



Casa abierta al tiempo  
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA  
Unidad Iztapalapa

Departamento de Ingeniería de Procesos e Hidráulica

# TRANSFERENCIA DE CALOR

TRIMESTRE 20-O

## 5.3 Conducción no estacionaria en sólidos

Dra. Elizabeth Rojas Garcia

Área de ingeniería Química

Email: [erg@xanum.uam.mx](mailto:erg@xanum.uam.mx)

## 5.3.1 Pared plana con convección

Si partimos de la ecuación general de la conducción de calor en coordenadas rectangulares

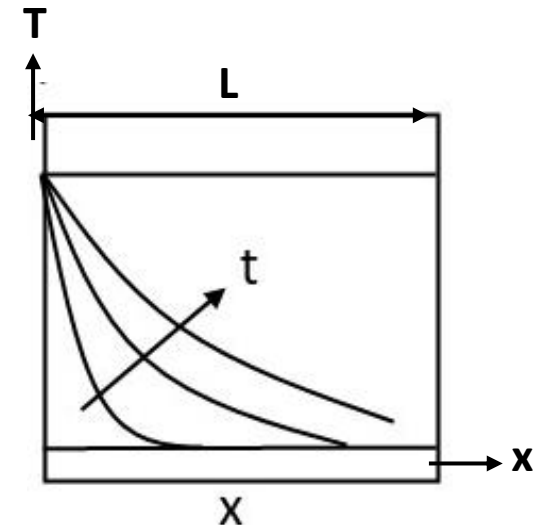
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{e}_{gen}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{Ec. 1}$$

**Y aplicamos las siguientes suposiciones:**

- Conducción de calor unidimensional en el eje x
- Sin generación de calor
- Conductividad térmica constante

La Ec. 1, se reduce a:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{Ec. 2} \quad T = T(x, t)$$



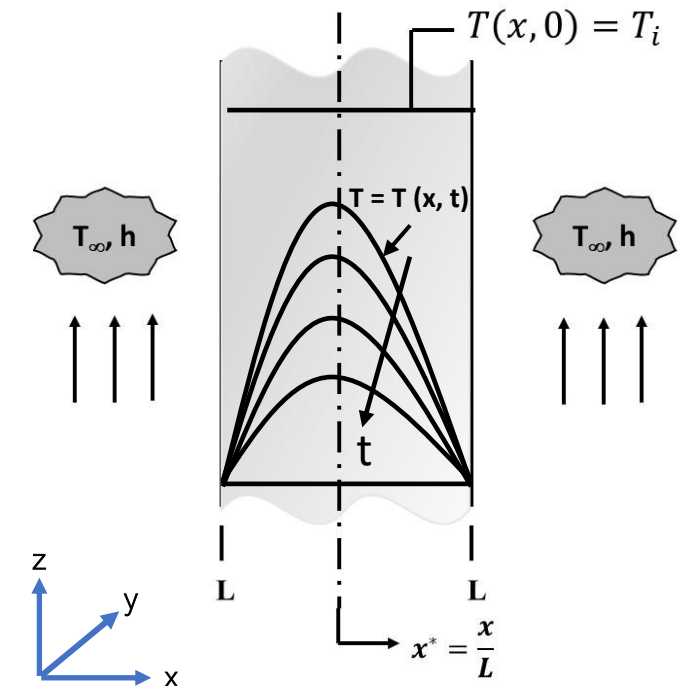
Para resolver la ecuación diferencial anterior (Ec. 2) se pueden usar diferentes métodos tales como:

- a) **Método de combinación de variables** (ejemplo: 12.1-1, Bird (2da edición), pág. 440)
- b) **Método de separación de variables** (ejemplo: 12.1-2, Bird (2da edición), pág. 441)
- c) **Método de la respuesta sinusoidal** (ejemplo: 12.1-3, Bird (2da edición), pág. 445)
- d) **Método de la transformada de Laplace** (ejemplo: 12.1-4, Bird (2da edición), pág. 446)

En el siguiente apartado resolveremos la Ec. 2 mediante el b) método de separación de variables:

Para ello, partiremos considerando una pared plana de espesor  $2L$ , donde la conducción es exclusivamente en la dirección  $x$ . Si la pared al principio está a una temperatura uniforme,  $T(x,0) = T_i$ , y se sumerge súbitamente en un fluido de  $T_\infty \neq T_i$  (Ver Figura). Como las condiciones de convección para las superficies en  $x^* = \pm 1$  son las mismas, la distribución de temperaturas en cualquier instante son simétricas alrededor del plano medio ( $x^*=0$ ).

Esquema



### Definiendo variables adimensionales para:

**La variable dependiente:**

$$\theta^* = \frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} \quad \text{Ec. 3}$$

*En consecuencia,  $\theta^*$  puede tomar valores en el rango,  $0 \leq \theta^* \leq 1$ .*

**La coordenada espacial adimensional:**

$$x^* = \frac{x}{L} \quad \text{Ec. 4}$$

*donde,  $L$  es la mitad de espesor de la pared plana.*

**y, el tiempo adimensional:**

$$t^* = \frac{\alpha t}{L_c^2} = Fo \quad \text{Ec. 5}$$

*donde,  $t^*$  es equivalente al número de Fourier adimensional*

Sustituyendo la ecuación 3-5 en 2, queda:

$$\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x^{*2}} = \frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} \quad \text{Ec. 6}$$

Para darle solución, es necesario establecer una condición inicial y dos condiciones de frontera:

$$\text{C.I.: en } t^* = 0 \quad \theta^* = 1$$

$$\begin{array}{ll} \text{C.F.1.} & \text{en } x^* = 1 \quad \theta^* = 0 \\ \text{C.F.2.} & \text{en } x^* = -1 \quad \theta^* = 0 \end{array} \quad \text{Para } t^* > 0$$

Nótese que cuando el problema se replantea así, no aparecen parámetros.

Para resolver la ecuación por **el método de separación de variables**, empezamos postulando una solución de la forma:

$$\theta^*(x^*, t^*) = f(x^*)g(t^*) \quad \text{Ec. 7}$$

Al sustituir Ec. 7 en Ec.6 y dividiendo la resultando entre el producto  $f(x^*)g(t^*)$ , se obtiene:

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} = \frac{\partial}{\partial t^*} (f(x^*)g(t^*)) = \frac{f(x^*)\frac{\partial}{\partial t^*}g(t^*) + g(t^*)\frac{\partial}{\partial t^*}f(x^*)}{f(x^*)g(t^*)} = \frac{1}{g(t^*)} \frac{\partial g(t^*)}{\partial t^*} \quad \text{Ec. 8}$$

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} = \frac{\partial}{\partial x^*} (f(x^*)g(t^*)) = f(x^*)\frac{\partial}{\partial x^*}g(t^*) + g(t^*)\frac{\partial}{\partial x^*}f(x^*)$$

$$\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x^{*2}} = \frac{\partial}{\partial x^*} \left( g(t^*) \frac{\partial}{\partial x^*} f(x^*) \right) = \frac{g(t^*) \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} f(x^*)}{f(x^*)g(t^*)} = \frac{1}{f(x^*)} \frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x^{*2}} \quad \text{Ec. 9}$$

Sustituyendo la Ec. 8 y 9, en la Ec. 6, se obtiene :

$$\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x^{*2}} = \frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{f(x^*)} \frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x^{*2}} = \frac{1}{g(t^*)} \frac{\partial g(t^*)}{\partial t^*} \quad \text{Ec. 10}$$

$$\frac{1}{f(x^*)} \frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x^{*2}} = \frac{1}{g(t^*)} \frac{\partial g(t^*)}{\partial t^*} \quad \text{Ec. 10}$$

El miembro izquierdo es una función exclusiva de  $x^*$  y el derecho es una función exclusiva de  $t^*$ . Esto sólo puede ser cierto si ambos miembros son iguales a una constante, que denominaremos  $-c^2$ .

Así, la Ec. 10 puede separarse en dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{1}{g(t^*)} \frac{dg(t^*)}{dt^*} = -c^2 \quad \text{Ec. 11}$$

$$\frac{1}{f(x^*)} \frac{d^2 f(x^*)}{dx^{*2}} = -c^2 \quad \text{Ec. 12}$$

Estas ecuaciones tienen la forma de las ecuaciones de tabla C1 (Bird, 2da edición, apéndice C) y sus soluciones se encuentran en la Tabla:

$$\frac{dg(t^*)}{g(t^*)} = -c^2 dt^* \quad \longrightarrow \quad \text{Ecuación C.1-1}$$

$$\frac{d^2 f(x^*)}{dx^{*2}} + c^2 f(x^*) = 0 \quad \longrightarrow \quad \text{Ecuación C.1-3}$$

**Tabla C1.** (Bird, 2da edición, apéndice C)

Ecuación	Solución
$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$	$\int g \, dy = \int f \, dx + C_1 \quad (\text{C.1-1})$
$\frac{dy}{dx} + f(x)y = g(x)$	$y = e^{-\int f \, dx} (\int e^{\int f \, dx} g \, dx + C_1) \quad (\text{C.1-2})$
$\frac{d^2 y}{dx^2} + a^2 y = 0$	$y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax \quad (\text{C.1-3})$
$\frac{d^2 y}{dx^2} - a^2 y = 0$	$y = C_1 \cosh ax + C_2 \sinh ax$ o bien, $(\text{C.1-4a})$
	$y = C_3 e^{+ax} + C_4 e^{-ax} \quad (\text{C.1-4b})$
$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left( x^2 \frac{dy}{dx} \right) + a^2 y = 0$	$y = \frac{C_1}{x} \cos ax + \frac{C_2}{x} \sin ax \quad (\text{C.1-5})$

Por lo tanto, al integrarse ambas ecuaciones:

### Ecuación 11

$$\int \frac{dg}{g} = -c^2 \int dt^*$$

$$\ln g = -c^2 t^* + A$$

Aplicamos el antilogaritmo:

$$g = \exp(-c^2 t^* + A)$$

$$g = A \exp(-c^2 t^*) \quad \text{Ec. 13}$$

### Ecuación 12

A, B y C son constantes de integración

$$\frac{d^2 f}{dx^{*2}} = -c^2 f, \text{ su solución general es:}$$

$$f(x^*) = B \operatorname{sen} cx^* + C \cos cx^* \quad \text{Ec. 14}$$

### a) Solución exacta

Debido a la simetría respecto al plano xz (condiciones límite):

$$\theta^*(x^*, t^*) = \theta^*(-x^*, t^*), \text{ y}$$

$$\text{así, } f(x^*) = f(-x^*).$$

Como la función seno no tiene este tipo de comportamiento (simetría), debe requerirse que B sea cero.

