot{q} = -k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = -k(T_i - T_s) \left. \frac{d(\text{erf } \eta)}{dx} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|_{\eta=0} \quad (\text{Ec. 9.40})$$

donde, por definición:

$$\frac{d}{dx} \text{erf } \eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-\eta^2) \frac{d\eta}{dx}$$

y,

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{1}{(4\alpha t)^{1/2}}$$

Por tanto, sustituyendo las dos ecuaciones anteriores en la Ec. 9.40, resulta en:

$$\dot{q} = k(T_s - T_i) \left(\frac{2}{\pi^{1/2}} \right) \exp(-\eta^2) (4\alpha t)^{-1/2} \Big|_{\eta=0}$$

$$\dot{q} = \frac{k(T_s - T_i)}{(\pi\alpha t)^{1/2}} \quad (\text{Ec. 9.41})$$

Por tanto, las soluciones analíticas mediante el método de sólido semi-infinito para los tres casos propuestos son las siguientes:

Caso 1. Temperatura superficial constante: $T(0, t) = T_s$

$$\frac{T(x, t) - T_s}{T_i - T_s} = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \quad (\text{Ec. 9.38})$$

$$\dot{q}(t) = \frac{k(T_s - T_i)}{\sqrt{\pi \alpha t}} \quad (\text{Ec. 9.41})$$

Caso 2. Flujo de calor superficial constante, $\dot{q}_0$:

$$T(x, t) - T_i = \frac{2\dot{q}_0 \left(\frac{\alpha t}{\pi}\right)^{1/2}}{k} \exp\left(\frac{-x^2}{4\alpha t}\right) - \frac{\dot{q}_0 x}{k} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \quad (\text{Ec. 9.42})$$

Caso 3. Convección superficial: $-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = h[T_\infty - T(0, t)]$

$$\frac{T(x, t) - T_i}{T_\infty - T_i} = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) - \left[\exp\left(\frac{hx}{k} + \frac{h^2 \alpha t}{k^2}\right) \right] \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + \frac{h\sqrt{\alpha t}}{k}\right) \right] \quad (\text{Ec. 9.43})$$

Por otro lado, la sencillez de este método permite resolver múltiples problemas de sólidos semi-infinitos, como la tierra que presenta una superficie identificable que puede ser modificada. Sin embargo, un sólido de cualquier espesor finito se puede considerar un sólido semi-infinito si el intervalo de tiempo de interés es suficientemente corto para que el calor penetre sólo una pequeña distancia x en el sólido. Por ello, en estos casos la aproximación es generalmente aceptable si se satisface la siguiente desigualdad:

$$Fo = \frac{\alpha t}{L^2} < 0.1 \quad (\text{Ec. 9.44})$$

Donde, L es el espesor del sólido.

9.2.1 Gráficas reportadas en la literatura

En la literatura podemos encontrar gráficas como la que se muestra en la **Figura 9.7** en la que se gráfica la variación de la temperatura con la posición en x (espesor de la pared plana) y el tiempo en un sólido semi-infinito que inicialmente se encuentra a la temperatura T_i expuesto a un fluido de temperatura T_∞ , y un coeficiente de transferencia de calor por convección h (*Caso 3*). Para el uso de esta gráfica es necesario conocer x y el tiempo (t), para determinar la temperatura, $T(x, t)$, o conocer la temperatura ($T(x, t)$) y x para determinar el tiempo t .

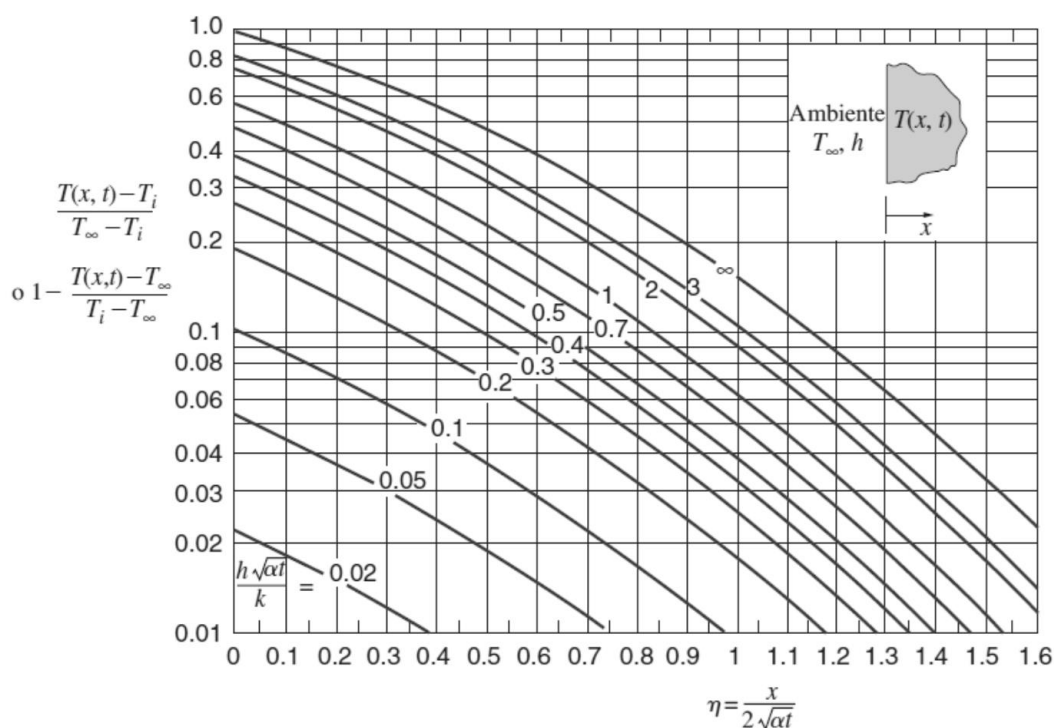


Figura 9.7 Variación de la temperatura con la posición x y el tiempo t en un sólido semi-infinito con convección en la superficie identificable (Cengel, 2011).