Al usar cualquiera de las dos condiciones de frontera (diap. 3) en la Ec. 14:

$$\text{C.F.1. en } x^* = 1 \quad \theta^* = 0$$

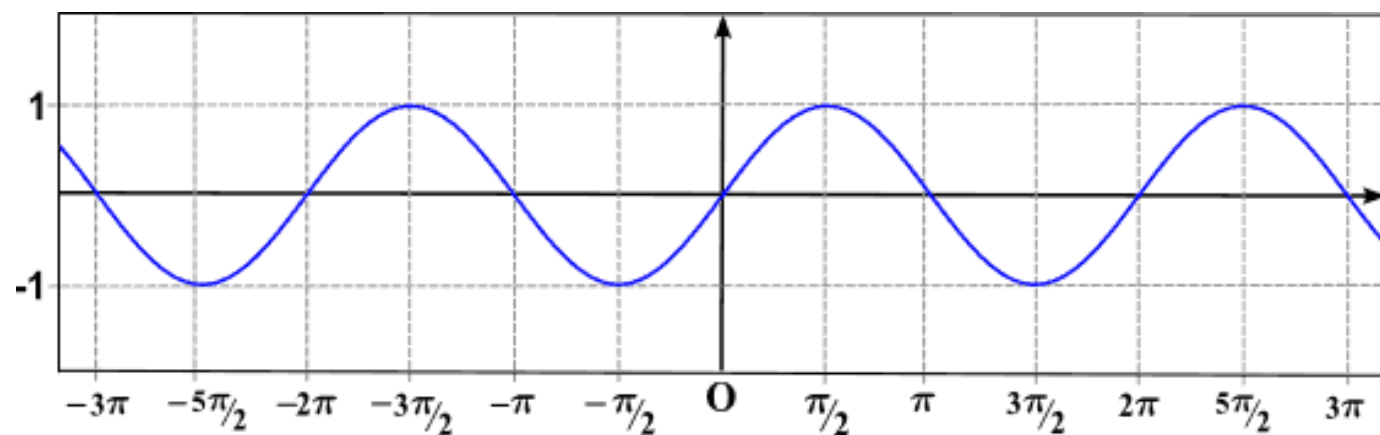
$$\text{C.F.2. en } x^* = -1 \quad \theta^* = 0$$

Se obtiene,  $C \cos c(1) = 0$  (C.F.1) o  $C \cos c(-1) = 0$  (C.F.2)

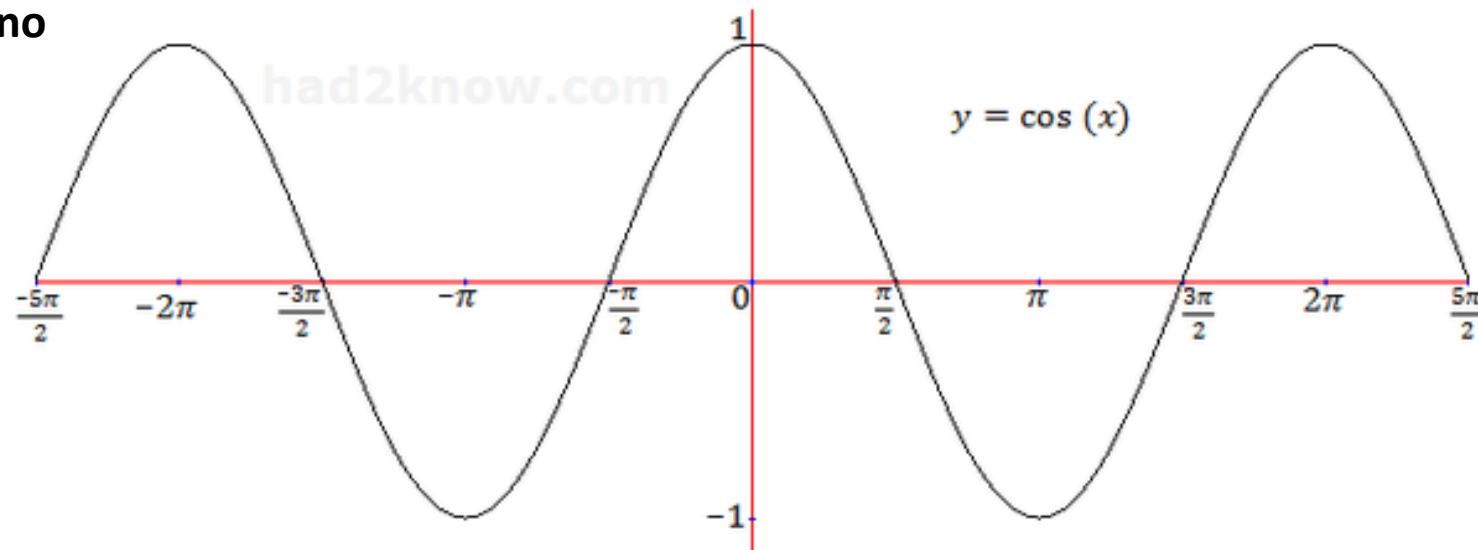
Es evidente que C no puede ser cero, ya que esta elección llevaría a una solución físicamente inadmisibles. Sin embargo, la igualdad puede satisfacerse por medio de muchas elecciones de c, que denominamos  $c_n$ :

$$c_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \infty$$

## Función seno



## Función coseno





$$g_n = A_n \exp \left[ - \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 \pi^2 t^* \right]$$

$$f_n = C_n \cos \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi x^*$$

$$\theta_n^* = f_n g_n$$

$$\theta_n^* = A_n \exp \left[ - \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 \pi^2 t^* \right] C_n \cos \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi x^*$$

Por lo tanto una solución a la Ec.6, puede satisfacerse por medio de siguiente ecuación:

$$\theta_n^* = A_n C_n \exp \left[ - \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 \pi^2 t^* \right] \cos \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi x^* \quad \text{Ec. 15}$$

Los subíndices  $n$  nos recuerda que  $A$  y  $C$  pueden ser diferentes para cada valor de  $n$ . Debido a la linealidad de la ecuación diferencial, podemos suponer todas las soluciones de la forma de la ecuación anterior.

Al hacer lo anterior, se observa que las exponenciales y los cosenos de  $n$  tienen los mismos valores que los de  $-(n + 1)$ , de tal manera que los términos con índices negativos se combinan con los que tienen índices positivos. Entonces, la superposición proporciona:

$$\theta^* = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \exp \left[ - \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 \pi^2 t^* \right] \cos \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi x^* \quad \text{Ec. 16}$$

donde:

$$D_n = A_n C_n + A_{-(n+1)} C_{-(n+1)}$$

Ahora las  $D_n$  se determinan usando la condición inicial (C.I.: en  $t^* = 0$   $\theta^* = 1$ ), con lo que se obtiene

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi x^*$$

Al multiplicar  $\cos\left(m + \frac{1}{2}\right) \pi x^*$  e integrar con respecto a  $x$ , desde  $x^* = -1$  hasta  $x^* = +1$  se obtiene:

$$\int_{-1}^{+1} \cos\left(m + \frac{1}{2}\right) \pi x^* dx^* = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \int_{-1}^{+1} \cos\left(m + \frac{1}{2}\right) \pi x^* \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi x^* dx^*$$

Una vez que se hacen las integraciones, todas las integrales en el miembro derecho son idénticamente cero, excepto por el término en que  $n = m$ . Por tanto, se obtiene:

$$\left. \frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right) \pi x^*}{\left(m + \frac{1}{2}\right) \pi} \right|_{n=-1}^{n=+1} = D_m \left. \frac{\frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{2}\right) \pi x^* + \frac{1}{4} \sin 2\left(m + \frac{1}{2}\right) \pi x^*}{\left(m + \frac{1}{2}\right) \pi} \right|_{n=-1}^{n=+1} \quad \text{Ec. 17}$$

Después de insertar los límites, podemos despejar  $D_m$  para obtener:

$$D_m = \frac{2(-1)^m}{(m + \frac{1}{2})\pi} \quad \text{Ec. 18}$$

Sustituyendo la Ec. 18 en Ec. 16:

$$\theta^* = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{(n + \frac{1}{2})\pi} \exp \left[ - \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 \pi^2 t^* \right] \cos \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi x^* \quad \text{Ec. 19}$$