9.3 Conducción no estacionaria en sólidos

Es importante mencionar que los dos métodos revisados previamente nos permiten obtener una aproximación de la variación de la temperatura con el espesor y el tiempo. Sin embargo, en esta sección llegaremos a ecuaciones que nos permitirá obtener la solución exacta o analítica para las tres configuraciones geométricas simples (pared plana, cilindro y esfera).

9.3.1 Pared plana con convección

Considere una pared plana (pared de una casa) de espesor $2L$, donde la conducción de calor es unidimensional en la dirección x . Si la pared plana en $t = 0$ está a una temperatura inicial

T_i (Figura 9.8), y se sumerge súbitamente en un fluido de temperatura $T_\infty \neq T_i$. Para el desarrollo de las ecuaciones se tomarán las siguientes suposiciones:

- Conducción de calor unidimensional en el eje x (espesor de la pared)
- Sin generación de calor
- Propiedades termofísicas constantes

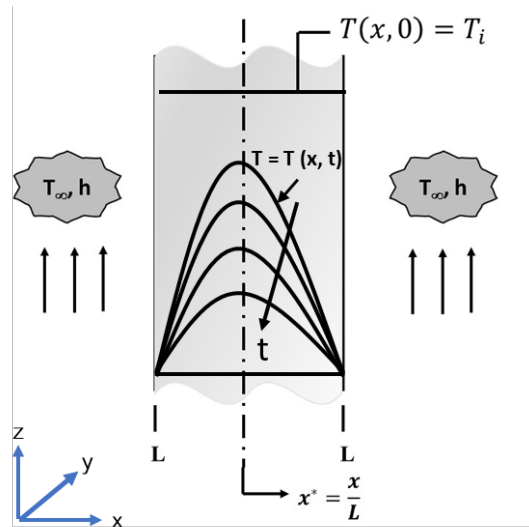


Figura 9.8 Pared plana de espesor $2L$, con una distribución simétrica de temperaturas.

Como revisamos previamente en el capítulo 3, la ecuación general de la conducción de calor en coordenadas rectangulares y conductividad térmica constante es la siguiente:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{e}_{gen}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (Ec. 3.10)$$

Al aplicar las suposiciones establecidas previamente a la Ec. 3.10, esta se reduce a:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (Ec. 4.14)$$

Por tanto, para darle solución a esta ecuación diferencial parcial de segundo orden, y homogénea se pueden usar diferentes métodos tales como el método de combinación de variables, separación de variables, de la respuesta sinusoidal, y de la transformada de Laplace, etc.

Como ejemplo, la Ec. 4.14 se resolverá usando el método de separación de variables, para lo cual partiremos definiendo variables adimensionales para la variable dependiente (temperatura), y variables independientes (x y t) de la siguiente manera:

Variable dependiente (temperatura dentro del sólido, T , que varía con respecto a x y t):

$$\theta^* = \frac{\theta(x, t)}{\theta_i} = \frac{T(x, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \quad (\text{Ec. 9.45})$$

En consecuencia, θ^* puede tomar valores en el rango, $0 \leq \theta^* \leq 1$.

La coordenada espacial adimensional:

$$x^* = \frac{x}{L} \quad (\text{Ec. 9.46})$$

donde, L es la mitad de espesor de la pared plana.

y, el tiempo adimensional:

$$t^* = \frac{\alpha t}{L_c^2} = Fo \quad (\text{Ec. 9.47})$$

donde, t^* es equivalente al número de Fourier adimensional,

Sustituyendo las ecuaciones de la 9.45 a la 9.47, en la Ec.4.14, resultando en:

$$\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x^{*2}} = \frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} \quad (\text{Ec. 9.48})$$

Por tanto, para resolver la Ec. 9.47, primero estableceremos una condición inicial y dos condiciones de frontera, de la siguiente manera:

C.I.: en $t^* = 0$ $\theta^* = 1$

C.F.1. en $x^* = 1$ $\theta^* = 0$ Para $t^* > 0$

C.F.2. en $x^* = -1$ $\theta^* = 0$ Para $t^* > 0$

Note que al plantear el problema de esta manera no aparecen parámetros. Por tanto, una vez establecidas las condiciones iniciales y de frontera, empezaremos postulando una solución a la Ec.9.48 de la siguiente forma:

$$\theta^*(x^*, t^*) = f(x^*)g(t^*) \quad (\text{Ec. 9.49})$$

Derivando dos veces la Ec. 9.49 con respecto a x y dividiendo el resultado de la derivación entre el producto $f(x^*)g(t^*)$, da como resultado lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} &= \frac{\partial}{\partial x^*} (f(x^*)g(t^*)) = f(x^*) \frac{\partial}{\partial x^*} g(t^*) + g(t^*) \frac{\partial}{\partial x^*} f(x^*) \\ \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x^{*2}} &= \frac{\partial}{\partial x^*} (g(t^*) \frac{\partial}{\partial x^*} f(x^*)) = \frac{g(t^*) \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} f(x^*)}{f(x^*)g(t^*)} = \frac{1}{f(x^*)} \frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x^{*2}} \end{aligned} \quad (\text{Ec. 9.50})$$

y, derivando la Ec. 9.49 con respecto a t y dividiendo el resultado de la derivación entre el producto $f(x^*)g(t^*)$, da como resultado lo siguiente:

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} = \frac{\partial}{\partial t^*} (f(x^*)g(t^*)) = \frac{f(x^*) \frac{\partial}{\partial t^*} g(t^*) + g(t^*) \frac{\partial}{\partial t^*} f(x^*)}{f(x^*)g(t^*)} = \frac{1}{g(t^*)} \frac{\partial g(t^*)}{\partial t^*} \quad (\text{Ec. 9.51})$$

Sustituyendo la Ec. 9.50 y 9.51 en la Ec. 9.49, da como sigue:

$$\frac{1}{f(x^*)} \frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x^{*2}} = \frac{1}{g(t^*)} \frac{\partial g(t^*)}{\partial t^*} \quad (\text{Ec. 9.52})$$

Como podemos observar en la Ec.9.52, el término de la izquierda es una función exclusiva de x^* , mientras que el lado derecho es una función exclusiva de t^* . Para que se cumpla la igualdad, ambos miembros deben ser iguales a una constante que denominaremos $-c^2$ (que puede ser también $+c$ o $+c^2$, sin embargo, el desarrollo es mucho más complejo) es decir:

$$\frac{1}{f(x^*)} \frac{d^2 f(x^*)}{dx^{*2}} = -c^2 \quad (\text{Ec. 9.53})$$

$$\frac{1}{g(t^*)} \frac{dg(t^*)}{dt^*} = -c^2 \quad (\text{Ec. 9.54})$$

Las soluciones de la Ec. 9.53 y Ec.9.54, ya se encuentran tabuladas en la Tabla C1 del libro del Bird (Bird, 2016), Apéndice C, como sigue:

Para la Ec. 9.53, la solución es:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a^2y \rightarrow y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax \quad (\text{Ec. C.1-3 del libro del Bird})$$

Por lo tanto, aplicando esta solución a la Ec. 9.53, da como resultante:

$$f(x^*) = B \sin cx^* + C \cos cx^* \quad (\text{Ec. 9.55})$$

Mientras, para la Ec. 9.54 su solución es:

$$\frac{dg(t^*)}{g(t^*)} = -c^2 dt^* \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \rightarrow \text{su solución es: } \int g dy = \int f dx + C_1 \quad (\text{Ec. C.1-1,}$$

(Bird, 2002, apendice C)

Por tanto, aplicando su solución, está queda como:

$$\int \frac{dg}{g} = -c^2 \int dt^*$$

Que al resolver las integrales nos da como resultado:

$$\ln g = -c^2 t^* + A$$

Aplicando el antilogaritmo:

$$g = \exp(-c^2 t^* + A)$$

$$g(t^*) = A \exp(-c^2 t^*) \quad (\text{Ec. 9.56})$$

En las Ec. 9.55 y 9.56, A, B y C son las constantes de integración, las cuales pueden determinarse aplicando las condiciones de frontera e inicial propuestas previamente. Analizaremos dos soluciones a estas ecuaciones, la analítica o exacta y la aproximada.

a) Solución analítica o exacta:

Debido a la simetría respecto al plano xz, como se observa en la **Figura 9.7**, en donde la distribución de temperaturas es simétrica en el plano xz, de manera tal que:

$$\theta^*(x^*, t^*) = \theta^*(-x^*, t^*)$$

y, por tanto:

$$f(x^*) = f(-x^*).$$

Ahora bien, como sabemos la función coseno presenta simetría, mientras que la función seno no la presenta. En consecuencia, en la Ec. 9.55, B es cero, dada la falta de simetría de la función seno.

Al aplicar cualesquiera de las condiciones de frontera que se establecieron previamente:

Si aplicamos la C.F.1: en $x^* = 1$ $\theta^* = 0$, se obtiene:

$$0 = B \sin c(1) + C \cos c(1) \rightarrow C \cos c(1) = 0$$

Por tanto, para que se cumpla la igualdad anterior, C debe ser cero, sin embargo, esta elección llevaría a una solución físicamente inadmisibles de la Ec. 9.55. Sin embargo, esta igualdad puede satisfacerse por medio de muchas elecciones de c, que denominamos c_n :

$$c_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \quad \text{donde, } n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \infty$$

De tal manera, que de la Ec.9.56, al tener múltiples valores de c, se obtienen múltiples valores de g_n y por lo tanto de la constante de integración A_n , con lo cual se puede expresar:

$$g_n = A_n \exp \left[- \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \pi^2 t^* \right] \quad (\text{Ec. 9.57})$$

y por tanto, también múltiples valores de la función, f_n para cada valor de la constante c_n ;

$$f_n = C_n \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi x^* \quad (\text{Ec. 9.58})$$

Así como, la variable dependiente adimensional presenta múltiples valores, como sigue:

$$\theta_n^* = f_n g_n \quad (\text{Ec. 9.59})$$

Al sustituir la Ec. 9.57 y 9.58 en la Ec. 9.49, se obtiene:

$$\theta_n^* = A_n \exp \left[- \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \pi^2 t^* \right] C_n \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi x^*$$

Por lo tanto, una solución a la Ec. 9.49, puede satisfacerse por medio de la siguiente ecuación:

$$\theta_n^* = A_n C_n \exp \left[- \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \pi^2 t^* \right] \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi x^* \quad (\text{Ec. 9.60})$$

Los subíndices n nos recuerda que A y C pueden ser diferentes para cada valor de n. Sin embargo, al sustituir diferentes valores de n (+ o -) en la Ec. 9.60 se observa que las exponenciales y los cosenos de n son los mismos valores que los de -(n + 1), de tal manera que los términos con índices negativos se combinan con los que tienen índices positivos.