En valores característicos **eigenvalores** ( $\xi_n$ ), la ecuación anterior se puede expresar:

$$\theta^* = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp[-\xi_n^2 Fo] \cos(\xi_n x^*) \quad \text{Ec. 20}$$

donde:

$$C_n = \frac{4 \operatorname{sen} \xi_n}{2\xi_n + \operatorname{sen}(2\xi_n)}$$

Y los valores característicos (eigenvalores) de  $\xi_n$  son las raíces positivas de la ecuación trascendente:

$$\xi_n \tan \xi_n = \text{Bi} \quad \text{Ec. 21}$$

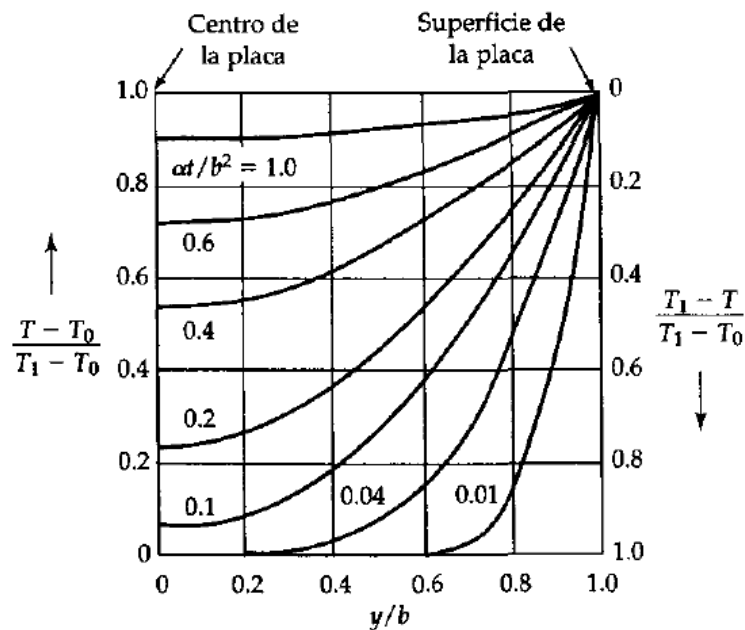
Las primeras cuatro raíces, se dan en el apéndice B.3 del libro Incropera (4ta edición)

### B.3

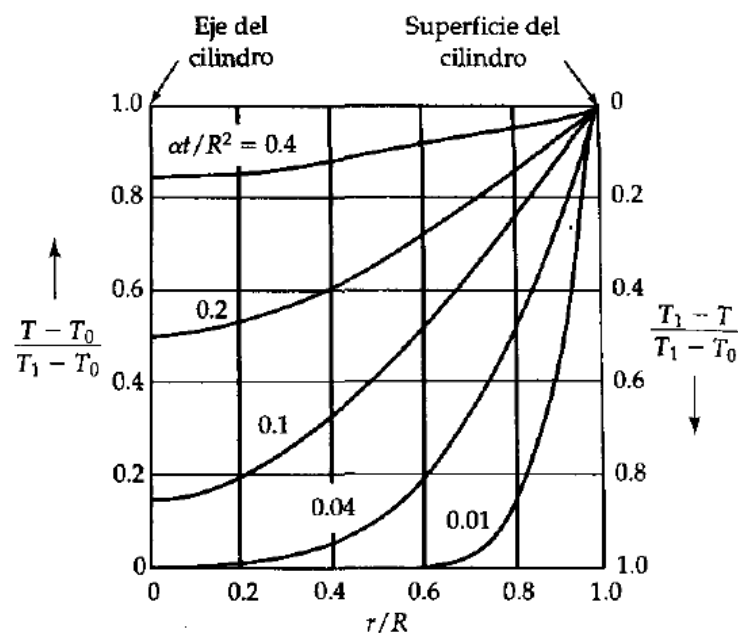
Primeras cuatro raíces de la ecuación trascendental,

$\xi_n \tan \xi_n = Bi$ , para conducción transitoria en una pared plana

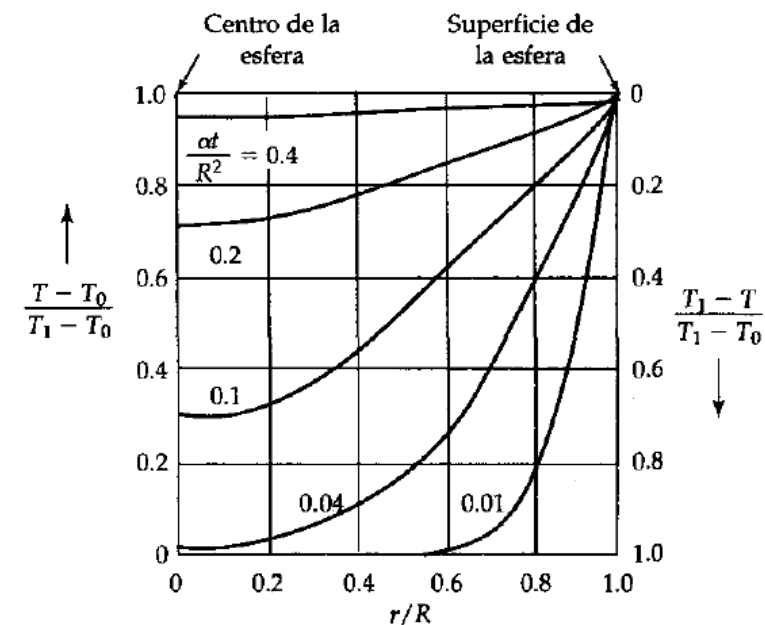
$Bi = \frac{hL}{k}$	$\xi_1$	$\xi_2$	$\xi_3$	$\xi_4$
0	0	3.1416	6.2832	9.4248
0.001	0.0316	3.1419	6.2833	9.4249
0.002	0.0447	3.1422	6.2835	9.4250
0.004	0.0632	3.1429	6.2838	9.4252
0.006	0.0774	3.1435	6.2841	9.4254
0.008	0.0893	3.1441	6.2845	9.4256
0.01	0.0998	3.1448	6.2848	9.4258
0.02	0.1410	3.1479	6.2864	9.4269
0.04	0.1987	3.1543	6.2895	9.4290
0.06	0.2425	3.1606	6.2927	9.4311
0.08	0.2791	3.1668	6.2959	9.4333
0.1	0.3111	3.1731	6.2991	9.4354
0.2	0.4328	3.2039	6.3148	9.4459
0.3	0.5218	3.2341	6.3305	9.4565
0.4	0.5932	3.2636	6.3461	9.4670
0.5	0.6533	3.2923	6.3616	9.4775
0.6	0.7051	3.3204	6.3770	9.4879
0.7	0.7506	3.3477	6.3923	9.4983
0.8	0.7910	3.3744	6.4074	9.5087
0.9	0.8274	3.4003	6.4224	9.5190
1.0	0.8603	3.4256	6.4373	9.5293
1.5	0.9882	3.5422	6.5097	9.5801
2.0	1.0769	3.6436	6.5783	9.6296
3.0	1.1925	3.8088	6.7040	9.7240
4.0	1.2646	3.9352	6.8140	9.8119
5.0	1.3138	4.0336	6.9096	9.8928
6.0	1.3496	4.1116	6.9924	9.9667
7.0	1.3766	4.1746	7.0640	10.0339
8.0	1.3978	4.2264	7.1263	10.0949
9.0	1.4149	4.2694	7.1806	10.1502
10.0	1.4289	4.3058	7.2281	10.2003
15.0	1.4729	4.4255	7.3959	10.3898
20.0	1.4961	4.4915	7.4954	10.5117
30.0	1.5202	4.5615	7.6057	10.6543
40.0	1.5325	4.5979	7.6647	10.7334
50.0	1.5400	4.6202	7.7012	10.7832
60.0	1.5451	4.6353	7.7259	10.8172
80.0	1.5514	4.6543	7.7573	10.8606
100.0	1.5552	4.6658	7.7764	10.8871
$\infty$	1.5708	4.7124	7.8540	10.9956



**Figura 12.1-1** Perfiles de temperatura para conducción de calor en estado no estacionario en una placa de espesor finito  $2b$ . La temperatura inicial de la placa es  $T_0$ , y  $T_1$  es la temperatura impuesta en las superficies de la placa para el tiempo  $t > 0$ . [H.S. Carslaw y J.C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, 2a. edición, Oxford University Press (1959), p. 101.]



**Figura 12.1-2** Perfiles de temperatura para conducción de calor en estado no estacionario en un cilindro de radio  $R$ . La temperatura inicial del cilindro es  $T_0$ , y  $T_1$  es la temperatura impuesta en la superficie del cilindro para el tiempo  $t > 0$ . [H.S. Carslaw y J.C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, 2a. edición, Oxford University Press (1959), p. 200.]



**Figura 12.1-3** Perfiles de temperatura para conducción de calor en estado no estacionario en una esfera de radio  $R$ . La temperatura inicial de la esfera es  $T_0$ , y  $T_1$  es la temperatura impuesta en la superficie de la esfera para el tiempo  $t > 0$ . [H.S. Carslaw y J.C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, 2a. edición, Oxford University Press (1959), p. 234.]

Para grandes valores de  $t^* \gg$ , las series convergen rápidamente

Para tiempos cortos la convergencia es muy lenta cuando  $t^*$  tiende a cero

A partir de la figura resulta evidente que cuando el tiempo adimensional  $t^*$  es 0.1, el calor ha "penetrado" en forma mensurable al plano central de la placa, y que para  $t^* = 1$  el calentamiento está al 90% en el plano central.

### ***b) Solución aproximada***

Para valores de  $Fo > 0.2$ , la solución en serie infinita (Ec. 20), se puede aproximar con el primer término de la serie.

Al recurrir a esta aproximación la forma adimensional de la distribución de temperaturas se convierte en:

$$\theta^* = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = C_1 \exp[-\xi_1^2 Fo] \cos(\xi_1 x^*) \quad \text{Ec. 21}$$

o

$$\theta^* = \theta_0^* \cos(\xi_1 x^*)$$

donde,  $\theta_0^* = \frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty}$  representa la temperatura en el plano medio ( $x^* = 0$ ), por lo que sustituyendo lo anterior en la Ec. 21 se obtiene:

$$\theta_0^* = \frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty} = C_1 \exp[-\xi_1^2 Fo] \quad \text{Ec. 22}$$

Los valores de  $C_1$  y  $\xi_1$  para un rango de números de Biot y está dado en la tabla 5.1 del libro de Incropera , 2006 (4ta edición, pág. 227)

**TABLA 5.1** Coeficientes que se usan en la aproximación de un término para las soluciones de serie de la conducción transitoria unidimensional

$Bi^*$	Pared plana		Cilindro infinito		Esfera	
	$\xi_1$ (rad)	$C_1$	$\xi_1$ (rad)	$C_1$	$\xi_1$ (rad)	$C_1$
0.01	0.0998	1.0017	0.1412	1.0025	0.1730	1.0030
0.02	0.1410	1.0033	0.1995	1.0050	0.2445	1.0060
0.03	0.1732	1.0049	0.2439	1.0075	0.2989	1.0090
0.04	0.1987	1.0066	0.2814	1.0099	0.3450	1.0120
0.05	0.2217	1.0082	0.3142	1.0124	0.3852	1.0149
0.06	0.2425	1.0098	0.3438	1.0148	0.4217	1.0179
0.07	0.2615	1.0114	0.3708	1.0173	0.4550	1.0209
0.08	0.2791	1.0130	0.3960	1.0197	0.4860	1.0239
0.09	0.2956	1.0145	0.4195	1.0222	0.5150	1.0268
0.10	0.3111	1.0160	0.4417	1.0246	0.5423	1.0298
0.15	0.3779	1.0237	0.5376	1.0365	0.6608	1.0445
0.20	0.4328	1.0311	0.6170	1.0483	0.7593	1.0592
0.25	0.4801	1.0382	0.6856	1.0598	0.8448	1.0737
0.30	0.5218	1.0450	0.7465	1.0712	0.9208	1.0880
0.4	0.5932	1.0580	0.8516	1.0932	1.0528	1.0164
0.5	0.6533	1.0701	0.9408	1.1143	1.1656	1.1441
0.6	0.7051	1.0814	1.0185	1.1346	1.2644	1.1713
0.7	0.7506	1.0919	1.0873	1.1539	1.3225	1.1978
0.8	0.7910	1.1016	1.1490	1.1725	1.4320	1.2236
0.9	0.8274	1.1107	1.2048	1.1902	1.5044	1.2488
1.0	0.8603	1.1191	1.2558	1.2071	1.5708	1.2732
2.0	1.0769	1.1795	1.5995	1.3384	2.0288	1.4793
3.0	1.1925	1.2102	1.7887	1.4191	2.2889	1.6227
4.0	1.2646	1.2287	1.9081	1.4698	2.04556	1.7201
5.0	1.3138	1.2402	1.9898	1.5029	2.5704	1.7870
6.0	1.3496	1.2479	2.0490	1.5253	2.6537	1.8338
7.0	1.3766	1.2532	2.0937	1.5411	2.7165	1.8674
8.0	1.3978	1.2570	2.1286	1.5526	2.7654	1.8921
9.0	1.4149	1.2598	2.1566	1.5611	2.8044	1.9106
10.0	1.4289	1.2620	2.1795	1.5677	2.8363	1.9249
20.0	1.4961	1.2699	2.2881	1.5919	2.9857	1.9781
30.0	1.5202	1.2717	2.3261	1.5973	3.0372	1.9898
40.0	1.5325	1.2723	2.3455	1.5993	3.0632	1.9942
50.0	1.5400	1.2727	2.3572	1.6002	3.0788	1.9962
100.0	1.5552	1.2731	2.3809	1.6015	3.1102	1.9990
$\infty$	1.5707	1.2733	2.4050	1.6018	3.1415	2.000

\* $Bi = hL/k$  para la pared plana y  $hr_o/k$  para el cilindro infinito y la esfera. Véase la figura 5.6.



### 5.3.1.1 Transferencia total de energía en la pared plana

Es útil conocer la energía total que disminuye en la pared en cualquier tiempo  $t$  en el proceso transitorio. El requerimiento de conservación de la energía, se aplica al intervalo de tiempo limitado por la conducción Inicial ( $t = 0$ ) y cualquier tiempo  $t > 0$ :

$$E_{ent} - E_{sale} = \Delta E_{alm} \quad \text{Ec. 23}$$

Al igualar la energía que se transfiere desde la pared,  $Q = E_{sale}$  y con  $E_{ent} = 0$  y  $\Delta E_{alm} = E(t) - E(0)$ , se sigue que:

$$\dot{Q} = -[E(t) - E(0)] = -\rho c [T(x, t) - T_i]$$

o

$$\dot{Q} = - \int \rho c [T(x, t) - T_i] dV \quad (\text{J m}^3)$$

donde, la integración se lleva a cabo sobre el volumen de la pared. Es conveniente quitar las dimensiones a este resultado mediante la introducción de la cantidad:

$$Q_0 = \rho c V [T_i - T_\infty] \quad \text{Ec. 24}$$




Energía interna inicial de la pared  
relativa a la temperatura del fluido

También se interpreta como la cantidad máxima de transferencia de energía que podría ocurrir si el proceso continuará al tiempo  $t = \infty$ ,

Por lo tanto, al suponer propiedades constantes, **la razón de la energía total transferida de la pared en el intervalo de tiempo t a la transferencia máxima posible**, se obtiene:

$$\frac{Q}{Q_0} = \int \frac{-[T(x, t) - T_i]}{T_i - T_\infty} \frac{dV}{V} = \frac{1}{V} \int (1 - \theta^*) dV \quad \text{Ec. 25}$$


 $\theta^* = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = C_1 \exp[-\xi_1^2 Fo] \cos(\xi_1 x^*)$

Al emplear la forma aproximada de la distribución de temperaturas para la pared plana, la integración da como resultado:

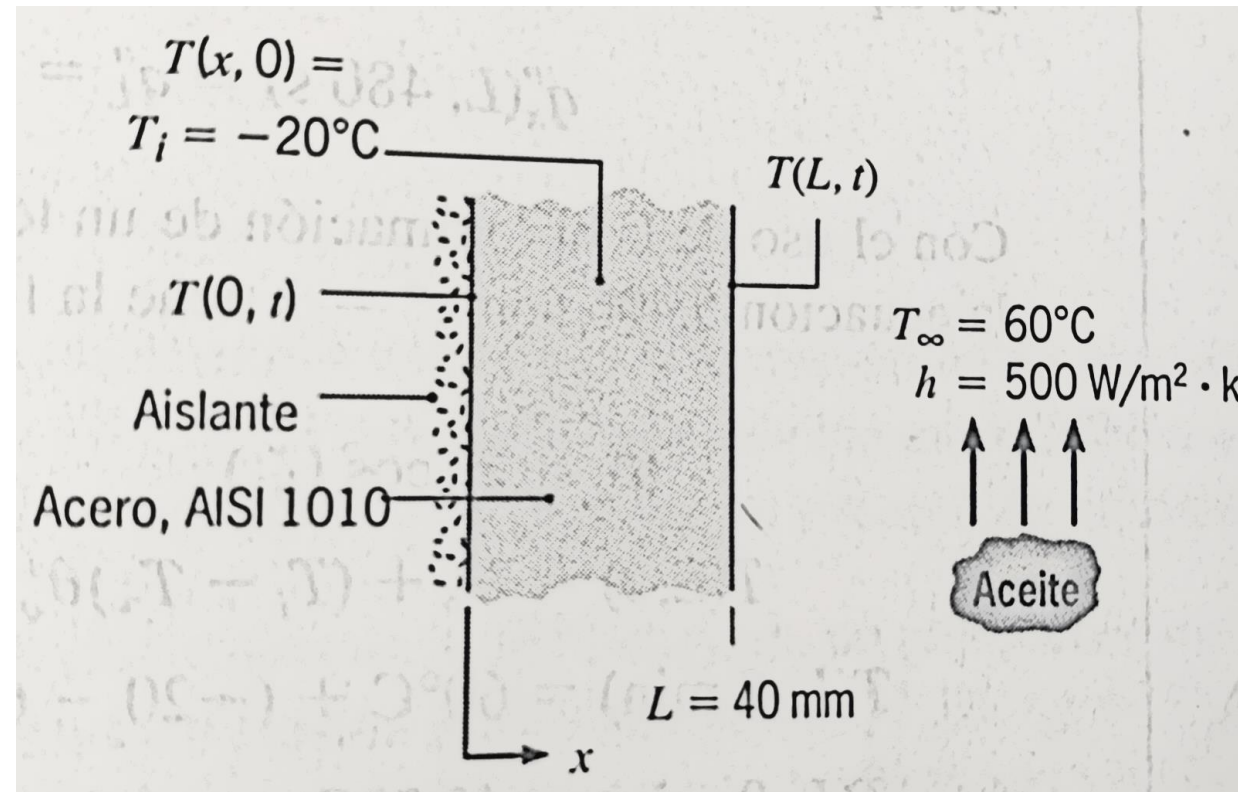
$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{\sin \zeta_1}{\zeta_1} \theta_0^* \quad \text{Ec. 26}$$

## Ejercicio 1

Considere una tubería de acero (AISI 1010) que tiene 1 m de diámetro interno y una pared con espesor de 40 mm. La tubería está fuertemente aislada en el exterior y, antes del inicio del flujo, las paredes de la tubería se encuentran a una temperatura uniforme de  $-20^{\circ}\text{C}$ . Con el inicio del flujo se bombea aceite caliente a  $60^{\circ}\text{C}$  por la tubería, con lo que se crea una condición convectiva de superficie que corresponde a  $h = 500 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$  en la superficie interior de la tubería.

1. ¿Cuáles son los números de Biot y de Fourier apropiados, 8 minutos después de iniciado el flujo?
2. A  $t = 8 \text{ min}$ , ¿cuál es la temperatura de la superficie externa cubierta por aislante?
3. ¿Cuál es el flujo de calor  $q''$  ( $\text{W/m}^2$ ) a la tubería desde el aceite en  $t = 8 \text{ minutos}$ ?
4. ¿Cuánta energía por metro de longitud de tubería se ha transferido del aceite a la tubería en  $t = 8 \text{ minutos}$ ?