Entonces, la superposición proporciona:

$$\theta^* = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \exp \left[- \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \pi^2 t^* \right] \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi x^* \quad (\text{Ec. 9.61})$$

donde,

$$D_n = A_n C_n + A_{-(n+1)} C_{-(n+1)}$$

Ahora las D_n se determinan usando la condición inicial establecida previamente (C.I.: en $t^* = 0$; $\theta^* = 1$), con lo que se obtiene:

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi x^*$$

Al multiplicar $\cos\left(m + \frac{1}{2}\right) \pi x^*$ en ambos lados de la ecuación anterior e integrar con respecto a x , desde $x^* = -1$ hasta $x^* = +1$, se obtiene:

$$\int_{-1}^{+1} \cos\left(m + \frac{1}{2}\right) \pi x^* dx^* = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \int_{-1}^{+1} \cos\left(m + \frac{1}{2}\right) \pi x^* \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi x^* dx^*$$

Una vez que se hacen las integraciones, todas las integrales en el miembro derecho son idénticamente cero, excepto por el término en que $n = m$. Por tanto, se obtiene:

$$\frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right) \pi x^*}{\left(m + \frac{1}{2}\right) \pi} \Bigg|_{n=-1}^{n=+1} = D_m \frac{\frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{2}\right) \pi x^* + \frac{1}{4} \sin 2\left(m + \frac{1}{2}\right) \pi x^*}{\left(m + \frac{1}{2}\right) \pi} \Bigg|_{n=-1}^{n=+1}$$

Después de insertar los límites, y despejando D_m , se obtiene que:

$$D_m = \frac{2(-1)^m}{\left(m + \frac{1}{2}\right) \pi} \quad (\text{Ec. 9.62})$$

Al sustituir la Ec. 9.62 en la Ec. 9.61, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\theta^* = \frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi} \exp\left[-\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 t^*\right] \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi x^* \quad (\text{Ec. 9.63})$$

La Ec. 9.63 también se puede expresar en valores característicos eigenvalores (ξ_n) de la siguiente manera:

$$\theta^* = \frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp\left[-\xi_n^2 Fo\right] \cos(\xi_n x^*) \quad (\text{Ec. 9.64})$$

donde:

$$C_n = \frac{4 \sin \xi_n}{2 \xi_n + \sin(2 \xi_n)}$$

Siendo los valores característicos (eigenvalores) de ξ_n las raíces positivas de la ecuación trascendente:

$$\xi_n \tan \xi_n = Bi \quad (Ec. 9.65)$$

En la **Tabla D.1** del apéndice D, se muestran las primeras cuatro raíces de los valores característicos eigenvalores a diferentes valores del número de Biot.

b) Solución aproximada

Para valores de $Fo > 0.2$, la solución en serie infinita (Ec. 9.64), se puede aproximar con el primer término de la serie, es decir con $n = 1$, por lo que al recurrir a esta aproximación la forma adimensional de la distribución de temperaturas se convierte en:

$$\theta^* = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = C_1 \exp[-\xi_1^2 Fo] \cos(\xi_1 x^*) \quad (Ec. 9.66)$$

o,

$$\theta^* = \theta_0^* \cos(\xi_1 x^*) \quad (Ec. 9.67)$$

donde,

$$\theta_0^* = \frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty} \quad (Ec. 9.68)$$

La ecuación anterior representa la temperatura en el plano medio ($x^* = 0$), de tal manera que al sustituirlo en la Ec. 9. 67 se obtiene:

$$\theta_0^* = \frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty} = C_1 \exp[-\xi_1^2 Fo] \quad (Ec. 9.69)$$

donde, T_0 es la temperatura en $x = 0$. En la Tabla D.2 del Apéndice D, se muestran los valores de C_1 y ξ_1 para un rango de números de Biot.

9.3.1.1 Transferencia total de energía en la pared plana

Para conocer la energía total que disminuye en la pared en un tiempo t en el proceso transitorio. El requerimiento de conservación de la energía, se aplica al intervalo de tiempo limitado por la conducción Inicial ($t = 0$) y cualquier tiempo $t > 0$:

$$E_{ent} - E_{sale} = \Delta E_{alm}$$

Al igualar la energía que se transfiere desde la pared, $Q = E_{sale}$ y con $E_{ent} = 0$ y $\Delta E_{alm} = E(t) - E(0)$, se sigue que:

$$\dot{Q}' = -[E(t) - E(0)] = -\rho c [T(x, t) - T_i]$$

o,

$$\dot{Q}' = - \int \rho c [T(x, t) - T_i] dV \quad [J m^3]$$

Donde, como podemos observar la integración se lleva a cabo sobre el volumen de la pared. Para quitar estas dimensiones a este resultado, se podría hacer mediante la introducción de la cantidad:

$$Q_0 = \rho c V [T_i - T_\infty] \quad (\text{Ec. 9.70})$$

Esta ecuación nos permite determinar la energía interna inicial de la pared relativa a la temperatura del fluido. También se interpreta como la cantidad máxima de transferencia de energía que podría ocurrir si el proceso continuará al tiempo $t = \infty$.