Esquema:



### **Suposiciones:**

1. La pared de la tubería se aproxima como una pared plana, pues el espesor es mucho menor que el diámetro.
2. Propiedades constantes.
3. La superficie externa de la tubería es adiabática.

**Propiedades:** De la tabla A.1, acero tipo AISI 1010 [ $T = (-20 + 60)^{\circ}\text{C}/2 \approx 300\text{ K}$ ]:  
 $\rho = 7823\text{ kg/m}^3$ ,  $c = 434\text{ J/kg} \cdot \text{K}$ ,  $k = 63.9\text{ W/m} \cdot \text{K}$ ,  $\alpha = 18.8 \times 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$ .

### **Análisis:**

1. En  $t = 8$  minutos, los números de Biot y de Fourier se calculan de las ecuaciones 5.10 y 5.12, respectivamente, con  $L_c = L$ . Así,

$$Bi = \frac{hL}{k} = \frac{500\text{ W/m}^2 \cdot \text{K} \times 0.04\text{ m}}{63.9\text{ W/m} \cdot \text{K}} = 0.313$$

$$Fo = \frac{\alpha t}{L^2} = \frac{18.8 \times 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s} \times 8\text{ min} \times 60\text{ s/min}}{(0.04\text{ m})^2} = 5.64$$

2. Con  $Bi = 0.313$ , el uso del método de la resistencia interna despreciable no es apropiado. Sin embargo, como  $Fo > 0.2$  y las condiciones transitorias en la pared aislada de espesor  $L$  de la tubería corresponden a las de una pared plana de espesor  $2L$  que experimenta la misma condición de superficie, los resultados que se describen se obtienen de la aproximación de un término para una pared plana. La temperatura de plano medio se determina de la ecuación 5.41

$$\theta_o^* = \frac{T_o - T_\infty}{T_i - T_\infty} = C_1 \exp(-\zeta_1^2 Fo)$$

donde, con  $Bi = 0.313$ ,  $C_1 = 1.047$  y  $\zeta_1 = 0.531$  rad de la tabla 5.1. Con  $Fo = 5.64$

$$\theta_o^* = 1.047 \exp [-(0.531 \text{ rad})^2 \times 5.64] = 0.214$$

Por tanto, después de 8 minutos la temperatura de la superficie externa de la tubería, que corresponde a la temperatura del plano medio de una pared plana, es

$$T(0, 8 \text{ min}) = T_\infty + \theta_o^*(T_i - T_\infty) = 60^\circ\text{C} + 0.214(-20 - 60)^\circ\text{C} = 42.9^\circ\text{C}$$



**TABLA 5.1** Coeficientes que se usan en la aproximación de un término para las soluciones de serie de la conducción transitoria unidimensional

$Bi^*$	Pared plana = 0		Cilindro infinito		Esfera	
	$\zeta_1$ (rad)	$C_1$	$\zeta_1$ (rad)	$C_1$	$\zeta_1$ (rad)	$C_1$
0.01	0.0998	1.0017	0.1412	1.0025	0.1730	1.0030
0.02	0.1410	1.0033	0.1995	1.0050	0.2445	1.0060
0.03	0.1732	1.0049	0.2439	1.0075	0.2989	1.0090
0.04	0.1987	1.0066	0.2814	1.0099	0.3450	1.0120
0.05	0.2217	1.0082	0.3142	1.0124	0.3852	1.0149
0.06	0.2425	1.0098	0.3438	1.0148	0.4217	1.0179
0.07	0.2615	1.0114	0.3708	1.0173	0.4550	1.0209
0.08	0.2791	1.0130	0.3960	1.0197	0.4860	1.0239
0.09	0.2956	1.0145	0.4195	1.0222	0.5150	1.0268
0.10	0.3111	1.0160	0.4417	1.0246	0.5423	1.0298
0.15	0.3779	1.0237	0.5376	1.0365	0.6608	1.0445
0.20	0.4328	1.0311	0.6170	1.0483	0.7593	1.0592
0.25	0.4801	1.0382	0.6856	1.0598	0.8448	1.0737
0.30	0.5218	1.0450	0.7465	1.0712	0.9208	1.0880
0.4	0.5932	1.0580	0.8516	1.0932	1.0528	1.0164
0.5	0.6533	1.0701	0.9408	1.1143	1.1656	1.1441
0.6	0.7051	1.0814	1.0185	1.1346	1.2644	1.1713
0.7	0.7506	1.0919	1.0873	1.1539	1.3225	1.1978
0.8	0.7910	1.1016	1.1490	1.1725	1.4320	1.2236
0.9	0.8274	1.1107	1.2048	1.1902	1.5044	1.2488
1.0	0.8603	1.1191	1.2558	1.2071	1.5708	1.2732
2.0	1.0769	1.1795	1.5995	1.3384	2.0288	1.4793
3.0	1.1925	1.2102	1.7887	1.4191	2.2889	1.6227
4.0	1.2646	1.2287	1.9081	1.4698	2.04556	1.7201
5.0	1.3138	1.2402	1.9898	1.5029	2.5704	1.7870
6.0	1.3496	1.2479	2.0490	1.5253	2.6537	1.8338
7.0	1.3766	1.2532	2.0937	1.5411	2.7165	1.8674
8.0	1.3978	1.2570	2.1286	1.5526	2.7654	1.8921
9.0	1.4149	1.2598	2.1566	1.5611	2.8044	1.9106
10.0	1.4289	1.2620	2.1795	1.5677	2.8363	1.9249
20.0	1.4961	1.2699	2.2881	1.5919	2.9857	1.9781
30.0	1.5202	1.2717	2.3261	1.5973	3.0372	1.9898
40.0	1.5325	1.2723	2.3455	1.5993	3.0632	1.9942
50.0	1.5400	1.2727	2.3572	1.6002	3.0788	1.9962
100.0	1.5552	1.2731	2.3809	1.6015	3.1102	1.9990
$\infty$	1.5707	1.2733	2.4050	1.6018	3.1415	2.000

\* $Bi = hL/k$  para la pared plana y  $hr_o/k$  para el cilindro infinito y la esfera. Véase la figura 5.6.

3. La transferencia de calor a la superficie interna en  $x = L$  es por convección, y en cualquier tiempo  $t$  el flujo de calor se obtiene de la ley de enfriamiento de Newton. De aquí en  $t = 480$  s,

$$q_x''(L, 480 \text{ s}) \equiv q_L'' = h[T(L, 480 \text{ s}) - T_\infty]$$

Con el uso de la aproximación de un término para la temperatura de la superficie, la ecuación 5.40b con  $x^* = 1$  tiene la forma

$$\theta^* = \theta_o^* \cos(\zeta_1)$$

$$T(L, t) = T_\infty + (T_i - T_\infty)\theta_o^* \cos(\zeta_1)$$

$$T(L, 8 \text{ min}) = 60^\circ\text{C} + (-20 - 60)^\circ\text{C} \times 0.214 \times \cos(0.531 \text{ rad})$$

$$T(L, 8 \text{ min}) = 45.2^\circ\text{C}$$

El flujo de calor en  $t = 8$  minutos es entonces

$$q_L'' = 500 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K} (45.2 - 60)^\circ\text{C} = -7400 \text{ W/m}^2$$



4. La transferencia de energía a la pared de la tubería en el intervalo de 8 minutos se obtiene de las ecuaciones 5.44 y 5.46. Con

$$\frac{Q}{Q_o} = 1 - \frac{\text{sen}(\zeta_1)}{\zeta_1} \theta_o^*$$

$$\frac{Q}{Q_o} = 1 - \frac{\text{sen}(0.531 \text{ rad})}{0.531 \text{ rad}} \times 0.214 = 0.80$$

se sigue que

$$Q = 0.80 \rho c V (T_i - T_\infty)$$

o con un volumen por unidad de longitud de tubería de  $V' = \pi DL$ ,

$$Q' = 0.80 \rho c \pi DL (T_i - T_\infty)$$

$$Q' = 0.80 \times 7823 \text{ kg/m}^3 \times 434 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$$

$$\times \pi \times 1 \text{ m} \times 0.04 \text{ m} (-20 - 60)^\circ\text{C}$$

$$Q' = -2.73 \times 10^7 \text{ J/m}$$



## 5.3.2 Sistemas radiales con convección

Si partimos de la ecuación general de la conducción de calor en coordenadas cilíndricas:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( kr \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{e}_{\text{gen}} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{Ec. 27}$$

**Y aplicamos las siguientes suposiciones:**

- Conducción de calor unidimensional en el eje coordenado r
- Sin generación de calor
- Conductividad térmica constante

La Ec. 1, se reduce a:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{Ec. 28}$$

Para resolver la ecuación diferencial anterior (Ec. 28) se pueden usar diferentes métodos tal como se menciono anteriormente, en el siguiente apartado mostraremos la solución de esta ecuación utilizando el método de separación de variables.

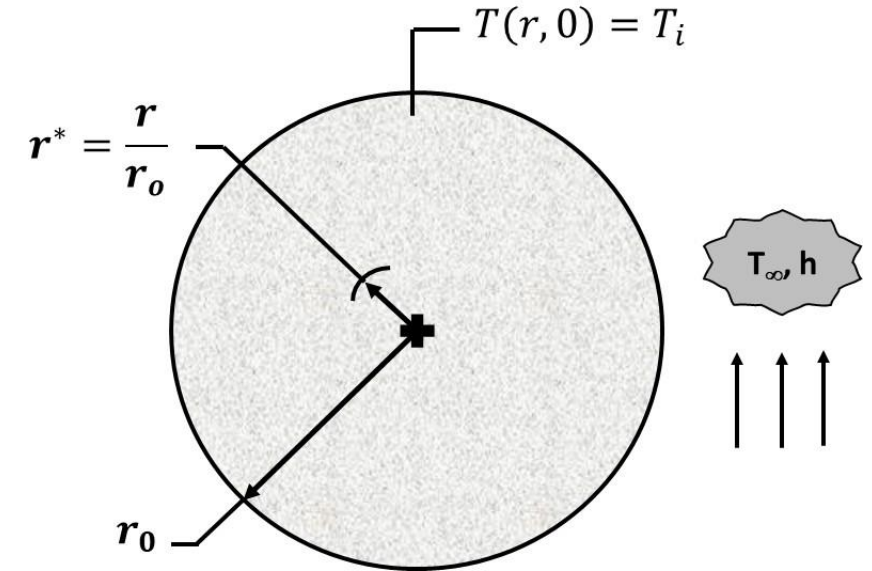
## a) Solución exacta

### Para un cilindro infinito:

Si consideramos un cilindro infinito o una esfera de radio  $r_0$ , que está a una temperatura inicial uniforme ( $T_i$ ) y experimenta un cambio en las condiciones de convección (Ver Figura).

El cilindro infinito es una idealización que permite la suposición unidimensional en la dirección radial. Esta es una aproximación razonable para cilindros con  $L/r_0 = 10$ .

Definiendo **variables adimensionales** para:



Una variable adimensional de las variables  $T$ ,  $x$  y  $t$

$$\theta^* = \frac{\theta}{\theta^*} = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty}$$

Coordenada radial adimensional

$$r^* = \frac{r}{r_0}$$

Tiempo adimensional

$$t^* = \frac{\alpha t}{L_c^2} \equiv Fo$$

Por lo que la **solución exacta para un cilindro infinito** es:

$$\theta^* = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp[-\xi_n^2 Fo] J_0(\xi_n r^*) \quad \text{Ec. 29}$$

donde,  $Fo = \frac{\alpha t}{r_0^2}$

$$C_n = \frac{2}{\xi_n} \frac{J_1(\xi_n)}{J_0^2(\xi_n) + J_1^2(\xi_n)}$$

Y los valores característicos de  $\xi_n$  son las raíces positivas de la ecuación trascendental

$$\xi_n \frac{J_1(\xi_n)}{J_0(\xi_n)} = Bi$$

Las cantidades  $J_1$  y  $J_0$  son **funciones de Bessel** de primera clase y sus valores se tabulan en el apéndice B.4, del libro Incropera (4ta edición).

**B.4****Funciones de Bessel de primera clase**

$x$	$J_0(x)$	$J_1(x)$
0.0	1.0000	0.0000
0.1	0.9975	0.0499
0.2	0.9900	0.0995
0.3	0.9776	0.1483
0.4	0.9604	0.1960
0.5	0.9385	0.2423
0.6	0.9120	0.2867
0.7	0.8812	0.3290
0.8	0.8463	0.3688
0.9	0.8075	0.4059
1.0	0.7652	0.4400
1.1	0.7196	0.4709
1.2	0.6711	0.4983
1.3	0.6201	0.5220
1.4	0.5669	0.5419
1.5	0.5118	0.5579
1.6	0.4554	0.5699
1.7	0.3980	0.5778
1.8	0.3400	0.5815
1.9	0.2818	0.5812
2.0	0.2239	0.5767
2.1	0.1666	0.5683
2.2	0.1104	0.5560
2.3	0.0555	0.5399
2.4	0.0025	0.5202

Para la esfera:

$$\theta^* = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp[-\xi_n^2 Fo] \frac{1}{r^* \xi_n} \text{sen}(\xi_n r^*)$$

**Ec. 30**

donde,  $Fo = \frac{\alpha t}{r_0^2}$

$$C_n = \frac{4[\text{sen}(\xi_n) - \xi_n \cos(\xi_n)]}{2\xi_n - \text{sen}(2\xi_n)}$$

Y los valores característicos de  $\xi_n$  son las raíces positivas de la ecuación trascendental

$$1 - \xi_n \cot \xi_n = Bi$$

## b) Solución aproximada

Para un cilindro infinito y la esfera, las soluciones en serie anteriores se aproximan nuevamente mediante un solo término para  $Fo > 0.2$ .

Cilindro infinito: La aproximaciones se determina:

$$\theta^* = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = C_1 \exp[-\xi_1^2 Fo] J_0(\xi_1 r^*)$$

**Ec. 31**

o

$$\theta^* = \theta_0^* J_0(\xi_1 r^*)$$

Donde,  $\theta_0^*$  representa la temperatura de la línea central y es de la forma:

$$\theta_0^* = C_1 \exp(-\xi_1^2 Fo)$$

Los valores de los coeficientes  $C_1$  y  $\xi_1$  ya se han determinado (Tabla 5.1) para un rango de números de Biot.

Para la esfera: La aproximación se determina:

$$\theta^* = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = C_1 \exp[-\xi_n^2 Fo] \frac{1}{r^* \xi_1} \text{sen}(\xi_1 r^*)$$

**Ec. 32**

o

$$\theta^* = \theta_0^* \frac{1}{r^* \xi_1} \text{sen}(\xi_1 r^*)$$

Donde,  $\theta_0^*$  representa la temperatura de la línea central y es de la forma:

$$\theta_0^* = C_1 \exp(-\xi_1^2 Fo)$$

Los valores de los coeficientes  $C_1$  y  $\xi_1$  ya se han determinado (Tabla 5.1) para un rango de números de Biot (Diap. 12).



### 5.3.2.1 Transferencia total de energía

La transferencia total de energía del cilindro o de la esfera en el intervalo de tiempo  $\Delta t = t$ , se puede determinar con las siguientes ecuaciones:

Cilindro infinito:

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{2\theta_0^*}{\zeta_1} J_1(\zeta_1) \quad \text{Ec. 33}$$

Esfera:

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{3\theta_0^*}{\zeta_1^3} [\sin(\zeta_1) - \zeta_1 \cos \zeta_1] \quad \text{Ec. 34}$$

Los valores de la temperatura del centro  $\theta_0^*$  se determinan a partir de las ecuaciones mostradas anteriormente. De acuerdo al sistema de estudio, así como en la Tabla 5.1 los valores de los coeficientes  $C_1$  y  $\zeta_1$ .

## Ejercicio 2

Se evaluará un proceso nuevo para el tratamiento de un material especial. El material, una esfera de radio  $r_o = 5 \text{ mm}$ , está inicialmente en equilibrio a  $400^\circ\text{C}$  en un horno. Se retira súbitamente del horno y se sujeta a un proceso de enfriamiento de dos pasos.

**Paso 1** Enfriamiento en aire a  $20^\circ\text{C}$  durante un periodo de tiempo  $t_a$  hasta que la temperatura del centro alcanza un valor crítico,  $T_u(0, t_u) = 335^\circ\text{C}$ . Para esta situación, el coeficiente de calor convectivo es  $h_a = 10 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ .

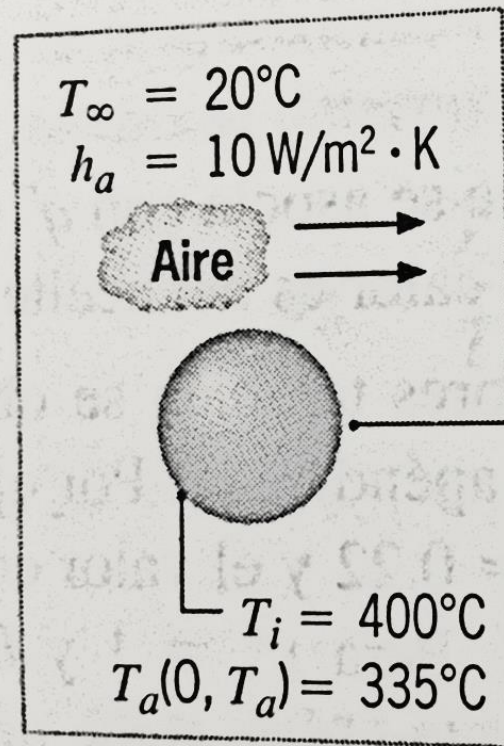
Después de que la esfera alcanza esta temperatura crítica, se inicia el segundo paso.

**Paso 2** Enfriamiento en un baño de agua muy agitado a  $20^\circ\text{C}$ , con un coeficiente de transferencia de calor por convección  $h_w = 6000 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ .

Las propiedades termofísicas del material son  $\rho = 3000 \text{ kg/m}^3$ ,  $k = 20 \text{ W/m} \cdot \text{K}$ ,  $c = 1000 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$  y  $\alpha = 6.66 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ .

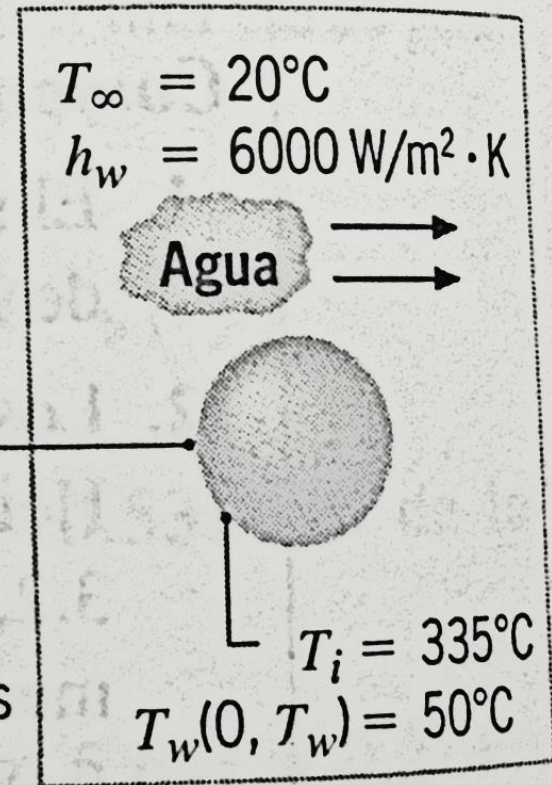
1. Calcule el tiempo  $t_o$  que se requiere para que se complete el paso 1 del proceso de enfriamiento.
2. Calcule el tiempo  $t_{tr}$  que se requiere durante el paso 2 del proceso para que el centro de la esfera se enfríe de  $335^\circ\text{C}$  (condición al final del paso 1) a  $50^\circ\text{C}$ .