Por lo tanto, al suponer propiedades constantes, la razón de la energía total transferida de la pared en el intervalo de tiempo t a la transferencia máxima posible, se obtiene:

$$\frac{Q}{Q_0} = \int \frac{-[T(x, t) - T_i]}{T_i - T_\infty} \frac{dV}{V} = \frac{1}{V} \int (1 - \theta^*) dV$$

Al emplear la forma aproximada de la distribución de temperaturas para la pared plana, la integración da como resultado:

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{\sin \zeta_1}{\zeta_1} \theta_0^* \quad (\text{Ec. 9.71})$$

9.4 Sistemas radiales con convección

Si partimos de la ecuación general de la conducción de calor en coordenadas cilíndricas:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(kr \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{e}_{gen} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{Ec. 4.14})$$

y aplicamos las siguientes suposiciones:

- Conducción de calor unidimensional en el eje coordenado r

- No hay generación de calor
- Propiedades termofísicas constantes

La Ec. 4.14, se reduce a:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{Ec. 4.36})$$

Para resolver la Ec. 4.36 se pueden usar diferentes métodos tal como se mencionó anteriormente, en el siguiente apartado mostraremos la solución de esta ecuación utilizando el método de separación de variables.

a) Solución exacta

Para un cilindro infinito:

Si consideramos un cilindro infinito o una esfera de radio r_0 , que está a una temperatura inicial uniforme (T_i) y experimenta un cambio en las condiciones de convección (**Figura 9.9**). El cilindro infinito es una idealización que permite la suposición unidimensional en la dirección radial. Esta es una aproximación razonable para cilindros con $L/r_0 = 10$.

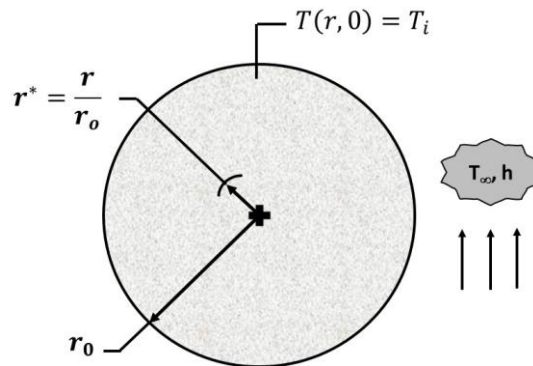


Figura 9.9 Sección transversal de un cilindro infinito de radio r_0

Ahora para este sistema se definen también las variables, T , x y t en variables adimensionales como se muestra a continuación:

Variable dependiente adimensional:

$$\theta^* = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty}$$

Coordenada radial adimensional

$$r^* = \frac{r}{r_0}$$

Tiempo adimensional

$$t^* = \frac{\alpha t}{L_c^2} \equiv Fo$$

Por lo que la solución exacta en términos de los eigenvalores para un cilindro infinito es:

$$\theta^* = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp[-\xi_n^2 Fo] J_0(\xi_n r^*) \quad (\text{Ec. 9. 72})$$

donde,

$$c_n = \frac{2}{\xi_n} \frac{J_1(\xi_n)}{J_0^2(\xi_n) + J_1^2(\xi_n)}$$

Y los valores característicos de ξ_n son las raíces positivas de la ecuación trascendental, de la siguiente forma:

$$\xi_n \frac{J_1(\xi_n)}{J_0(\xi_n)} = Bi \quad (\text{Ec. 9.73})$$

Las cantidades J_1 y J_0 se definen como funciones de Bessel de primera clase y sus valores se encuentran tabulados en el apéndice E.

b) Solución aproximada

Para un cilindro infinito y la esfera, las soluciones en serie anteriores se aproximan nuevamente mediante un solo término para $Fo > 0.2$.

$$\theta^* = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = C_1 \exp[-\xi_1^2 Fo] J_0(\xi_1 r^*) \quad (\text{Ec. 9.74})$$

o,

$$\theta^* = \theta_0^* J_0(\xi_1 r^*) \quad (\text{Ec. 9.75})$$

Donde, θ_0^* representa la temperatura de la línea central y es de la forma:

$$\theta_0^* = C_1 \exp(-\xi_1^2 Fo) \quad (Ec. 9.76)$$

Los valores de los coeficientes C_1 y ξ_1 para un cilindro se encuentran tabulados en la Tabla D.2 (Apéndice D) para un rango de números de Biot.