## Esquema:



Paso 1

Esfera,  $r_0 = 5 \text{ mm}$   
 $\rho = 3000 \text{ kg/m}^3$   
 $c = 1 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$   
 $\alpha = 6.66 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$   
 $k = 20 \text{ W/m} \cdot \text{K}$



Paso 2

### Suposiciones:

1. Conducción unidimensional en  $r$ .
2. Propiedades constantes.

### Análisis:

1. Para determinar si es posible utilizar el método de la resistencia interna despreciable, se calcula el número de Biot. De la ecuación 5.10, con  $L_c = r_o/3$ ,

$$Bi = \frac{h_a r_o}{3k} = \frac{10 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K} \times 0.005 \text{ m}}{3 \times 20 \text{ W/m} \cdot \text{K}} = 8.33 \times 10^{-4}$$

$$Bi = hL_c/k$$

Para una esfera:  $L_c = r_o/3$

En consecuencia, se puede utilizar el método de la resistencia interna despreciable y la temperatura es casi uniforme a través de la esfera. De la ecuación 5.5 se ve que

$$t_a = \frac{\rho V c}{h_a A_s} \ln \frac{\theta_i}{\theta_a} = \frac{\rho r_o c}{3h_a} \ln \frac{T_i - T_\infty}{T_a - T_\infty} \quad \frac{\theta(t_a)}{\theta_i} = \frac{T_a - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \exp \left[ - \left( \frac{h A_s}{\rho V c} \right) t_a \right]$$

$$\text{donde } V = (4/3)\pi r_o^3 \text{ y } A_s = 4\pi r_o^2$$



$$t_a = \frac{3000 \text{ kg/m}^3 \times 0.005 \text{ m} \times 1000 \text{ J/kg} \cdot \text{K}}{3 \times 10 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}} \ln \frac{400 - 20}{335 - 20} = 94 \text{ s} \quad \triangleleft$$

2. Para determinar si el método de la resistencia interna despreciable también sirve en el segundo paso del proceso de enfriamiento, de nuevo se calcula el número de Biot. En este caso

$$Bi = \frac{h_w r_o}{3k} = \frac{6000 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K} \times 0.005 \text{ m}}{3 \times 20 \text{ W/m} \cdot \text{K}} = 0.50$$

$$Bi = hL_c/k$$

$$\text{Para una esfera: } L_c = r_o/3$$

y el método de la resistencia interna despreciable no es apropiado. Sin embargo, a una excelente aproximación, la temperatura de la esfera es uniforme en  $t = t_a$  y la aproximación con un término se usa para los cálculos de  $t = t_a$  a  $t = t_a + t_w$ . El tiempo  $t_w$  al que la temperatura del centro alcanza  $50^\circ\text{C}$ , es decir,  $T(0, t_w) = 50^\circ\text{C}$ , se obtiene reacomodando la ecuación 5.50c

$$Fo = -\frac{1}{\zeta_1^2} \ln \left[ \frac{\theta_o^*}{C_1} \right] = -\frac{1}{\zeta_1^2} \ln \left[ \frac{1}{C_1} \times \frac{T(0, t_w) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right] \quad \theta_o^* = C_1 \exp(-\zeta_1^2 Fo)$$

$$\theta_o^* = \frac{T_o - T_\infty}{T_i - T_\infty}$$

donde  $t_w = Fo r_o^2 / \alpha$ . Con el número de Biot definido ahora como

$$Bi = \frac{h_w r_o}{k} = \frac{6000 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K} \times 0.005 \text{ m}}{20 \text{ W/m} \cdot \text{K}} = 1.50$$

$$Fo = \alpha t_w / Lc^2$$

Despejando  $t_w$

$$Fo Lc^2 / \alpha = t_w$$

La tabla 5.1 da  $C_1 = 1.376$  y  $\zeta_1 = 1.800$  rad. Se sigue que

Donde  $Lc = r_o$

$$Fo = -\frac{1}{(1.800 \text{ rad})^2} \ln \left[ \frac{1}{1.376} \times \frac{(50 - 20)^\circ\text{C}}{(335 - 20)^\circ\text{C}} \right] = 0.82$$

y

$$t_w = Fo \frac{r_o^2}{\alpha} = 0.82 \frac{(0.005 \text{ m})^2}{6.66 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 3.1 \text{ s} \quad \triangleleft$$

Advierta que, con  $Fo = 0.82$ , se justifica el uso de la aproximación con un término.

# RESOLUCIÓN GRÁFICA DE LOS PROBLEMAS TRANSITORIOS

Los gráficos de Heisler (1947) (**Cengel Y.A., Ghajar A.J., Transferencia de calor y masa: Fundamentos y aplicaciones, 4ta edición, Mc Graw-Hill, 2011, pág. 240-242**):

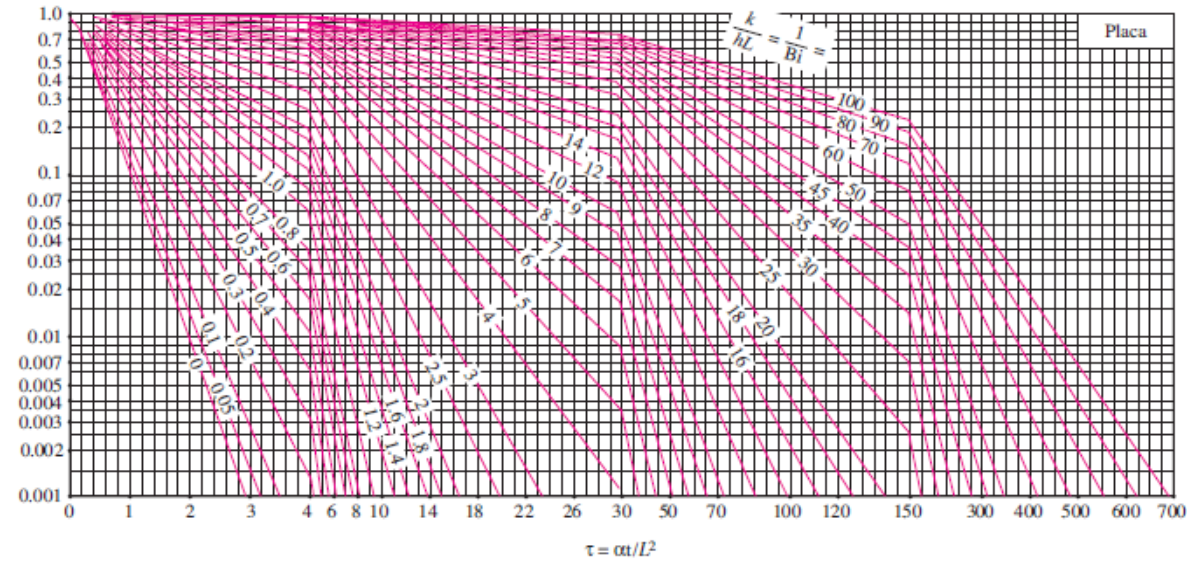
- Representan de forma gráfica el primer término de la solución (es decir, solución aproximada), por tanto no son válidas para  $Fo < 0.2$ .
- Gráficos difíciles de leer cuando  $Fo < 1$

Forma de proceder para la resolución (válido para placas, cilindros y esferas):

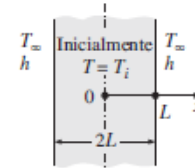
- El primer gráfico se utiliza para conocer la temperatura en el plano medio,  $T_0$ , en cualquier instante durante el proceso transitorio.
- Cuando  $T_0$  es conocido para un determinado valor de  $Fo$  y  $Bi$ , se puede emplear el segundo gráfico para determinar la temperatura en otro punto de la placa/cilindro/esfera.
- La tercera gráfica se utiliza para calcular la energía disipada/ganada por la placa/cilindro/esfera para un determinado valor de  $Fo$  y  $Bi$ , una vez conocida la energía máxima que se podría intercambiar entre el sólido y el ambiente.



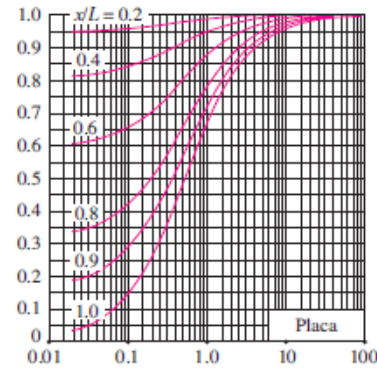
$$\theta_o = \frac{T_o - T_\infty}{T_i - T_\infty}$$



a) Temperatura del plano medio (tomado de M. P. Heisler, "Temperature Charts for Induction and Constant Temperature Heating". *Trans. ASME* 69, 1947, págs. 227-36. Reimpreso con autorización de ASME International).