Para una esfera:

a) Solución exacta

Para una esfera se establecen las mismas variables adimensionales, que al resolver la ecuación 4.56 mediante el método de separación de variables se obtiene la siguiente ecuación en función de eigenvalores:

$$\theta^* = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp[-\xi_n^2 Fo] \frac{1}{r^* \xi_n} \text{sen}(\xi_n r^*) \quad (Ec. 9.77)$$

donde, $Fo = \frac{\alpha t}{r_0^2}$, y

$$C_n = \frac{4[\text{sen}(\xi_n) - \xi_n \cos(\xi_n)]}{2\xi_n - \text{sen}(2\xi_n)}$$

Para este caso, los valores característicos de ξ_n son las raíces positivas de la ecuación trascendental, de la siguiente manera:

$$1 - \xi_n \cot \xi_n = Bi \quad (Ec. 9.78)$$

b) Solución aproximada

Para valores de $Fo > 0.2$, se puede obtener el perfil de temperaturas de una forma aproximada considerando solo $n = 1$, de tal forma que la Ec. 9.77 se reduce a:

$$\theta^* = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = C_1 \exp[-\xi_1^2 Fo] \frac{1}{r^* \xi_1} \text{sen}(\xi_1 r^*) \quad (Ec. 9.79)$$

o,

$$\theta^* = \theta_0^* \frac{1}{r^* \xi_1} \text{sen}(\xi_1 r^*) \quad (Ec. 9.80)$$

donde, θ_0^* representa la temperatura de la línea central y es de la forma:

$$\theta_0^* = C_1 \exp(-\xi_1^2 Fo) \quad (Ec. 9.81)$$

Los valores de los coeficientes C_1 y ξ_1 se encuentran tabulados en la tabla D.2 (Apéndice D) para un rango de números de Biot.

9.4.1 Transferencia total de energía

La rapidez de la transferencia total de energía del cilindro o de la esfera en el intervalo de tiempo $\Delta t = t$, se puede determinar con las siguientes ecuaciones:

Cilindro infinito:

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{2\theta_0^*}{\zeta_1} J_1(\zeta_1) \quad (Ec. 9.82)$$

Esfera:

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{3\theta_0^*}{\zeta_1^3} [\sin(\zeta_1) - \zeta_1 \cos \zeta_1] \quad (Ec. 9.83)$$

Los valores de la temperatura del centro θ_0^* se determinan a partir de las Ec. 9.77 y 9.81. Los valores de los coeficientes C_1 y ξ_1 se muestran en la tabla D.2 (Apéndice D) y Tabla E.1 (Apéndice E).

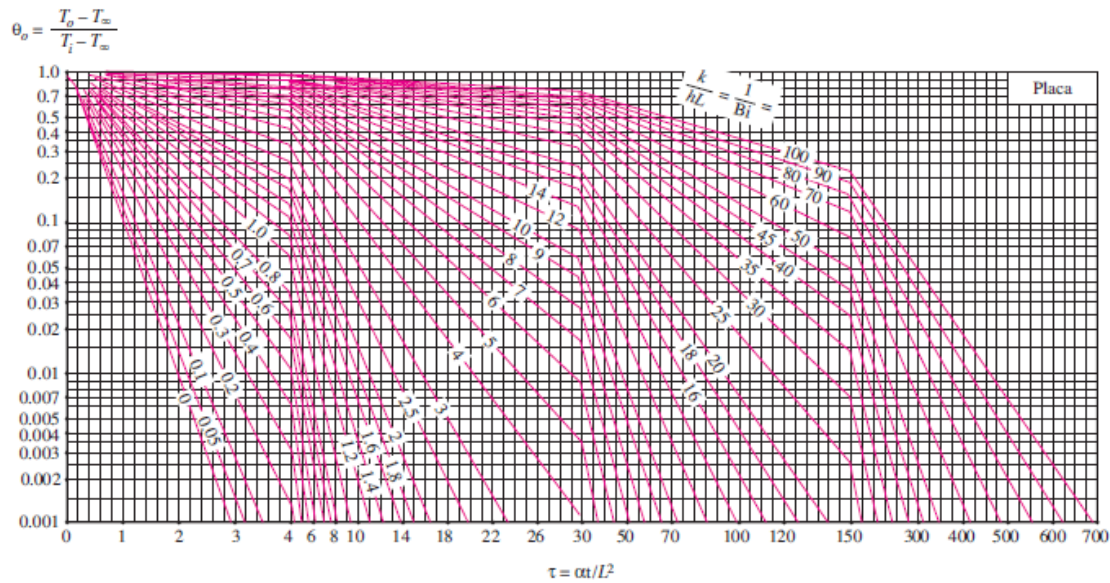
9.5 Resolución gráfica de los problemas transitorios

Otra forma de determinar el perfil de temperaturas y la transferencia de calor total en un intervalo de tiempo en sistemas geométricos simples (placa plana, cilindro y esfera) en estado transitorio es haciendo uso de los gráficos de Heisler mostrados en las **Figuras 9.10 al 9.12**. Los gráficos de Heisler representan una forma gráfica de la solución aproximada de la conducción de calor transitoria unidimensional, por tanto, no son válidas para $Fo < 0.2$, sin embargo, los gráficos son difíciles de leer cuando $Fo < 1$. A continuación, se describe el procedimiento para hacer uso de las gráficas mencionadas anteriormente:

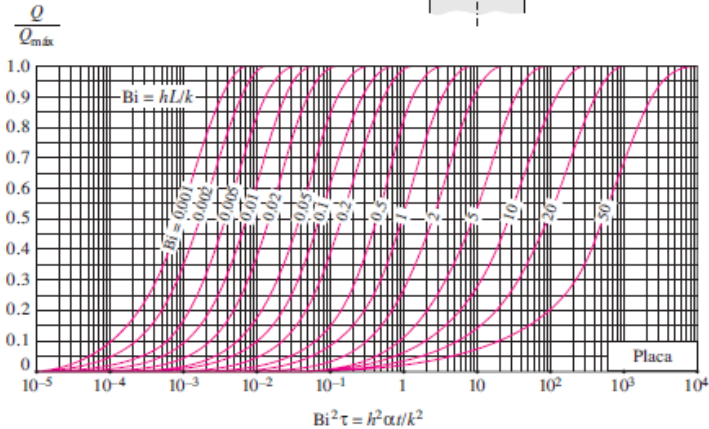
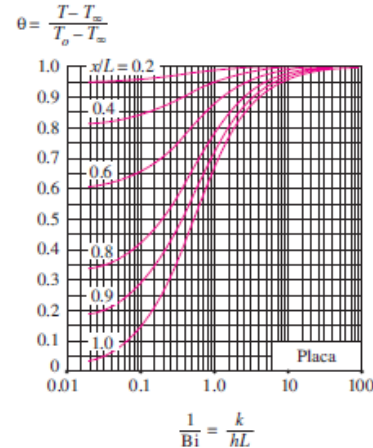
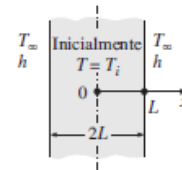
Forma de proceder para la resolución (válido para placas, cilindros y esferas):

- El primer gráfico se utiliza para conocer la temperatura en el plano medio, T_0 , en cualquier instante durante el proceso transitorio.
- Cuando T_0 es conocido para un determinado valor de Fo y Bi , se puede emplear el segundo gráfico para determinar la temperatura en otro punto de la placa/cilindro/esfera.

- La tercera gráfica se utiliza para calcular la energía disipada/ganada por la placa/cilindro/esfera para un determinado valor de Fo y Bi, una vez conocida la energía máxima que se podría intercambiar entre el sólido y el ambiente.



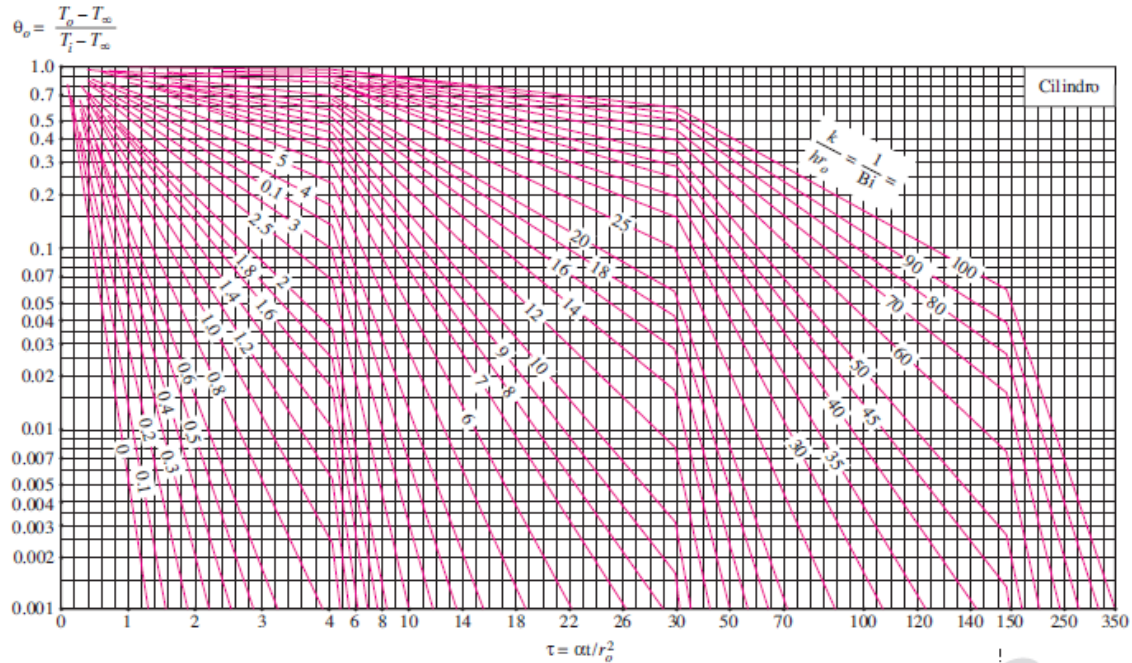
a) Temperatura del plano medio (tomado de M. P. Heisler, "Temperature Charts for Induction and Constant Temperature Heating". Trans. ASME 69, 1947, págs. 227-36. Reimpreso con autorización de ASME International).



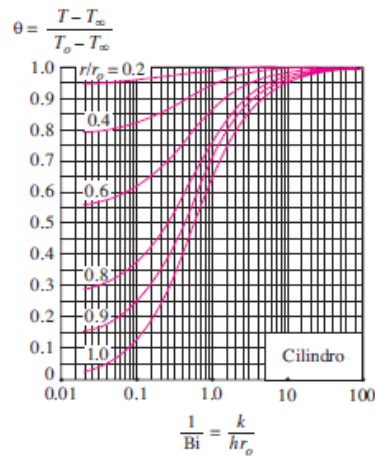
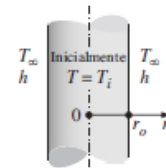
b) Distribución de temperatura (tomado de M. P. Heisler, "Temperature Charts for Induction and Constant Temperature Heating". Trans. ASME 69, 1947, págs. 227-36. Reimpreso con autorización de ASME International).

c) Transferencia de calor (tomado de H. Gröber et al.)

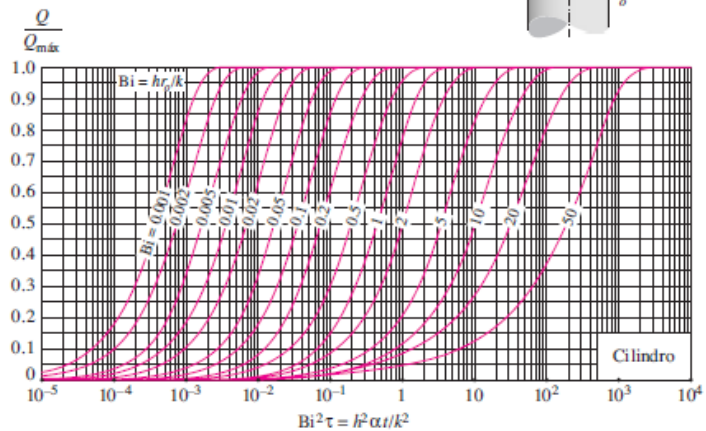
Figura 9.10 Gráficos de Heisler para un sistema de placa plana en estado transitorio (Cengel, 2011).



a) Temperatura de la línea central (tomado de M. P. Heisler, "Temperature Charts for Induction and Constant Temperature Heating", *Trans. ASME* 69, 1947, págs. 227-36. Reimpreso con autorización de ASME International).



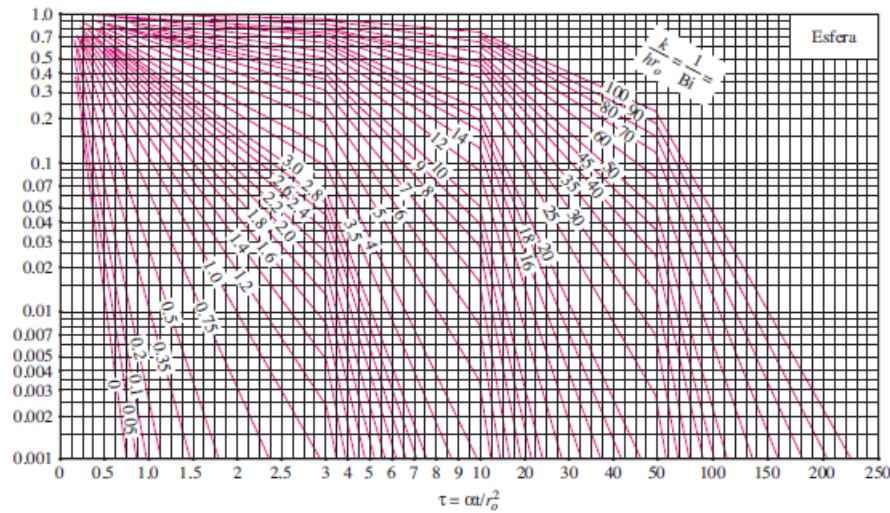
b) Distribución de temperaturas (tomado de M. P. Heisler, "Temperature Charts for Induction and Constant Temperature Heating", *Trans. ASME* 69, 1947, págs. 227-36. Reimpreso con autorización de ASME International).



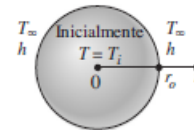
c) Transferencia de calor (tomado de H. Gröber *et al.*)

Figura 9.11 Gráficos de Heisler para un cilindro largo en estado transitorio (Cengel, 2011).

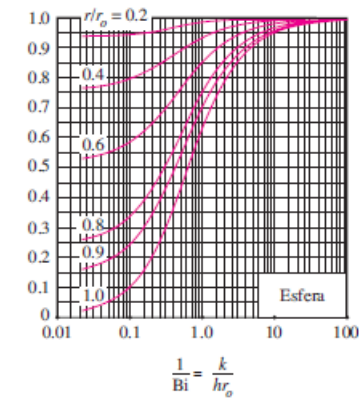
$$\theta_o = \frac{T_o - T_\infty}{T_i - T_\infty}$$



a) Temperatura en el centro (tomado de M. P. Heisler, "Temperature Charts for Induction and Constant Temperature Heating". *Trans. ASME* 69, 1947, págs. 227-36. Reimpreso con autorización de ASME International).

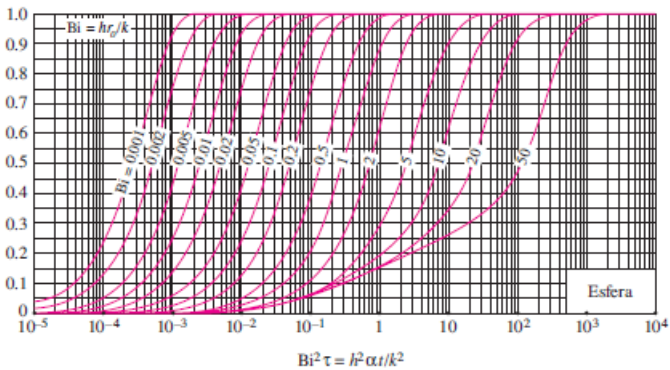


$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_o - T_\infty}$$



b) Distribución de temperaturas (tomado de M. P. Heisler, "Temperature Charts for Induction and Constant Temperature Heating". *Trans. ASME* 69, 1947, págs. 227-36. Reimpreso con autorización de ASME International).

$$\frac{Q}{Q_{\max}}$$



c) Transferencia de calor (tomado de H. Gröber et al.)

Figura 9.12 Gráficos de Heisler para una esfera en estado transitorio (Cengel, 2011).