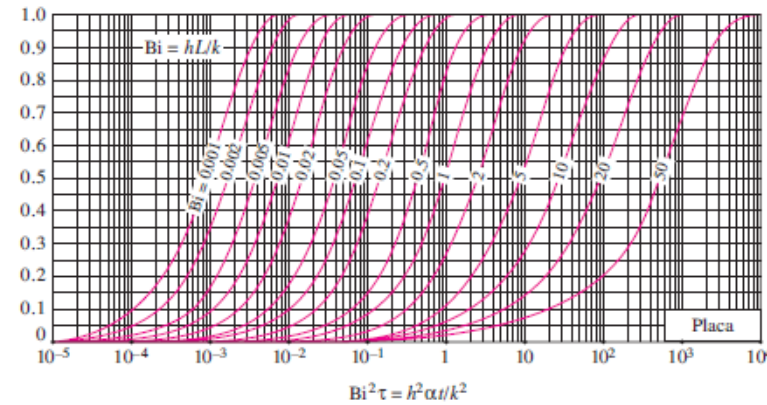


$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_o - T_\infty}$$



$$\frac{1}{Bi} = \frac{k}{hL}$$

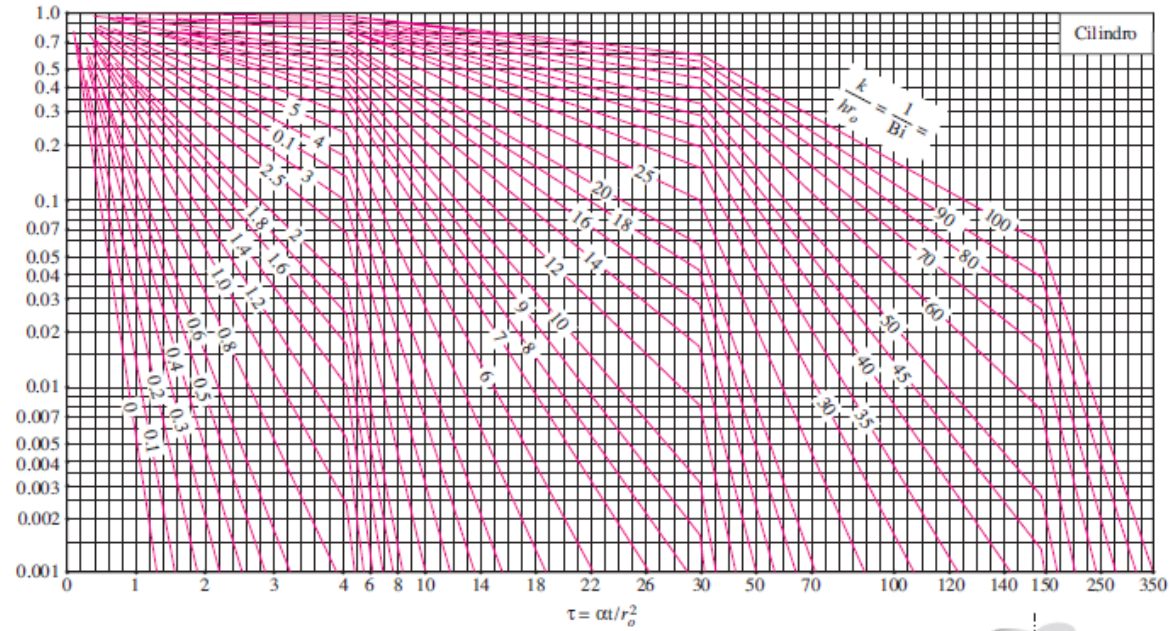
$$\frac{Q}{Q_{\max}}$$



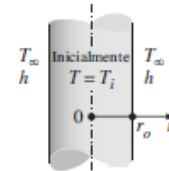
b) Distribución de temperatura (tomado de M. P. Heisler, "Temperature Charts for Induction and Constant Temperature Heating". *Trans. ASME* 69, 1947, págs. 227-36. Reimpreso con autorización de ASME International).

c) Transferencia de calor (tomado de H. Gröber *et al.*)

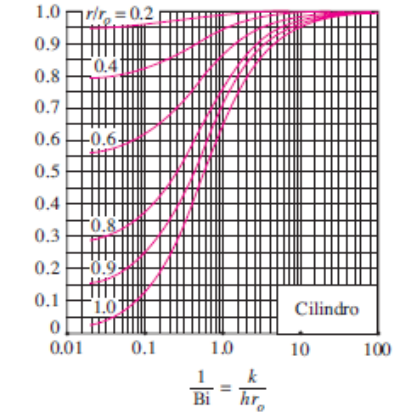
$$\theta_o = \frac{T_o - T_\infty}{T_i - T_\infty}$$



a) Temperatura de la línea central (tomado de M. P. Heisler, "Temperature Charts for Induction and Constant Temperature Heating". *Trans. ASME* 69, 1947, págs. 227-36. Reimpreso con autorización de ASME International).

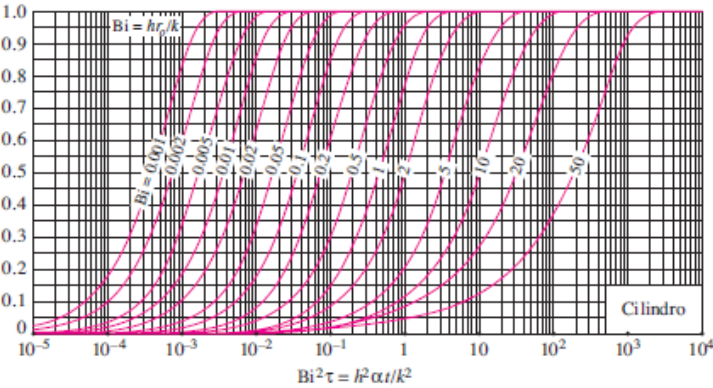


$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_o - T_\infty}$$



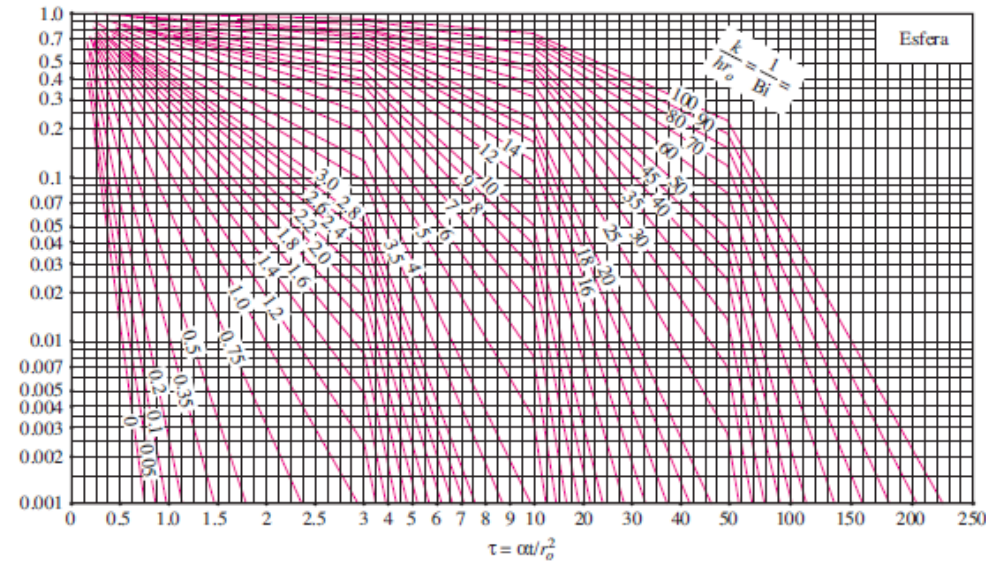
b) Distribución de temperaturas (tomado de M. P. Heisler, "Temperature Charts for Induction and Constant Temperature Heating". *Trans. ASME* 69, 1947, págs. 227-36. Reimpreso con autorización de ASME International).

$$\frac{Q}{Q_{\max}}$$

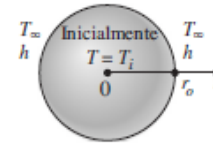


c) Transferencia de calor (tomado de H. Gröber *et al.*)

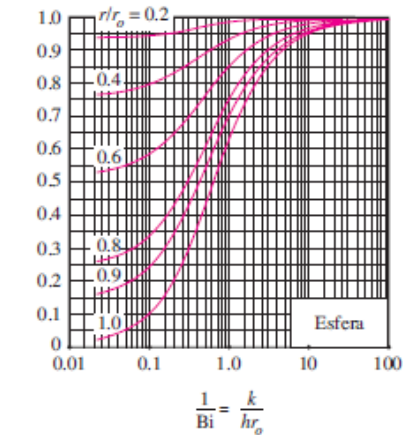
$$\theta_o = \frac{T_o - T_\infty}{T_i - T_\infty}$$



a) Temperatura en el centro (tomado de M. P. Heisler, "Temperature Charts for Induction and Constant Temperature Heating". *Trans. ASME* 69, 1947, págs. 227-36. Reimpreso con autorización de ASME International).

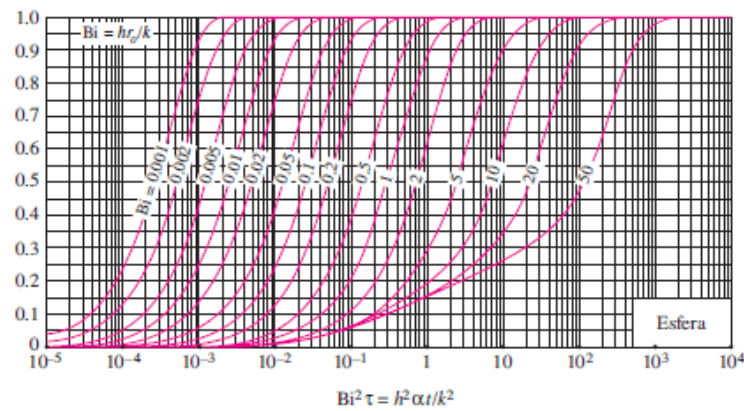


$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_o - T_\infty}$$



b) Distribución de temperaturas (tomado de M. P. Heisler, "Temperature Charts for Induction and Constant Temperature Heating". *Trans. ASME* 69, 1947, págs. 227-36. Reimpreso con autorización de ASME International).

$$\frac{Q}{Q_{\text{máx}}}$$



c) Transferencia de calor (tomado de H. Gröber *et al.*)

# Bibliografía recomendada:

1. Incropera F.P., De Witt D.P., *Fundamentos de transferencia de calor y masa*, Prentice Hall, 2006. **(Consultar Capítulo 5 pág. 225-236)**
2. Bird R. B., Steward W.B., Lightfoot E.N., *Fenómenos de Transporte*, 2a Edición, John Wiley & Sons. 2002.**(Consultar Capítulo 12, pág. 439-477)**